Digitized by Google

Fondo Pizzofalcone

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XX

Palchetto

28-12-98

Num° d' ordine

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

1220

NAPOLI

Google

Digitized by Google

Q. Stat. II 1220

Digitized by Google

Digitized by Google

SBW 610434

JOHANNIS BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA, quam hactenus inedita.

TOMUS QUARTUS,

Quo continentur

ΑΝΕΚΔΟΤΑ.



BIBLIOTECA NAZ. VITT. EM. III NAPOLI

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.
MDCCXLII.

Digitized by Google

Digitized by Google

JOHANNIS BERNOULLI
OPERA
ΑΝΕΚΔΟΤΑ.

ANALYTICA.

****

N°. CL.
DE SERIEBUS VARIA.
PROPOSITIO I.
PROBLEMA.

Seriei fractionum, quarum numeratores & denominatores arithmetice ſint progreſſionales, invenire terminum infiniteſimum.

Sit Series $\frac{a}{c}$, $\frac{a+b}{c+e}$, $\frac{a+2b}{c+2e}$, $\frac{a+3b}{c+3e}$, ... $\frac{a+mb}{c+me}$, &c. Si itaque pro numero infinito ponatur n, erit terminus infinite-

Digitized by Google

ſimus $=\frac{a+nb}{c+ne}$. Sit ille $=x$. Ergo $cx+nex=a+nb$, & $cx-a=nb-nex$: Dividendo per $b-ex$, erit $n=\frac{cx-a}{b-ex}$. Quia autem numerator hujus fractionis eſt finitus [nam infinitus eſſe non poteſt, alias x deberet eſſe æqualis infinito, ideoque eſſet $b-ex$ negativa quantitas; ergo etiam $\frac{cx-a}{b-ex}$; quod eſt abſurdum,] erit $b-ex=0$, proinde $b=ex$, & $x=b:e$. Hic itaque eſt terminus infiniteſimus. *Q. E. I.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Seriei infinitæ fractionum, quarum numeratores ſint arithmeticè, denominatores geometrice progreſſionales, invenire ſummam.

Sit $a:c$ primus terminus, b communis differentia numeratorum, e ratio in qua creſcunt denominatores; fiet itaque hæc progreſſio $\frac{a}{c}+\frac{a+b}{ce}+\frac{a+2b}{cee}+\frac{a+3b}{ce^3}$, &c. hujus progreſſionis ſumma ita invenitur: Dividantur primo numeratores in ſuas partes, ut fiat $\frac{a}{c}+\frac{a+b}{ce}+\frac{a+b+b}{cee}+\frac{a+b+b+b}{ce^3}$ &c. poteſt autem hæc progreſſio in alias infinitas pure geometricas reſolvi, videlicet in has A, B, C, D, &c.

A, $\frac{a}{c}+\frac{a}{ce}+\frac{a}{cee}+\frac{a}{ce^3}$ &c. ſumma eſt $\frac{ae}{ce-c}$

B .... $\frac{b}{ce}+\frac{b}{cee}+\frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{ce-c}$

C .... $\frac{b}{cee}+\frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{cee-ce}$

D .... $\frac{b}{ce^3}$ &c. ſumma $\frac{b}{ce^3-cee}$

quarum ſummæ, juxta vulgarem regulam, inveniri poſſunt. Summæ autem Serierum B, C, D, &c. à ſerie B incipientium conſti-

conſtituunt aliam Seriem infinitam geometricam [ut ex operatione patet], cujus Seriei ſummæ, ſi addatur ſumma Seriei A, habebitur ſumma ſummarum, ſeu ſumma Seriei propoſitæ: Ergo ſummæ Serierum B, C, D, conſtituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{ce-c} + \frac{b}{cee-ce} + \frac{b}{ce^3-cee}$ &c. cujus ſummæ $\frac{be}{cee-2ce+c}$ addatur ſumma Seriei $A = \frac{ae}{ce-c}$, & habebitur $\frac{aee-ae+be}{cee-2ce+c}$ $=$ ſummæ Seriei propoſitæ. *Q. E. F.*

PROPOSITIO III.

Problema.

Seriei hujus $\frac{a}{b\times(b+c)} + \frac{a}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. *ſummam invenire.*

Hæc Series ex hac $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ reſolvi poteſt hoc modo: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b+c} + \frac{ac}{b\times(b+c)}$; $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+2c} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)}$; $\frac{a}{b+2c} = \frac{a}{b+3c} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$ &c. Ergo $\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ &c. $= \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+3c}$ + &c. $+ \frac{ac}{b\times(b+c)} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$; ideoque $\frac{a}{b} = \frac{ac}{b\times(b+c)} + \frac{ac}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{ac}{(b+2c)\times(b+3c)}$ + &c. & $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b\times(b+c)} + \frac{a}{(b+c)\times(b+2c)} + \frac{a}{(b+2c)\times(b+3c)}$ + &c.

Corollarium I.

Hinc ſi Series propoſita ſit finita, & numerus terminorum $= m$, erit omnium ſumma $= \frac{ma}{bb+mbc}$. Hoc patet ex operatione.

Corol-

Corollarium II.

Si proponatur Series fractionum, cujus numeratores ſint æquales, denominatores vero numeri trigonales $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$, &c. ſumma ſic inveſtigabitur. Ponatur $a = b = c = 1$; habebitur ergo per Prop. hanc, ſumma Seriei $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$ &c. $= 1$. Hæc Series autem eſt ſubdupla illius, quia hujus denominatores ſunt dupli illius: Ergo illius ſumma eſt 2. Summa propoſitæ Seriei finitæ eſt $= \frac{2ma}{bb + mbc} = \frac{2m}{1 + m}$.

Corollarium III.

Sequitur ex his, progreſſionis harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. ſummam eſſe infinitam; nam ob $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ &c. $= 1$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{20} + \text{\&c.} = \frac{1}{4}$$

erit $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} +$ &c. vel, fractionibus ad minimos terminos redactis, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$&c. Quod ſi utriuſque progreſſionis ſumma eſſet finita, ſequeretur totum æquale eſſe ſuæ parti: nam prior incipit a poſterioris termino ſecundo. Ergo ſumma eſt infinita. *Q. E. D.*

Propositio IV.

Theorema.

Seriei $\frac{2b+c}{b^2 \times (b+c)^2} + \frac{2b+3c}{(b+c)^2 \times (b+2c)^2} + \frac{2b+5c}{(b+2c)^2 \times (b+3c)^2} +$ &c. *ſumma* $= \frac{1}{bbc}$.

Demonſ-

Demonſtratio hujus deducitur ut ſupra, ex progreſſione

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{1}{(b+3c)^2} + \&c.$$

COROLLARIUM.

$$\frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \&c. = 4;$$

$$\frac{1}{(4-1)^2} + \frac{2}{(16-1)^2} + \frac{3}{(36-1)^2} + \frac{4}{(64-1)^2} + \frac{5}{(100-1)^2} = \frac{1}{8}$$

PROPOSITIO V.

THEOREMA.

Seriei $\frac{1a}{1\times2} + \frac{2a}{1\times2\times3} + \frac{3a}{1\times2\times3\times4} + \frac{4a}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$ *ſumma eſt* $= a$.

Demonſtratio hujus deſumitur ab hac Serie $\frac{a}{1} + \frac{a}{1\times2} + \frac{a}{1\times2\times3} + \frac{a}{1\times2\times3\times4} + \&c.$ ut in Propoſitione penultima factum.

COROLLARIUM.

Hinc $\frac{1}{1\times2} + \frac{4}{1\times2\times3} + \frac{9}{1\times2\times3\times4} + \&c. = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{1\times2\times3} + \frac{1}{1\times2\times3\times4} + \&c.$

Nam reſolvatur prior hoc modo

$$\frac{1}{1\times2} + \frac{2}{1\times2\times3} + \frac{3}{1\times2\times3\times4} + \&c. = 1 = \frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1\times2\times3} + \frac{3}{1\times2\times3\times4} + \&c. = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\times2}$$

$$\frac{3}{1\times2\times3\times4} + \&c. = \frac{1}{6} = \frac{1}{1\times2\times3}$$

&c. &c.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

Aliarum Serierum ſummam invenire:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+$ &c. $=2$, ſubtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$ &c. $=\frac{4}{3}$. Ergo $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{7}{64}+\frac{15}{256}+$ &c. $=\frac{2}{3}$ ☉. Loco ſubtrahendi addatur hæc Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+$ &c. $=\frac{4}{3}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+$ &c. $=\frac{10}{3}$ ☽. Ubi notandum quod in Serie ☉ inventa, numeratores ſint in ratione dupla aucta unitate; in ☽ vero inventa in eadem ratione ſed diminuta unitate.

$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{3}{2}$: Subtrahatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+$ &c. $=\frac{9}{8}$ prodibit $\frac{2}{9}+\frac{8}{81}+\frac{26}{729}+$ &c. $=\frac{3}{8}$ ☿; ſi vero addatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+$ &c. $=\frac{9}{8}$, proveniet $\frac{2}{1}+\frac{4}{9}+\frac{10}{81}+\frac{28}{729}+$ &c. $=\frac{21}{8}$ ♀; ubi iterum advertitur, quod numeratores in Serie ☿ ſint in ratione tripla aucta binario, in ♀ vero in eadem ratione ſed eodem numero diminuta.

PROPOSITIO VII.

Poteſt inveniri ratio quam habent ſummæ (etiamſi incognitæ) duarum Serierum.

Ex. gr. hoc modo: Series ſequens $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$ &c. æquatur ſuis

partibus.

partibus, videlicet Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ &c. $=2$ & $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+$ &c. $=\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+$ &c. $=\frac{2}{5}$; & $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+$ &c. $=\frac{2}{7}$, & ita conſequenter. Erit ergo $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}$ &c. $=$ Seriei propoſitæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c., ideoque $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ &c., dimidia eſt Seriei propoſitæ. Ex quo rurſum patet Seriem propoſitam eſſe infinitam, nam quia $\frac{1}{1}<\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}<\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}<\frac{1}{6}$ &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. $<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c. Ergo ſi propoſita Series eſſet finita, ſequeretur $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ &c. non eſſe æqualem dimidiæ Seriei propoſitæ. Quod eſt abſurdum.

Eodem modo, ſi proponatur Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+$ &c. $=$ Seriebus $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. $=\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}$ &c. $=\frac{4}{3\times 9}$ & $\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+$ &c. $=\frac{4}{3\times 25}$ &c. Ergo $\frac{4}{3\times 1}+\frac{4}{3\times 9}+\frac{4}{3\times 25}+\frac{4}{3\times 49}$ &c. $=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. ideoque, multiplicando per 3, $\frac{4}{1}+\frac{4}{9}+\frac{4}{25}+\frac{4}{49}+$ &c. $=\frac{3}{1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{9}+\frac{3}{16}+\frac{3}{25}+$ &c. ablatis æqualibus $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. $=\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{36}+$ &c. Ergo ſumma terminorum imparium Seriei propoſitæ eſt ad ſummam terminorum parium ut 3 ad 1.

Si denominatores Seriei propoſitæ eſſent cubi numerorum naturalium; inveniretur ſummam imparium terminorum eſſe ad ſummam parium ut 7 ad 1.

B. 2 *Gene-*

Generaliter : Si denominatores ſint quæcunque poteſtas numerorum naturalium; erit ſumma terminorum imparium ad ſummam parium ut eadem poteſtas diminuta unitate ad unitatem.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Seriei, cujus numeratores ſint in progreſſione geometrica aucta communi quadam quantitate, denominatores vero in quacunque alia majore progreſſione geometrica, ſummam invenire.

Sit primus terminus $\frac{a}{e}$, ratio in qua aſcendunt numeratores & denominatores ſit $\frac{c}{m}$, communis quantitas b; procreabitur itaque hæc Series $\frac{a}{e}+\frac{ac+b}{em}+\frac{acc+bc+b}{emm}+\frac{ac^3+bcc+bc+b}{em^3}$ &c. cujus ſumma invenitur reſolvendo hanc Seriem in alias

$$\frac{a}{e}+\frac{ac}{em}+\frac{acc}{emm}+\frac{ac^3}{em^3}\text{ \&c.}=\frac{am}{em-ec}$$

$$\frac{b}{em}+\frac{bc}{emm}+\frac{bcc}{em^3}\text{ \&c.}=\frac{b}{em-ec}$$

$$\frac{b}{emm}+\frac{bc}{em^3}\text{ \&c.}=\frac{b}{emm-emc}$$

$$\frac{b}{em^3}\text{ \&c.}=\frac{b}{em^3-ecmm}$$

&c. &c.

quarum ſummæ, omiſſa tantiſper prima, conſtituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{em-ec}+\frac{b}{emm-ecm}+\frac{b}{em^3-ecmm}$ &c. quæ eſt æqualis $\frac{bm}{emm-ecm-em-ec}$. Addatur prima $\frac{am}{em-ec}$; provenit $\frac{amm-am+bm}{emm-ecm-em+ec}=$ ſummæ Seriei propoſitæ.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

Summa Seriei $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})})}$ *eſt* $=2$.

Sit ſi poteſt $=2+a$: Ergo eorum quadrata erunt æqualia, id eſt, $4+4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}$: Ergo [ſubtractis utrinque æqualibus] $2+4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}=2+a$. *Quod eſt abſurdum.*

Si nunc dicatur eſſe æqualem $2-a$; erit ergo $4-4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}$ & [ſubtractis utrinque æqualibus] $2-4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}=2-a$, ideoque tranſponendo & dividendo per a, erit $a=3$, & ſupra $2>a$, quæ repugnant; quin potius ſumma Seriei propoſitæ eſt $=2$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Eodem modo demonſtratur $\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6\ \&c.)})})})}=3$, & $\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12\ \&c.)})})})}=4$, & $\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20\ \&c.)})})})}=5$ &c. Et generaliter $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})})})})}$ ſumma ita invenitur. Ponatur ſumma æqualis x: Ergo ipſorum quadrata æquantur $xx=a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a\ \&c.)})})})}$: aufer utrinque æqualia, remanebit $xx-a=\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a\ \&c.)})})})}=x$, proinde $xx=x+a$ & $x=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$.

Hinc ſi ſeries ita proponatur $\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a\ \&c.)})})})}$; ſumma ita invenitur. Ponatur $=x$: ergo $x^3-a=\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a\ \&c.)})})})}=x$; proinde $x^3-x-a=0$ & univerſaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a\ \&c.)})})})}$ pro æquatione habebitur $x^n-x-a=0$.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

Si ſint duæ Series figuratæ immediate ſibi ſubſequentes, & ſit ubique ſumma terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 *ad* r; *erit & ubique ſumma terminorum ſecundæ ad totidem maximo æqualium ut* 1 *ad* r + 1.

Eſt enim per naturam Serierum figuratarum, & per hypotheſin:

$$n\left\{\begin{array}{ll} a\ldots & o \\ \vdots & \vdots \\ b\ldots & f \\ c\ldots & g \\ d\ldots & h \\ e\ldots & i \\ & k \end{array}\right. \quad k+i+h+g+f\ldots+o=\frac{ne}{r}+\frac{(n-1)d}{r}+\frac{(n-2)c}{r}+\frac{(n-3)b}{r}\ldots\ldots+\frac{(n-n+1)a}{r}$$

$$=\text{(connexis homologis)}\ \frac{n.(e+d+c+b\ldots+a)}{r}\ \frac{-1d-2c-3b\ldots\ldots-n(+1)a}{r}=\text{(per naturam}$$

Serierum) $\frac{nk}{r}\ \frac{-i-h-g-f\ldots\ldots-o}{r}$, ideoque $rk+r(i+h+g+f\ldots\ldots+o)=nk-i-h-g-f\ldots\ldots-o$. & reducta æquatione invenitur $nk-rk=(r+1)(i+h+g+f\ldots\ldots+o)$; dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1).k}{r+1}=k+i+h+g+f\ldots\ldots+o$. &c. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Patet hinc cujuſlibet Seriei figuratæ quamlibet ſummam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem conſtantem. Series enim unitatum, quæ eſt prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requiſitam; ſequitur itaque ex Propoſitione ſecundam Seriem eandem proprietatem habere; & ex ſecunda demonſtratur, tertiam; ex tertia, quartam; ex quarta, quintam &c; & ita conſequenter omnes in infinitum uſque. *Q. E. D.*

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

Eſto numerus quilibet n datus, & fractio qualibet aſſumta $\frac{a}{b}$, *ex qua formetur hæc altera* $\frac{b}{(n-1)a+2b}$, *& ex hac formetur eadem lege tertia* $\frac{(n-1)a+2b}{(n-1)b+2(n-1)a+4b}$, *ex tertia quarta, & ſic deinceps, conſiderato ſcilicet ſemper numeratore ut a & denominatore ut b; erit terminus infiniteſimus* $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$.

Cum enim terminus infiniteſimus ſuo proximo termino ſeu ſequenti cenſeatur æqualis, eſto terminus infiniteſimus $\frac{x}{y}$; ergo ſequens ex natura Seriei erit $\frac{y}{(n-1)x+2y}$; adeoque $\frac{x}{y} = \frac{y}{(n-1)x+2y}$; reducatur æquatio & habebitur $y = x + x\sqrt{n}$, unde $\frac{x}{y} = \frac{x}{x+x\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc patet ratio extrahendi commodiſſime radicem quadratam numeri propoſiti n, per approximationem continuam: Incipiatur namque a quacunque fractione $\frac{a}{b}$, & continuetur Series, ſervata lege in Propoſitione exhibita, donec termini ſe mutuo inſequentes ſenſibiliter non differant, vocetur unus ex illis V, erit ergo $V =$ (quam proxime) $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$, unde $\sqrt{n} = \frac{1-V}{V} = (n-1)V+1$.

ALITER.

Ponatur $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, & reliqua fiant ut ante; dabit terminus infiniteſimus hujus Seriei $\frac{a}{b}$, $\frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, &c. immediate radicem quæſitam $\surd n$.

Simili modo extrahitur radix cubica ex numero dato n: ponendo ſcil. $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)abb}{a^3+b^3}$; imo & cujuſcunque poteſtatis p, hoc modo $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab^{p-1}}{a^p+b^p}$.

ADHUC ALITER ET FACILIUS.

Fiat $\frac{a}{b} = \frac{a^{p-1}+nb^{p-1}}{(a+b)a^{p-2}}$; erit ultima fractio radix poteſtatis p ex numero n.

N°. CLI.

METHODUS

Exhibendi ſummas progreſſionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium; imo cujuſvis alterius progreſſionis finitæ conſtantis terminis utcunque complicatis, modo contineant quantitates rationales & integras.

SIt ex. gr. progreſſio quadratorum $1+4+9+16\ldots\ldots+mm$, cujus ſumma quæritur. Hæc ponatur eſſe $am^3+bmm+cm$ (per a, b, c, intelligo coëfficientes incognitos ipſarum m^3, mm, m). Aucto nunc numero terminorum unitate, habebitur, ponendo ubique $m+1$ loco m, in aſſumta quantitate $am^3+bmm+cm$, hæc

$+cm$, hæc altera $\begin{array}{r} am^3+3amm+3am+a \\ +bmm+2bm+b \\ +cm+c \end{array}$

quæ per conſequens æqualis eſſe debet expoſitæ progreſſioni, una cum termino poſt mm ſequenti, qui eſt $mm+2m+1$; ideoque erit æquatio inter quantitatem hanc ex aſſumta generatam & inter ipſam aſſumtam, auctam termino poſt mm ſequenti, $mm+2m+1$. Hinc ſi æquatio ad o redigatur; obſervata terminorum homogeneitate habebitur

$$\left.\begin{array}{r} +3amm+3am+a \\ -1mm+2bm+b \\ -2m+c \\ -1 \end{array}\right\} = 0$$

Singulos ergo terminos æquando o, reperitur $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$; & per conſequens $am^3+bmm+cm$, id eſt $1+4+9+16 \ldots\ldots\ldots + mm$ eſt $= \frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}mm+\frac{1}{6}m = \frac{2m^3+3mm+m}{6} = \frac{2m^3+3mm+m}{1.2.3}$. Sit nunc generaliter potentia numerorum naturalium n, & quæratur ſumma progreſſionis finitæ $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n \ldots\ldots + m^n$. Aſſumatur ergo itidem hæc quantitas [pro quæſita ſumma] $am^{n+1}+bm^n+cm^{n-1}+dm^{n-2}+$ &c. & augeatur unitate numerus terminorum m; unde provenit

$$\begin{array}{llll} am^{n+1}+(n+1)am^n+ & \frac{(n+1).n}{1.2}am^{n-1} & +\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}am^{n-2}, & \&c. \\ \quad + \quad bm^n + & n.bm^{n-1} & + \frac{n.(n-1)}{1.2}bm^{n-2}, & \&c. \\ & + \quad cm^{n-1} + & (n-1)\,cm^{n-2}, & \&c. \\ & & + \quad dm^{n-2}, & \&c. \end{array}$$

$$= a\,m^{n+1} + b\,m^{n} + c\,m^{n-1} + d\,m^{n-2} + \&c.$$
$$+ m^{n} + n\,m^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.}\,m^{n-2}$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1\;2.\;3}\,m^{n-3} + \&c.$$

Æquatione reducta ad o, & obſervata homogeneitate terminorum, oritur

$$\left.\begin{array}{llll} +(n+1).\,am^{n} & + \frac{(n+1).\,n}{1.\,2}\,a\,m^{n-1} & + \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.\,2.\,3}\,am^{n-2} & + \&c. \\ -\,1\,m^{n} & + n\,b\,m^{n-1} & + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\,bm^{n-2} & + \&c. \\ & -\,nm^{n-1} & + (n-1)\,cm^{n-2} & + \&c. \\ & & -\,\frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\,m^{n-2} & + \&c. \end{array}\right\} = \mathrm{o}$$

Singulis itaque terminis cum o æquatis, innoteſcent coëfficientes

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = 1 - \frac{n+1}{1.\,2}\,a.$$
$$c = \frac{n}{1.\,2} - \frac{(n+1).\,n}{1.\,2.\,3}\,a - \frac{n}{1.\,2}\,b$$
$$d = \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3} - \frac{(n+1).n.\,(n-1)}{1.\,2.\,3.\,4}\,a - \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3}\,b - \frac{n-1}{1.\,2}\,c$$
$$e = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,a - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4}\,b,$$
$$- \frac{(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}\,c - \frac{n-2}{1.\,2}\,d,$$

&c.

quibus explicitis, erit

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = \tfrac{1}{2}$$
$$c = \frac{n}{3.\,4}$$
$$d = \mathrm{o}$$

e =

$$e = -\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}$$

$$f = 0$$

$$g = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,6}$$

$$h = 0$$

$$i = -\frac{3n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10}$$

$$k = 0$$

$$l = \frac{5n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,10.\,11.\,6.}$$

$$m = 0$$

&c.

Exemplum.

Quæritur ſumma omnium numerorum integrorum ad decimam poteſtatem elevatorum, quorum radices in millenario continentur; id eſt: quæritur ſumma hujus progreſſionis $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + 5^{10} \ldots\ldots + 1000^{10}$. Hoc in caſu, cum ſit $n = 10$, & $m = 1000$, erunt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = 0$, $e = -1$, $f = 0$, $g = 1$, $h = 0$, $i = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = \frac{5}{66}$, adoque ſumma totius progreſſionis erit $= \ldots$ $= 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500$.

Corollarium.

Si n eſt numerus negativus vel fractio; ſumma acquiret terminos infinitos. Hinc licet numeros irrationales plures ex. gr. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} \ldots + \sqrt{1000}$; per unicam Seriem conſtantem terminis mere rationalibus exprimere; cum alioquin unuſquiſque numerus irrationalis peculiarem poſcat legem.

N°. CLII.

Summatio Seriei $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$ &c.
ſeu $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c.

I.

LEIBNITIUS oſtendit per methodum, quam dedit in *Actis Lipſ.* 1693, p. 180, dato arcu circuli x, fore ſinum y [ſumto radio vel ſinu toto $= 1$] expreſſum per hanc Seriem $y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} +$ &c. Quam eandem Seriem anno ſequenti 1694, p. 438, & 439 *, inveni per aliam methodum univerſalem; Et anno 1722, p. 398, eorund. *Actor.*† adhuc per aliam methodum, & quidem ſine adminiculo Calculi differentialis.

II.

Quod ſi jam detur y, palam eſt, infinitos eſſe valores ipſius x eidem y reſpondentes, ob infinitos infinitarum dimenſionum terminos ipſius x; quot nimirum ſunt radices in hac æquatione dimenſionis infinitæ $x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^7 +$ &c. $- y = 0$. Cujus ſingulæ radices, totidem arcus exhibentes, eidem ſinui y reſpondent.

III.

Sit nunc ſinus y infinite parvus, ſeu $= 0$, erit utique primus arcus x ſinui y æqualis, ſeu etiam $= 0$, ipſaque æquatio, diviſa per x, abibit in hanc $1 - \frac{1}{2.3}xx + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 - \frac{1}{2.3\ldots7}x^6 +$ &c. $= 0$. Liquet autem, præter arcum illum initialem infinite parvum ſeu 0, qui, diviſa æquatione per x, jam eſt ſequeſtra-

* N°. XXI. pag. 127. *Tom. I.* † N°. CXXVII. pag. 533. *Tom. II.*

queſtratus, reliquos omnes eſſe vel ſemicircumferentiam, vel duplam ſemicircumferentiam, vel triplam, vel quadruplam, vel quintuplam, & ita in infinitum; quippe qui arcus ſinguli habent ſinum ſuum $= 0$. Liquet etiam, præter hos arcus nullum alium dari, qui habeat ſuum ſinum $= 0$.

IV.

Nominando itaque ſemicircumferentiam circuli $= c$; continebuntur radices omnes prædictæ æquationis in hac progreſſione, c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$, &c. in infinitum continuata. Ut autem æquatio iſta mutetur in aliam, quæ incipiat a maxima dimenſione litteræ incognitæ; ponamus $x = 1 : z$; adeoque $xx = 1 : zz$, $x^4 = 1 : z^4$ &c. poſitoque exponente infiniteſimo $2n$, prodibit hæc æquatio $1 - \frac{1}{2.3.} \times \frac{1}{zz} + \frac{1}{2.3.4.5} \times \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2.3...7} \times \frac{1}{z^6} \ldots + \frac{1}{2.3.4...2n+1} \times \frac{1}{z^{2n}} = 0$; quæ multiplicata per z^{2n} dat hanc $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} - \frac{1}{2.3\ldots7} z^{2n-6} \ldots \frac{1}{2.3.4...2n+1} = 0$.

V.

Hujus autem æquationis (quæ omnes ſuos terminos habet parium dimenſionum) radix $zz = 1 : xx$, hoc eſt = vel $1 : cc$, vel $1 : 4cc$, vel $1 : 9cc$, vel $1 : 16cc$, vel &c. Adeoque, cum ex natura æquationum algebraïcarum coëficiens ſecundi termini mutato ſigno ſit æqualis ſummæ omnium radicum, erit ſane $\frac{1}{2.3}$ ſeu $\frac{1}{6} = \frac{1}{cc} + \frac{1}{4cc} + \frac{1}{9cc} + \frac{1}{16cc} +$ &c. proinde $\frac{cc}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ &c. Unde patet ſummam Seriei fractionum, quarum numeratores ſunt unitates, denominatores vero quadrata numerorum naturalium

 eſſe

eſſe ſubſextuplum quadrati ſemicircumferentiæ cujus radius = 1; vel (quod eodem recidit) ſubſextuplum quadrati totius circumferentiæ cujus diameter = 1.

V I.

Scholium I.

Atque ita ſatisfactum eſt ardenti deſiderio Fratris mei, qui agnoſcens ſummæ hujus perveſtigationem difficiliorem eſſe quam quis putaverit, ingenue faſſus eſt, omnem ſuam induſtriam fuiſſe eluſam: Si quis *inveniat*, inquit, *nobiſque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret.* Vid. Tractat. *de Seriebus infinitis*. p. 254. Utinam Frater ſuperſtes eſſet!

V I I.

Simili modo inveniri poteſt ſumma Seriei fractionum, cujus, exiſtentibus numeratoribus inter ſe æqualibus, denominatores procedunt ut quadrata, vel cubi, vel biquadrata, vel qualeſcunque potentiæ denominatorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. hoc eſt, ut 1, 4^2, 9^2, 16^2, 25^2 &c. vel ut 1, 4^3, 9^3, 16^3, 25^3, &c. vel in genere ut 1, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m, &c. aut quia ipſi numeri 1, 4, 9, 16, 25 &c. ſunt quadrati numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. poterit inveniri ſumma Seriei fractionum cujus denominatores ſunt quælibet potentiæ pares numerorum naturalium, nempe hujus Seriei fractionum

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \&c.$$

V I I I.

Hujus inveſtigationis fundamentum petitur ex elegantiſſimo Theoremate *Newtoniano*, quod ſine demonſtratione extat in illius *Algebra* p. 251, Edit. Lond. anni 1707: cujus autem demonſtrationem ego inveni: ubi traditur modus quo ex coëfficienti-

Digitized by Google

ficientibus terminorum datæ alicujus æquationis determinantur ſumma non tantum radicum, ſed & ex radicibus ſumma quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum &c.

I X.

Ita ejus regulæ ductu, æquationis noſtræ §. 4 expreſſæ $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} \dots \frac{1}{2.3\dots 2n+1} = 0$, radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, &c. habebunt pro ſumma quadratorum $\left(\frac{1}{c^4} + \frac{1}{4^2 c^4} + \frac{1}{9^2 c^4} + \frac{1}{16^2 c^4} + \&c.\right)$ hanc quantitatem ex primo & ſecundo coëfficiente deductam $\left(\frac{1}{2.3}\right)^2 - \frac{2}{2.3.4.5} = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$. Eſt itaque $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \&c.$ ſeu $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \&c. = \frac{c^4}{90}$.

X.

Sic pariter radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, $\frac{1}{16cc}$ &c. obtinebunt pro ſumma cuborum $\left(\frac{1}{c^6} + \frac{1}{4^3 c^6} + \frac{1}{9^3 c^6} + \frac{1}{16^3 c^6} + \&c.\right)$ hanc quantitatem ex primo, ſecundo & tertio coëfficiente, ſeu ex coëfficientibus termini ſecundi, tertii & quarti eliciam $\left(\frac{1}{2.3}\right) \times \frac{1}{90} - \left(\frac{1}{2.3.4.5}\right) \times \left(\frac{1}{2.3}\right) + \frac{3}{2.3\dots 7} = \frac{1}{940}$; Proinde erit $1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \&c.$ ſeu $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{4^6} + \&c. = \frac{c^6}{940}$.

X I.

Ex iſtis eliciemus ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \&c.$

atque ita ſucceſſive progredi licebit ad altiores dimenſiones numerorum naturalium, modo exponentes ſint numeri pares; quomodo vero Series tractandæ ſint, ſi denominatores terminorum ſunt numeri naturales ad dimenſiones impares elevati, ex. gr. ſi hæc ſimpliciſſima proponatur Series $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} +$ &c. cujus utique ſumma eſt finita, nondum conſtat per hanc noſtram methodum. Invitantur Analyſtæ, ut defectui ſuccurrant.

XII.

SCHOLIUM II.

Supponitur cæterum, æquationem noſtram §. 4 inventam $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5.} z^{2n-4} \ldots \frac{1}{2.3.4\ldots 2n+1} = 0$, nullas continere radices impoſſibiles, ſeu imaginarias, nullas quoque admixtas habere (ut in ſolutione Problematum ſubinde accidit) radices peregrinas, præter illas genuinas $\frac{1}{cc}, \frac{1}{4cc}, \frac{1}{9cc}, \frac{1}{16cc}$, &c. Alias vacillaret fundamentum deſumtum ex notiſſima illa proprietate coëfficientium. Neutrum autem hic timendum eſſe, ſatis eſt probabile vel ex ipſa Seriei generatione. Cum præſertim per regulam NEWTONI traditam p. 242, ad noſtram æquationem infinitam probe applicatam, fere omnino pateat nullas in illa contineri radices impoſſibiles.

APPENDIX.

Eſto circuli radius $= 1$, tangens alicujus arcus $= t$, erit arcus cui reſpondet t, hoc eſt $\int \frac{dt}{1+tt} = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +$ &c. Hoc jam invenit LEIBNITIUS. Sed ſine alternatione ſignorum inveni ego hanc ſeriem $\int \frac{dt}{1+tt} = \frac{t}{1.(1+tt)^1} + \frac{2t^3}{1.3.(1+tt)^2} + \frac{2.4.t^5}{1.3.5(1+tt)^3} + \frac{2.4.6.t^7}{1.3.5.7.(1+tt)^4} +$ &c.

Poſito

Poſito ſinu $= x$, erit, ut dudum conſtat, arcus $= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.}x^7 +$ &c. Sed ſine ſucceſſione ſignorum reperi ego hanc ſeriem $\frac{x}{1(1-xx)^{1:2}}, - \frac{x^3}{3(1-xx)^{3:2}}, + \frac{x^5}{5(1-xx)^{5:2}} - \frac{x^7}{7(1-xx)^{7.2}} +$ &c. $= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \int \frac{dx}{(1-xx)^{1:2}}$. Hinc itaque $\int \left(\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right) = \int \frac{x\,dx}{1-xx} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{(1-xx)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{x^5 dx}{(1-xx)^3} - \frac{1}{7}\int \frac{x^7 dx}{(1-xx)^4} +$ &c.

Ex ſerie ſecunda fit $\int \left(\frac{dt}{1+tt} \int \frac{dt}{1+tt}\right) = \int \frac{t\,dt}{1.(1+tt)^2} + \frac{2}{1.3} \int \frac{t^3 dt}{(1+tt)^3} + \frac{2.4}{1.3.5} \int \frac{t^5 dt}{(1+tt)^4} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.} \int \frac{t^7 dt}{(1+tt)^5} +$ &c. cujus ſinguli termini ſunt integrabiles. Si vero, poſt integrationem peractam & more ſolito rectificatam, ponatur $t = \infty$; prodibit iſta Series $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} +$ &c. cujus adeo ſumma (poſita ſemicircumferentia $= c$) erit $= \frac{1}{8}cc$.

N°. CLIII.

PROBLEMA.

Maximum terminum binomii ad quamcunque dimenſionem elevati invenire.

SIT $a + b$ binomium, & c numerus dimenſionis; erit $(a+b)^c = a^c + \frac{c}{1}a^{c-1}b + \frac{c.(c-1)}{1.2.}a^{c-2}bb + \frac{c.(c-1).(c-2)}{1.2.3.}a^{c-3}b^3$; Quæritur maximus hujus Seriei terminus?

Hic ibi erit, ubi duo ſubſequentes ſunt æquales. Sit igitur numerus quotus termini quæſiti $= x$, & quia ſubſequens

Generaliter: Si denominatores ſint quæcunque poteſtas numerorum naturalium; erit ſumma terminorum imparium ad ſummam parium ut eadem poteſtas diminuta unitate ad unitatem.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

Seriei, cujus numeratores ſint in progreſſione geometrica auctâ communi quadam quantitate, denominatores vero in quacunque alia majore progreſſione geometrica, ſummam invenire.

Sit primus terminus $\frac{a}{e}$, ratio in qua aſcendunt numeratores & denominatores ſit $\frac{c}{m}$, communis quantitas b; procreabitur itaque hæc Series $\frac{a}{e} + \frac{ac+b}{em} + \frac{acc+bc+b}{emm} + \frac{ac^3+bcc+bc+b}{em^3}$ &c. cujus ſumma invenitur reſolvendo hanc Seriem in alias

$$\frac{a}{e} + \frac{ac}{em} + \frac{acc}{emm} + \frac{ac^3}{em^3} \text{ \&c.} = \frac{am}{em-ec}$$

$$\frac{b}{em} + \frac{bc}{emm} + \frac{bcc}{em^3} \text{ \&c.} = \frac{b}{em-ec}$$

$$\frac{b}{emm} + \frac{bc}{em^3} \text{ \&c.} = \frac{b}{emm-emc}$$

$$\frac{b}{em^3} \text{ \&c.} = \frac{b}{em^3-ecmm}$$

$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

quarum ſummæ, omiſſa tantiſper prima, conſtituunt hanc Seriem geometricam $\frac{b}{em-ec} + \frac{b}{emm-ecm} + \frac{b}{em^3-ecmm}$ &c. quæ eſt æqualis $\frac{bm}{emm-ecm-em-ec}$. Addatur prima $\frac{am}{em-ec}$; provenit $\frac{amm-am+bm}{emm-ecm-em+ec}$ = ſummæ Seriei propoſitæ.

PRO-

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

Summa Seriei $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})})}$ *eſt* $=2$.

Sit ſi poteſt $=2+a$: Ergo eorum quadrata erunt æqualia, id eſt, $4+4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}$: Ergo [ſubtractis utrinque æqualibus] $2+4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}=2+a$. *Quod eſt abſurdum.*

Si nunc dicatur eſſe æqualem $2-a$; erit ergo $4-4a+aa=2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}$ & [ſubtractis utrinque æqualibus] $2-4a+aa=\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2\ \&c.)})})})}=2-a$, ideoque tranſponendo & dividendo per a, erit $a=3$, & ſupra $2>a$, quæ repugnant; quin potius ſumma Seriei propoſitæ eſt $=2$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Eodem modo demonſtratur $\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6\ \&c.)})})})}=3$, & $\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12\ \&c.)})})})}=4$, & $\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20\ \&c.)})})})}=5$ &c. Et generaliter $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})})})})}$ ſumma ita invenitur. Ponatur ſumma æqualis x: Ergo ipſorum quadrata æquantur $xx=a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a\ \&c.)})})})}$: aufer utrinque æqualia, remanebit $xx-a=\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a\ \&c.)})})})}=x$, proinde $xx=x+a$ & $x=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$.

Hinc ſi ſeries ita proponatur $\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a\ \&c.)})})})}$; ſumma ita invenitur. Ponatur $=x$: ergo $x^3-a=\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a+\sqrt[3]{(a\ \&c.)})})})}=x$; proinde $x^3-x-a=0$ & univerſaliter $\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a+\sqrt[n]{(a\ \&c.)})})})}$ pro æquatione habebitur $x^n-x-a=0$.

PROPOSITIO X.

THEOREMA.

Si ſint duæ Series figuratæ immediate ſibi ſubſequentes, & ſit ubique ſumma terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 *ad* r; *erit & ubique ſumma terminorum ſecundæ ad totidem maximo æqualium ut* 1 *ad* r+1.

Eſt enim per naturam Serierum figuratarum, & per hypotheſin:

$$n\left\{\begin{array}{l} a \ldots o \\ \vdots \quad \vdots \\ b \ldots f \\ c \ldots g \\ d \ldots h \\ e \ldots i \\ \quad\;\; k \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} k+i+h+g+f \ldots + o = \frac{ne}{r} + \frac{(n-1)d}{r} \\ + \frac{(n-2)c}{r} + \frac{(n-3)b}{r} \ldots + \frac{(n-n+1)a}{r} \\ = (\text{connexis homologis}) \frac{n.(e+d+c+b \ldots + a)}{r} \\ \frac{-1d-2c-3b \ldots -(n-1)a}{r} = (\text{per naturam} \end{array}$$

Serierum) $\frac{nk}{r}\frac{-i-h-g-f \ldots -o}{r}$, ideoque $rk+r(i+h+g+f \ldots +o) = nk-i-h-g-f \ldots -o$. & reducta æquatione invenitur $nk-rk=(r+1)(i+h+g+f \ldots +o)$; dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1).k}{r+1} = k+i+h+g+f \ldots +o$. &c. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Patet hinc cujuſlibet Seriei figuratæ quamlibet ſummam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem conſtantem. Series enim unitatum, quæ eſt prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requiſitam; ſequitur itaque ex Propoſitione ſecundam Seriem eandem proprietatem habere; & ex ſecunda demonſtratur, tertiam; ex tertia, quartam; ex quarta, quintam &c; & ita conſequenter omnes in infinitum uſque. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

Eſto numerus quilibet n datus, & fractio qualibet aſſumta $\frac{a}{b}$, *ex qua formetur hæc altera* $\frac{b}{(n-1)a+2b}$, *& ex hac formetur eadem lege tertia* $\frac{(n-1)a+2b}{(n-1)b+2(n-1)a+4b}$, *ex tertia quarta, & ſic deinceps, conſiderato ſcilicet ſemper numeratore ut a & denominatore ut b; erit terminus infiniteſimus* $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$.

Cum enim terminus infiniteſimus ſuo proximo termino ſeu ſequenti cenſeatur æqualis, eſto terminus infiniteſimus $\frac{x}{y}$; ergo ſequens ex natura Seriei erit $\frac{y}{(n-1)x+2y}$; adeoque $\frac{x}{y} = \frac{y}{(n-1)x+2y}$; reducatur æquatio & habebitur $y = x + x\sqrt{n}$, unde $\frac{x}{y} = \frac{x}{x+x\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Hinc patet ratio extrahendi commodiſſime radicem quadratam numeri propoſiti *n*, per approximationem continuam: Incipiatur namque a quacunque fractione $\frac{a}{b}$, & continuetur Series, ſervata lege in Propoſitione exhibita, donec termini ſe mutuo inſequentes ſenſibiliter non differant, vocetur unus ex illis *V*, erit ergo $V =$ (quam proxime) $\frac{1}{1+\sqrt{n}} = \frac{-1+\sqrt{n}}{-1+n}$, unde $\sqrt{n} = \frac{1-V}{V} = (n-1)V+1$.

ALITER.

Ponatur $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, & reliqua fiant ut ante; dabit terminus infiniteſimus hujus Seriei $\frac{a}{b}$, $\frac{(n+1)ab}{aa+bb}$, &c. immediate radicem quæſitam $\sqrt{n}$.

Simili modo extrahitur radix cubica ex numero dato n: ponendo ſcil. $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)abb}{a^3+b^3}$; imo & cujuſcunque poteſtatis p, hoc modo $\frac{a}{b} = \frac{(n+1)ab^{p-1}}{a^p+b^p}$.

ADHUC ALITER ET FACILIUS.

Fiat $\frac{a}{b} = \frac{a^{p-1}+nb^{p-1}}{(a+b)a^{p-2}}$; erit ultima fractio radix poteſtatis p ex numero n.

N°. CLI.

METHODUS

Exhibendi ſummas progreſſionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium; imo cujuſvis alterius progreſſionis finitæ conſtantis terminis utcunque complicatis, modo contineant quantitates rationales & integras.

SIt ex. gr. progreſſio quadratorum $1+4+9+16 \ldots\ldots + mm$, cujus ſumma quæritur. Hæc ponatur eſſe $am^3+bmm+cm$ (per a, b, c, intelligo coëfficientes incognitos ipſarum m^3, mm, m). Aucto nunc numero terminorum unitate, habebitur, ponendo ubique $m+1$ loco m, in aſſumta quantitate $am^3+bmm+cm$, hæc

$+cm$, hæc altera
$$\begin{array}{r} am^3+3amm+3am+a \\ +\ bmm+2bm+b \\ +\ cm+c \end{array}$$

quæ per conſequens æqualis eſſe debet expoſitæ progreſſioni, una cum termino poſt mm ſequenti, qui eſt $mm+2m+1$; ideoque erit æquatio inter quantitatem hanc ex aſſumta generatam & inter ipſam aſſumtam, auctam termino poſt mm ſequenti, $mm+2m+1$. Hinc ſi æquatio ad o redigatur; obſervata terminorum homogeneitate habebitur

$$\left.\begin{array}{r} +3amm+3am+a \\ -1mm+2bm+b \\ -2m+c \\ -1 \end{array}\right\} = 0$$

Singulos ergo terminos æquando o, reperitur $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{6}$; & per conſequens $am^3+bmm+cm$, id eſt $1+4+9+16.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +mm$ eſt $=\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}mm+\frac{1}{6}m=\frac{2m^3+3mm+m}{6}=\frac{2m^3+3mm+m}{1.\,2.\,3}$. Sit nunc generaliter potentia numerorum naturalium n, & quæratur ſumma progreſſionis finitæ $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n \ldots\ldots + m^n$. Aſſumatur ergo itidem hæc quantitas [pro quæſita ſumma] $am^{n+1}+bm^n+cm^{n-1}+dm^{n-2}+$ &c. & augeatur unitate numerus terminorum m; unde provenit

$$\begin{array}{l} am^{n+1}+(n+1)am^n+\frac{(n+1).n}{1.2}am^{n-1}+\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3.}am^{n-2}, \text{ \&c.} \\ \qquad +\ bm^n+\ n.bm^{n-1}+\ \frac{n.(n-1)}{1.2}\ bm^{n-2}, \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad +\ cm^{n-1}+\ (n-1)\ cm^{n-2}, \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad\qquad +\ dm^{n-2}, \text{ \&c.} \end{array}$$

Digitized by Google

$$= a m^{n+1} + b m^{n} + c m^{n-1} + d m^{n-2} + \&c.$$
$$+ m^{n} + n m^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.} m^{n-2}$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1\ 2.\ 3} m^{n-3} + \&c.$$

Æquatione reducta ad o, & obſervata homogeneitate terminorum, oritur

$$\left.\begin{array}{llll}
+(n+1).\,a m^{n} + & \frac{(n+1).\,n}{1.\,2}\, a m^{n-1} + & \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.\,2.\,3}\, a m^{n-2} & + \&c. \\
-1\, m^{n} & + n b m^{n-1} + & \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\, b m^{n-2} & + \&c. \\
 & -n m^{n-1} + & (n-1)\, c m^{n-2} & + \&c. \\
 & - & \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\, m^{n-2} & + \&c.
\end{array}\right\} = 0$$

Singulis itaque terminis cum o æquatis, innoteſcent coëfficientes

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = 1 - \frac{n+1}{1.\,2}\, a$$
$$c = \frac{n}{1.\,2} - \frac{(n+1).\,n}{1.\,2.\,3}\, a - \frac{n}{1.\,2}\, b$$
$$d = \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3} - \frac{(n+1).n.\,(n-1)}{1.\,2.\,3.\,4}\, a - \frac{n.(n-1)}{1.\,2.\,3}\, b - \frac{n-1}{1.\,2}\, c$$
$$e = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\, a - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4}\, b,$$
$$- \frac{(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}\, c - \frac{n-2}{1.\,2}\, d,$$

&c.

quibus explicitis, erit

$$a = \frac{1}{n+1}$$
$$b = \tfrac{1}{2}$$
$$c = \frac{n}{3.\,4}$$
$$d = 0$$

e==

$$e = -\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$f = 0$$

$$g = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4.5.6.7.6}$$

$$h = 0$$

$$i = -\frac{3n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$$

$$k = 0$$

$$l = \frac{5n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.6.}$$

$$m = 0$$

&c.

EXEMPLUM.

Quæritur ſumma omnium numerorum integrorum ad decimam poteſtatem elevatorum, quorum radices in millenario continentur; id eſt: quæritur ſumma hujus progreſſionis $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} + 5^{10} \ldots\ldots + 1000^{10}$. Hoc in caſu, cum ſit $n = 10$, & $m = 1000$, erunt $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = 0$, $e = -1$, $f = 0$, $g = 1$, $h = 0$, $i = -\frac{1}{2}$, $k = 0$, $l = \frac{5}{66}$, adoque ſumma totius progreſſionis erit $= \ldots$ $= 91,409,924,241,424,243,424,241,924,242,500$.

COROLLARIUM.

Si n eſt numerus negativus vel fractio; ſumma acquiret terminos infinitos. Hinc licet numeros irrationales plures ex. gr. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} \ldots + \sqrt{1000}$; per unicam Seriem conſtantem terminis mere rationalibus exprimere; cum alioquin unuſquiſque numerus irrationalis peculiarem poſcat legem.

N°. CLII.

Summatio Seriei $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}$ &c.
ſeu $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ &c.

I.

LEIBNITIUS oſtendit per methodum, quam dedit in *Actis Lipſ.* 1693, p. 180, dato arcu circuli x, fore ſinum y [ſumto radio vel ſinu toto $=1$] expreſſum per hanc Seriem $y=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+$ &c. Quam eandem Seriem anno ſequenti 1694, p. 438, & 439 *, inveni per aliam methodum univerſalem; Et anno 1722, p. 398, eorund. *Actor.*† adhuc per aliam methodum, & quidem ſine adminiculo Calculi differentialis.

II.

Quod ſi jam detur y, palam eſt, infinitos eſſe valores ipſius x eidem y reſpondentes, ob infinitos infinitarum dimenſionum terminos ipſius x; quot nimirum ſunt radices in hac æquatione dimenſionis infinitæ $x-\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4.5}x^5-\frac{1}{2.3\ldots7}x^7+$ &c. $-y=0$. Cujus ſingulæ radices, totidem arcus exhibentes, eidem ſinui y reſpondent.

III.

Sit nunc ſinus y infinite parvus, ſeu $=0$, erit utique primus arcus x ſinui y æqualis, ſeu etiam $=0$, ipſaque æquatio, diviſa per x, abibit in hanc $1-\frac{1}{2.3}xx+\frac{1}{2.3.4.5}x^4-\frac{1}{2.3\ldots7}x^6+$ &c. $=0$. Liquet autem, præter arcum illum initialem infinite parvum ſeu 0, qui, diviſa æquatione per x, jam eſt ſequeſtra-

* N°. XXI. pag. 127. *Tom. I.* † N°. CXXVII. pag. 533. *Tom. II.*

queſtratus, reliquos omnes eſſe vel ſemicircumferentiam, vel duplam ſemicircumferentiam, vel triplam, vel quadruplam, vel quintuplam, & ita in infinitum; quippe qui arcus ſinguli habent ſinum ſuum $= 0$. Liquet etiam, præter hos arcus nullum alium dari, qui habeat ſuum ſinum $= 0$.

IV.

Nominando itaque ſemicircumferentiam circuli $= c$; continebuntur radices omnes prædictæ æquationis in hac progreſſione, c, $2c$, $3c$, $4c$, $5c$, &c. in infinitum continuata. Ut autem æquatio iſta mutetur in aliam, quæ incipiat a maxima dimenſione litteræ incognitæ; ponamus $x = 1 : z$; adeoque $xx = 1 : zz$, $x^4 = 1 : z^4$ &c. poſitoque exponente infiniteſimo $2n$, prodibit hæc æquatio $1 - \frac{1}{2.3.} \times \frac{1}{zz} + \frac{1}{2.3.4.5} \times \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2.3...7} \times \frac{1}{z^6} .... + \frac{1}{2.3.4...2n+1} \times \frac{1}{z^{2n}} = 0$; quæ multiplicata per z^{2n} dat hanc $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} - \frac{1}{2.3...7} z^{2n-6} ... \frac{1}{2.3.4...2n+1} = 0$.

V.

Hujus autem æquationis (quæ omnes ſuos terminos habet parium dimenſionum) radix $zz = 1 : xx$, hoc eſt $=$ vel $1 : cc$, vel $1 : 4cc$, vel $1 : 9cc$, vel $1 : 16cc$, vel &c. Adeoque, cum ex natura æquationum algebraïcarum coëficiens ſecundi termini mutato ſigno ſit æqualis ſummæ omnium radicum, erit ſane $\frac{1}{2.3}$ ſeu $\frac{1}{6} = \frac{1}{cc} + \frac{1}{4cc} + \frac{1}{9cc} + \frac{1}{16cc} +$ &c. proinde $\frac{cc}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ &c. $= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ &c.

Unde patet ſummam Seriei fractionum, quarum numeratores ſunt unitates, denominatores vero quadrata numerorum naturalium

eſſe ſubſextuplum quadrati ſemicircumferentiæ cujus radius = 1; vel (quod eodem recidit) ſubſextuplum quadrati totius circumferentiæ cujus diameter = 1.

V I.

S C H O L I U M I.

Atque ita ſatisfactum eſt ardenti deſiderio Fratris mei, qui agnoſcens ſummæ hujus perveſtigationem difficiliorem eſſe quam quis putaverit, ingenue faſſus eſt, omnem ſuam induſtriam fuiſſe eluſam: Si quis *inveniat*, inquit, *nobiſque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret.* Vid. Tractat. *de Seriebus infinitis.* p. 254. Utinam Frater ſuperſtes eſſet!

V I I.

Simili modo inveniri poteſt ſumma Seriei fractionum, cujus, exiſtentibus numeratoribus inter ſe æqualibus, denominatores procedunt ut quadrata, vel cubi, vel biquadrata, vel qualeſcunque potentiæ denominatorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. hoc eſt, ut 1, 4^2, 9^2, 16^2, 25^2 &c. vel ut 1, 4^3, 9^3, 16^3, 25^3, &c. vel in genere ut 1, 4^m, 9^m, 16^m, 25^m, &c. aut quia ipſi numeri 1, 4, 9, 16, 25 &c. ſunt quadrati numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. poterit inveniri ſumma Seriei fractionum cujus denominatores ſunt quælibet potentiæ pares numerorum naturalium, nempe hujus Seriei fractionum.

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \&c.$$

V I I I.

Hujus inveſtigationis fundamentum petitur ex elegantiſſimo Theoremate *Newtoniano*, quod ſine demonſtratione extat in illius *Algebra* p. 251, Edit. Lond. anni 1707: cujus autem demonſtrationem ego inveni: ubi traditur modus quo ex coëfficienti-

ficientibus terminorum datæ alicujus æquationis determinantur ſumma non tantum radicum, ſed & ex radicibus ſumma quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum &c.

IX.

Ita ejus regulæ ductu, æquationis noſtræ §. 4 expreſſæ $z^{2n} - \frac{1}{2.3} z^{2n-2} + \frac{1}{2.3.4.5} z^{2n-4} \ldots \frac{1}{2.3\ldots 2n+1} = 0$, radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, &c. habebunt pro ſumma quadratorum $(\frac{1}{c^4} + \frac{1}{4^2 c^4} + \frac{1}{9^2 c^4} + \frac{1}{16^2 c^4} +$ &c.) hanc quantitatem ex primo & ſecundo coëfficiente deductam $(\frac{1}{2.3})^2 - \frac{2}{2.3.4.5} = \frac{1}{36} - \frac{1}{60} = \frac{1}{90}$. Eſt itaque $1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} +$ &c. ſeu $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} +$ &c. $= \frac{c^4}{90}$.

X.

Sic pariter radices $\frac{1}{cc}$, $\frac{1}{4cc}$, $\frac{1}{9cc}$, $\frac{1}{16cc}$ &c. obtinebunt pro ſumma cuborum $(\frac{1}{c^6} + \frac{1}{4^3 c^6} + \frac{1}{9^3 c^6} + \frac{1}{16^3 c^6} +$ &c.) hanc quantitatem ex primo, ſecundo & tertio coëfficiente, ſeu ex coëfficientibus termini ſecundi, tertii & quarti elicitam $(\frac{1}{2.3}) \times \frac{1}{90} - (\frac{1}{2.3.4.5}) \times (\frac{1}{2.3}) + \frac{3}{2.3\ldots 7} = \frac{1}{940}$; Proinde erit $1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} +$ &c. ſeu $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{2}{4^6} +$ &c. $= \frac{c^6}{940}$.

XI.

Ex iſtis eliciemus ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} +$ &c.

 atque

Poſito ſinu $= x$, erit, ut dudum conſtat, arcus $= x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.}x^7 +$ &c. Sed ſine ſucceſſione ſignorum reperi ego hanc ſeriem $\frac{x}{1(1-xx)^{1:2}}, - \frac{x^3}{3(1-xx)^{3:2}}, + \frac{x^5}{5(1-xx)^{5:2}} - \frac{x^7}{7(1-xx)^{7:2}} +$ &c. $= \int \frac{dx}{\surd(1-xx)} = \int \frac{dx}{(1-xx)^{1:2}}$. Hinc itaque $\int \left(\frac{dx}{\surd(1-xx)} \int \frac{dx}{\surd(1-xx)}\right) = \int \frac{xdx}{1-xx} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{(1-xx)^2} + \frac{1}{5}\int \frac{x^5dx}{(1-xx)^3} - \frac{1}{7}\int \frac{x^7dx}{(1-xx)^4} +$ &c.

Ex ſerie ſecunda fit $\int \left(\frac{dt}{1+tt}\int \frac{dt}{1+tt}\right) = \int \frac{tdt}{1.(1+tt)^2} + \frac{2}{1.3}\int \frac{t^3dt}{(1+tt)^3} + \frac{2.4}{1.3.5}\int \frac{t^5dt}{(1+tt)^4} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.}\int \frac{t^7dt}{(1+tt)^5} +$ &c. cujus ſinguli termini ſunt integrabiles. Si vero, poſt integrationem peractam & more ſolito rectificatam, ponatur $t = \infty$; prodibit iſta Series $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} +$ &c. cujus adeo ſumma (poſita ſemicircumferentia $= c$) erit $= \frac{1}{8}cc$.

N°. CLIII.

PROBLEMA.

Maximum terminum binomii ad quamcunque dimenſionem elevati invenire.

SIT $a+b$ binomium, & c numerus dimenſionis; erit $(a+b)^c = a^c + \frac{c}{1}a^{c-1}b + \frac{c.(c-1)}{1.2.}a^{c-2}bb + \frac{c.(c-1).(c-2)}{1.2.3.}a^{c-3}b^3$; Quæritur maximus hujus Seriei terminus?

Hic ibi erit, ubi duo ſubſequentes ſunt æquales. Sit igitur numerus quotus termini quæſiti $= x$, & quia ſubſequens

 huic

Digitized by Google

huic debet eſſe æqualis, dividatur ſubſequens per antecedentem, & proveniet ex natura Seriei $\frac{c-x+1}{x}\times\frac{b}{a}$; quod erit (ob æquale diviſum per æquale) æquale unitati, id, quod hanc format æqualitatem $\frac{cb-bx+b}{ax}=1$, vel $cb-bx+b=ax$; Ergo $x=\frac{cb+b}{a+b}=$ numero quoto termini maximi quæſiti. *Q. E. I.*

Hinc ſi $\frac{cb+b}{a+b}$ eſt numerus integer, duo erunt termini maximi; nam ſubſequens invento eſt æqualis. Sin autem $\frac{cb+b}{a+b}$ non eſt numerus integer; erunt duo termini ſubſequentes quidem æquales; ſed, ob numerum quotum non integrum, neuter in Serie exiſtet, ideoque unicus erit maximus terminus; nempe ille qui inter utrumque imaginarium includitur: proinde numerus fractus $\frac{cb+b}{a+b}$ ad proximam unitatem augendus eſt, ad habendum verum numerum quoti termini maximi quæſiti.

Exemplum.

Sit $a=2$, $b=6$, $c=7$, erit $\frac{cb+b}{a+b}=6=$ numero integro, quod indicio eſt 6tum & 7mum terminum eſſe maximos, utpote æquales. Si vero $a=3$, $b=4$, $c=5$, erit $\frac{cb+b}{a+b}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}=$ numero non integro; quod denotat quartum terminum, eumque ſolum, eſſe maximum. Sic ſi $a=2$, $b=1$, $c=6$, erit $\frac{cb+b}{a+b}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$; ideoque maximus terminus erit tertius.

PRO-

Problema.

Data progreſſione arithmetica, ab unitate incipiente, & eo modo diſpoſita quo hic vides; invenire Seriem tranſverſalem, cujus ſumma omnium ſit maxima.

1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11
12 13 14 15
16 17 18
19 20
21

Sit numerus terminorum primæ Seriei tranſverſalis $= a$, numerus quotus Seriei quæſitæ $= x$. Ex natura progreſſionis arithmeticæ, primi & ultimi Serierum tranſverſalium, ſic ſe habebunt.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ a$$
$$a+1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2a-1$$
$$2a.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3a-3$$
$$2a-2.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 4a-6$$
$$4a-5.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 5a-10$$
$$\vdots$$
$$ax-a-\frac{xx+3x}{2}\ldots\ldots\ ax-\frac{xx+x}{2}$$

Eſt autem numerus terminorum Seriei quæſitæ $= a - x + 1$; ergo ſumma Seriei quæſitæ erit $= (x^3 - 3axx - 3xx + 2aax + 5ax + 2x - aa - a) : 2$, & poſito $x + 1$ loco x, proveniet ſumma Seriei ſubſequentis $= (x^3 - 3axx + 2aax - ax - x + aa + a) : 2$. Si itaque, ad modum præcedentem, æquatio inſtituatur inter has duas quantitates, invenietur $x = a + \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{3}a + \frac{1}{4})}$. Sic ſi hæc quantitas eſt numerus integer, erunt duæ Series tranſverſales maximæ: Sin minus, quantitas inventa ad proximam unitatem augenda eſt, & unica erit Series tranſverſalis maxima.

N°. CLIV.

DE ALEA, SIVE ARTE CONJECTANDI,

PROBLEMATA QUÆDAM.

PROBLEMA I.

ALiquot Colluſores teſſera ludunt, quorum primus certum numerum jactuum habet; quæritur quot jactus ſecundo, tertio, quarto, quinto adjudicandi ſint ante ludum, ita ut ſors ſingulorum fiat æqualis?

Sit numerus facierum teſſeræ quibus obtinetur $= a$, & numerus facierum quibus perditur $= b$, numerus jactuum primi Colluſoris $= c$, numerus Colluſoris quoti $= n$, & numerus jactuum Colluſoris quoti, una cum jactibus præcedentium $= x$. In uno jactu ſunt a caſus ad obtinendum, & b ad perdendum; ergo ſors unius jactus $= \frac{a}{a+b}$. In primo duorum jactuum ſunt a caſus ad obtinendum, & b ad perveniendum ad ſortem $\frac{a}{a+b}$; ergo ſors duorum jactuum $= \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. In primo trium jactuum ſunt a caſus ad 1, & b ad $\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$; ergo ſors trium jactuum $= \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Eodem modo habetur ſors quatuor jactuum $= \frac{ab^3}{(a+b)^4} + \frac{abb}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$. Et ſors c jactuum $= \frac{ab^{c-1}}{(a+b)^c} + \frac{ab^{c-2}}{(a+b)^{c-1}} \ldots\ldots \frac{a}{a+b} =$ (quia eſt progreſſio geometrica) $1 - b^c : (a+b)^c =$ ſorti primi Colluſoris. Pari ratione erit

erit ſors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; quia autem ſingulorum Colluſorum ſors eadem ponitur, erit $1 - b^x : (a+b)^x = n - nb^c : (a+b)^c$, aut $1 - n + nb^c : (a+b)^c = b^x : (a+b)^x$; ideoque Log. $(1 - n + nb^c : (a+b)^c) = x\,lb - x\,l(a+b)$; ideoque $x = l(1 - n + nb^c : (a+b)^c) : (lb - l(a+b))$, a quo ſi auferatur numerus jactuum præcedentium [qui habetur ponendo $n - 1$ pro n] reſtabit

$$\frac{l(2 - n + (n-1)b^c : (a+b)^c) - l(1 - n + nb^c : (a+b)^c)}{l(a+b) - lb}$$

= numero jactuum quæſito.

A L I T E R.

Quoniam tantundem eſt, & eadem expectatio habetur, ſi unica teſſera aliquot jactus inſtituendi ſint, quam cum totidem teſſeris unicus jactus eſt faciendus; ponatur loco numeri jactuum primi Colluſoris numerus teſſerarum $= c$, & loco numeri jactuum Colluſoris quoti una cum jactibus præcedentium, numerus teſſerarum $= x$. Patet ex Arte combinandi, quod c teſſeræ (ob $a + b$ facies unius teſſeræ) variari poſſint $(a+b)^c$ caſibus, & b^c caſibus quibus nulla facies ipſarum a cadit, id eſt, quibus perditur; ideoque ſunt $(a+b)^c - b^c$ caſus quibus obtinetur: Invenitur ergo ſors Colluſoris primi $= ((a+b)^c - b^c) : (a+b)^c = 1 - b^c : (a+b)^c$, ut ante. Pariter erit ſors x jactuum $= 1 - b^x : (a+b)^x$; reliqua peraguntur ut prius.

PROBLEMA II.

Datis faciebus a + b *unius teſſeræ; quæritur quot vicibus cum unica teſſera, ſeu, quod tantundem eſt, quot teſſeris unica vice aliquis ſuſcipere poſſit ut jaciat unam, duas,* 3, 4, &c. n, *ex faciebus a.*

Eſto numerus teſſerarum $= x$, erunt $(a+b)^x$ caſus quibus x teſſeræ variari poſſunt, b^x caſus quibus nulla facies ipſarum a cadit, $\frac{x}{1} b^{x-1} a^1$ caſus quibus una, $\frac{x.(x-1).}{1.2} b^{x-2} a^2$ caſus quibus duæ, $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3} b^{x-3} a^3$ quibus tres &c. Si itaque unam ex faciebus a jacere debeat; erunt $(a+b)^x - b^x$ caſus quibus lucratur: ſi duas, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a$ caſus: ſi tres, $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ caſus; ſi n facies ſuſcipiantur; erunt $(a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2 \ldots\ldots\ldots - \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots n-1} b^{x-n+1} a^{n+1}$ caſus; ideoque ſi quæratur ſors, erit illa $= \frac{1}{2}$; quod hanc dabit æquationem $-\frac{1}{2} + (a+b)^x - b^x - \frac{x}{1} b^{x-1} a^1 - \frac{x.(x-1)}{1.2} b^{x-2} a^2$ &c. $= 0$. *Q. E. I.*

PROBLEMA III.

Petrus & Paulus, *quorum dexteritates ſint æquales inter ſe, datis globis numero* p & q *certent; jam poſt ludos aliquot peractos deſint* Petro *ludi* f *quominus victor evadat*, Paulo *vero deſint ludi* g. *Quæritur ratio inter ipſorum ſortes?*

Solutio

Solutio ex ſequenti tabella habetur. Eſto $p + q = m$

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{p.(p-1).(p-2)\dots(p-f+1)}{m.(m-1)\dots(m-f+1)}\,1 + & \frac{q.(q-1).(q-2)\dots(q-g+1)}{m.(m-1)\dots(m-g+1)}\,0 \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\dots(p-f+2)}{m.(m-1)\dots(m-f+1)}\,A + & \frac{pq.(q-1).(q-2)\dots(q-g+2)}{m.(m-1)\dots(m-g+1)}\,\alpha \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\dots(p-f+3)}{m.(m-1)\dots(m-f+2)}\,B + & \frac{pq.(q-1).(q-2)\dots(q-g+3)}{m.(m-1)\dots(m-g+2)}\,\beta \\
\frac{pq.(p-1).(p-2)\dots(p-f+4)}{m.(m-1)\dots(m-f+3)}\,C + & \frac{pq.(q-1).(q-2)\dots(q-g+4)}{m.(m-1)\dots(m-g+3)}\,\gamma \\
\vdots & \vdots \\
\frac{pq}{m.(m-1)}\,X & \frac{pq}{m.(m-1)}\,\xi
\end{array}\right\} = \text{Expectationi } \textit{Petri}$$

NB. Intelligo per A, B, C, D &c. expectationes *Petri* cum ipſi deſunt ludi 1, 2, 3, 4 &c. & *Paulo* ludi g; & per $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ &c. expectationes *Petri*, cum ipſi deſunt ludi f, & *Paulo* ludi 1, 2, 3, 4 &c.

PROBLEMA IV.

Petrus *ludit cum* Paulo *teſſeris, hac conditione, ut ſi medium arithmeticum proportionalem jaciat inter maximum & minimum jactum, vel ſi plura puncta jaciat quam iſte medius proportionalis, ille lucretur; ſin minorem jactum faciat, lucretur* Paulus. *Quæritur ratio ſortium?*

SOLUTIO.

Si numerus teſſerarum eſt impar quicunque, liquet ſortes inter ſe eſſe æquales. Si vero ſit par, ſit ille $= 2n$, ita ut numerus caſuum, quibus jactus omnes variare poſſunt, ſit 6^{2n}; inter hos erunt $\frac{(7n-1).(7n-2).(7n-3).\dots.(5n+1)}{1.\,2.\,3.\,4.\dots.(2n-1)}$

G 2 caſus,

caſus, quibus medius arithmeticus inter extremos cadere poteſt; adeoque ſors *Petri* eſt ad ſortem *Pauli* ut $6^{2n} + \frac{(7n-1).(7n-2)\ldots(5n+1)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$ ad $6^{2n} - \frac{(7n-1).(7n-2)\ldots(5n+1)}{1.2.3\ldots(2n-1)}$;

PROBLEMA V.

Duo luſores A & B ludunt una teſſera, hac conditione, ut A tres jactus faciat continuos, numeretque puncta quæ tribus iſtis jactibus jecerit in unam ſummam; B vero tot faciat jactus quot puncta A primo jactu jecerit, omnia jacta puncta pariter collecturus in unum: Qui autem majorem punctorum ſummam habuerit, ille lucrabitur; Quod ſi vero utriuſque punctorum numerus ſit æqualis, tunc depoſitum bipartientur. Quæritur ratio ſortis utriuſque?

R. Sors A eſt ad ſortem B ut 4200563 ad 5877133.

PROBLEMA VI.

Cæteris poſitis ut prius, ſit æqualem uterque habuerint punctorum ſummam, tunc etiam A vincet. Quæritur ſortium ratio?

R. Sors A eſt ad ſortem B ut 282571 ad 347285.

PROBLEMA. VII.

Dato numero Electorum, qui ſit multiplex ternarii, non tamen minor ſenario; Duo autem ex Electoribus A & B ſe declaraverint faventes alicui ex Candidatis C. Quæritur quantam ſpem habeat C, ſeu quænam ſit probabilitas, ut A & B in unam eandemque trium Electorum claſſem per ſortem collocentur.

SOLUTIO.

Sit numerus Electorum $= 6 + 3n$. Dico probabilitatem quæſitam fore $= \frac{1+n}{5+3n}$; Hoc eſt probabilitas ut A & B in eadem claſſe conjungantur, eſt ad probabilitatem eventus contrarii ut $1+n$ ad $4+2n$.

COROL-

COROLLARIUM I.

Si 6 ſint Electores, erit ratio expectationis ad metum ſiniſtri ſucceſſus, ut 1 ad 4.

COROLLARIUM II.

Si numerus Electorum eſſet infinitus, foret illa ratio ut 1 ad 2.

COROLLARIUM III.

Hinc quo major eſt Electorum numerus, eo favorabiliorem expectationem habet *C.* Quod paradoxum eſſe videtur.

N°. CLV.

GEOMETRICA.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

SI per quodvis punctum A *in Triangulo quovis rectilineo* BCD *ex ſingulis angulis ducantur recta ad latera oppoſita; erunt ſolida ex tribus laterum ſegmentis, non contiguis, facta inter ſe aqualia; nempe* CF×DE×BG=DF×CG×BE. TAB. LXXVII. *Fig.* 1.

DEMONSTRATIO.

Producta BF, agantur DH & CI parallelæ ipſis AC & AD. Jam, ob ſimilia Triangula ACI, HDA, ut & AFC, HFD, erit CF:FD=AI:AH=AI:AB[CG:GB]+AB:AH [BE:ED]; id eſt, CF:FD=CG×BE:BG×DE. Ergo CF×BG×DE=DF×CG×BE. *Q. E. D.*

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

Datis in peripheria circuli duobus punctis A *&* B, *invenire tertium quoddam in illa, ut* C, *ita ut ductis* AC, BC *& perpendiculari* BD, *linea* AD *&* BD *ſimul ſumtæ ſint æquales lineis* BC *&* DC *ſimul ſumtis.*

SOLUTIO.

TAB. LXXVII. *Fig.* 2. Ducatur ſubtenſa AB, biſeceturque illa in H, & per punctum H agatur diameter HI, voceturque AH, vel HB $= a$, GH $= c$, radius FG $= b$, HE $= x$; erit AE $= \sqrt{(aa + xx)}$. Nunc, ob ſimilia Triangula AHE & ABD, eſt AE $[\sqrt{(aa+xx)}]$: AH $[a]$ = AB $[2a]$: AD $[2aa : \sqrt{(aa+xx)}]$, & AH $[a]$: HE $[x]$ = AD $[2aa : \sqrt{(aa+xx)}]$: BD $[2ax : \sqrt{(aa+xx)}]$. Quia GE $= c + x$, & IE $= 2b - c - x$, erit rectangulum GEI $= 2bc + 2bx - cc - 2cx - xx =$ rectangulo AEC, proinde $\frac{2bc + 2bx - cc - 2cx - xx}{\sqrt{(aa+xx)}} =$ EC, & $\frac{2bc + 2bx - cc - 2cx - xx}{\sqrt{(aa+xx)}} + \sqrt{(aa+xx)} = \frac{aa + 2bc + 2bx - cc - 2cx}{\sqrt{(aa+xx)}} =$ AC. Ergo AC $-$ AD [DC] $= \frac{-aa + 2bc + 2bx - cc - 2cx}{\sqrt{(aa+xx)}}$; & BD^2 $[\frac{4aaxx}{aa+xx}]$ + DC^2 $[(a^4 + 4bbcc + 4bbxx + c^4 + 4ccxx - 4aabc - 4aabx + 2aacc + 4aacx + 8bbcx - 4bc^3 - 12bccx - 8bcxx + 4c^3x) : (aa+xx)] =$ BC^2. Jam autem quia AD + BD debet eſſe $=$ BC + DC, erit etiam AD + BD $-$ DC $=$ BC, id eſt, $(3aa + 2ax - 2bc - 2bx + cc + 2cx) : \sqrt{(aa+xx)} = \sqrt{(4aaxx + a^4 + 4bbcc + 4bbxx + c^4 + 4ccxx - 4aabc - 4aabx + 2aacc + 4aacx + 8bbcx - 4bc^3 - 12bccx - 8bcxx + 4c^3x)} : \sqrt{(aa+xx)}$.

Abjecto

Digitized by Google

Abjecto communi denominatore, ſumantur numeratorum quadrata, erit,

$$\begin{array}{llll} +4aaxx & -4aabx & +a^4 & \\ +4bb & +4aac & +c^4 & \\ +4cc & +8bbc & +4bbcc & \\ -8bc & -12bcc & -4aabc & \\ & +4c^3 & +2aacc & \\ & & -4bc^3 & \end{array} = \begin{array}{lll} 4aaxx & +12a^3x & +9a^4 \\ +4bb & -12aab & +c^4 \\ +4cc & +12aac & +4bbcc \\ -8ab & -8abc & -12aabc \\ +8ac & +4acc & +6aacc \\ -8bc & +8bbc & -4bc^3 \\ & -12bcc & \\ & +4c^3 & \end{array}$$

Reducta hac æquatione, provenit $xx = \left\{\begin{array}{ll} -3a^2x & -2a^3 \\ +2ab & +2abc \\ -2ac & -acc \\ +2bc & \\ -cc & \end{array}\right\} :(2c-2b).$

Ut autem hæc æquatio paucioribus literis & terminis habeatur, quæratur valor ipſius b, & quidem ſic: IHG rectangulum $=$ AH², id eſt $2bc - cc = aa$, proinde $b = (aa + cc) : 2c$; ſi itaque loco b, ſubſtituatur valor hic inventus, habebitur $xx = ((a^3 - 2aac - acc)x - a^3c) : (cc - aa)$ & $x = (\frac{1}{2}a^3 - aac - \frac{1}{2}acc + \sqrt{(\frac{1}{4}a^6 + \frac{1}{2}a^4cc + \frac{1}{4}aac^4)}) : (cc - aa)$; aut, quia ex poſteriori quantitate radix poteſt extrahi, fit $x = (a^3 - aac) : (cc - aa)$ & $x = (-acc - aac) : (cc - aa)$, vel dividatur numerator & denominator prioris per $a - c$, & poſterioris per $-a - c$, proveniet $x = aa : (-a - c)$ & $x = ac : (a - c)$. Ubi notandum eſt quod prior radix inventa valeat, ſi punctum C quæratur in minori arcu A G B, poſterior autem, ſi idem illud in majori AIB.

CONSTRUCTIO.

Sumatur HK $=$ HG ad utramque partem, & agatur KL parallela ipſi HG, & quidem in priori caſu ſurſum & æqualis ipſi AH, in poſteriori deorſum & æqualis HG; perque puncta L ducantur lineæ AC; deſignabunt hæ lineæ in periphe-

ria Circuli duo puncta C, adeo ut, ductis BC & perpendicularibus BD, ſint $AD + BD = BC + DC$.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. Fig. 3. *In data linea* BF *ad diametrum Circuli* GH *perpendiculari; invenire punctum* F *ita comparatum, ut ducta* FC *tangens Circulum ſit æqualis lineæ* CD *perpendiculari ad eandem diametrum.*

SOLUTIO.

Intelligatur ductam eſſe AC, & CE parallelam diametro GH; voceturque radius circuli $AC = a$, $AB = b$, & $AD = x$, erit $DC = \sqrt{(aa - xx)}$. Quia nunc angulus ACF eſt rectus, ob tangentem CF, & angulus DCE etiam rectus, ob CE parallelam GH; erit, ablato communi ACE, reliquus ACD = reliquo FCE: eſt autem CDA = CEF, utpote uterque rectus; erunt ideo Triangula ADC & CEF ſimilia; proinde $AC[a] : DC[\sqrt{(aa - xx)}] = CF[\sqrt{(aa - xx)}] : CE$ ſeu $DB[(aa - xx) : a] = b + x$; erit reducendo æquationem $xx = -ax - ab + aa$, & $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa - ab)}$.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. Fig. 4. *Si a puncto quodam peripheriæ Circuli, ut* B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcuſque* BF, *quos ſubtendunt, biſecentur in* D, *& a punctis biſectionis agantur lineæ* DE, *parallelæ diametro* BA, *donec occurrant lineis* BF *in* E; *invenire naturam curvæ, quam puncta* E *deſcribunt?*

SOLU-

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & EC perpendicularis ad BA: Sit radius $AB = a$, $BC = x$, & $CE = y$. Quia nunc arcus BF per hypotheſin biſectus eſt in D, erit AD perpendicularis ad BF; proinde Triangula AGB & ACH ſunt ſimilia: eſt autem Triangulum AGB etiam ſimile Triangulo BCE; ergo Triangulum ACH eſt ſimile Triangulo BCE, ideoque EC $[y]$: CB $[x]$ = AC $[a - x]$: CH $[(ax - xx):y]$. Quia vero Triang. ACH & DHE etiam ſunt ſimilia, erit EH : HC = DH : HA & *componendo* EC $[y]$: HC $[(ax - xx):y]$. DA $[a]$: HA $[(aax - axx):yy]$. Nunc iterum CH $[(ax - xx):y]$: HA $[(aax - axx):yy] = 1 : \frac{a}{y}$ = BC $[x]$: BE $[ax:y]$, cujus quadratum BE^2 $[aaxx:yy] = BC^2$ $[xx] + CE^2$ $[yy]$ & $aaxx = xxyy + y^4$, tandemque $y^4 + xxyy - aaxx = 0$.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

Si a puncto quodam peripheriæ Circuli ut B, *infinitæ ducantur lineæ* BF, *arcuſque* BF *quos ſubtendunt biſecentur in* D, *& a punctis biſectionis demittantur lineæ* DC *normales ad diametrum* BA, *quæ lineas* BF *ſecent in* E; *invenire naturam Curvæ quam puncta* E *deſcribunt?* TAB. LXXVII. Fig. 5.

SOLUTIO.

Ducatur AD ex centro A, & DC perpendicularis ad BA (ut prius): Sit radius $AB = a$, $BC = x$, & $CE = y$. Quia nunc arcus BF per hypotheſin biſectus eſt in D, erit AD perpendicularis ad BF, Triangula BCE & AHB ſunt ſimilia; eſt autem Triangulum AHB ſimile Triangulo ACD; Ergo Triangulum BCE eſt ſimile Triangulo ACD, ideo-

que CE [y]: BC [x] = AC [$a - x$]: CD [$(ax - xx):y$] cujus quadratum CD² [$(aaxx - 2ax^3 + x^4):yy$] = rectang. BCG [$2ax - xx$] & $aaxx - 2ax^3 + x^4 = 2axyy - xxyy$. Diviſum utrumque per x, erit $aax - 2axx + x^3 = 2ayy - xyy$; tandemque $x^3 - 2axx + aax + yyx - 2ayy = 0$.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 6.

Data in dato Circulo ABC *ſubtenſa* AC; *invenire in majoris ſegmenti peripheria punctum* B, *ita ut ducta per centrum* D *linea* BDH, *terminata a ſubtenſa* AC, *ſit media proportionalis inter ductas* BA *&* BC.

SOLUTIO.

Sit BD vel DG $= a$, AF vel FC $= b$, DF $= \sqrt{(aa - bb)} = c$, DH $= x$, FH $= \sqrt{(xx - cc)}$. Quia nunc HD : DB = HF : FE, erit FE $= \sqrt{(xx - cc)}\,a : x$ & AE $= (bx - a\sqrt{(xx - cc)}) : x$ & EC $= (bx + a\sqrt{(xx - cc)}) : x$, quia etiam HD : DF = HB : BE, erit BE $= (cx + ac) : x$, eſt autem AE² + EB² = AB², & EC² + BE² = BC²; erit ergo AB $= \sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc - 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$ & BC $= \sqrt{((aax + bbx + ccx + 2acc + 2ab\sqrt{(xx - cc)}) : x)}$. Subſtituatur utrobique valor ipſius $cc = aa - bb$, & habebitur AB $= \sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb - 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$ & BC $= \sqrt{((2aax + 2a^3 - 2abb + 2ab\sqrt{(xx - aa + bb)}) : x)}$. Quoniam itaque debet eſſe AB : BH = BH : BC, erit rectangulum ABC = BH², id eſt $\sqrt{(4a^4xx - 4aabbxx + 8a^5x - 8a^3bbx + 4a^6 - 4a^4bb)} : x = aa + 2ax + xx$. Multiplica utrumque per x, & divide per $x + a$, & invenies $xx + ax = \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$ & $xx = -ax + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)}$; ergo erit $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \sqrt{(4a^4 - 4aabb)})}$.

Idem

Digitized by Google

Idem PROBLEMA *faciliori modo ſolvere.*

Serventur eædem litteræ quæ prius, videlicet $DB = a$, $DF = c$, $DH = x$, & ducatur CG; ideoque erit angulus BCG = recto = BEA & BGC = BAE, quia inſiſtunt eidem ſegmento BC, proinde Triangula ABE & BGC ſimilia ſunt, idcirco AB : BE = BG : BC; hincque rectangulum ABC = EBG; ſed eſt HD : DF = HB : BE, id eſt $x : c = x + a : \frac{ac + cx}{x} = BE$; ideoque rectangulum $EBG = (2aac + 2acx) : x = ABC$. Hoc autem æquale debet eſſe BH^2, erit ergo $(2aac + 2acx) : x = aa + 2ax + xx$; multiplica utrumque per x, & divide per $a + x$, habebis $xx + ax = 2ac$, proinde $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2ac)}$. TAB. LXXVII. Fig. 7.

CONSTRUCTIO.

Producatur diameter OI ad K, ita ut IK ſit = DF, & diametro OK deſcribatur circulus KLO, cujus peripheriæ occurrat recta IL tangens circulum ICO in I, & a medio ipſius DI puncto M applicetur MN = ductæ ML, radioque DN deſcribatur circulus HNH ſecans ſubtenſam AC in punctis H, H; per quæ & per centrum D, ſi ducantur rectæ HDB, deſignabunt in peripheria puncta B quæſita, ut videlicet BH ſit media inter ductas BA, BC.

DEMONSTRATIO.

Quia NM = ML, erit NM^2 [$ND^2 + DM^2 + NDI$] = ML^2 [$MI^2 + IL^2$], & ablatis æqualibus, erit $ND^2 + NDI = IL^2 = KIO$; eſt autem $ND^2 + NDI = IND = BHD$; ergo BHD = KIO, ideoque DH : KI vel FD [BH : BE] = IO : BH; proinde $BH^2 = BE \times IO = EBG = ABC$ [ut in analyſi demonſtratur]; ergo AB : BH = BH : BC. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

TAB. LXXVII. *Fig.* 8. *Quæritur natura curvæ* ABCG, *ut ducta a puncto dato* D *utcunque recta* DBC, *intercepta inter puncta interſectionis* BC *ſit ſemper æqualis conſtanti.*

Sit BC $= 1$, DB $= x$, BE $= y = a + bx + cx^2 + cx^3 + fx^4 + gx^5 + hx^6$ &c. Quoniam igitur DB : DC $=$ BE : CF erit CF $= a{:}x + a$

$$\begin{aligned} &+ b + bx \\ &+ cx + cxx \\ &+ exx + ex^3 \\ &+ fx^3 + fx^4 \\ &+ gx^4 + gx^5 \\ &+ hx^5 + hx^6 \text{ \&c. \&;} \end{aligned}$$

ob identitatem relationis duorum punctorum in curva ad puncta in axe erit etiam CF $= + a$

$$\begin{aligned} &+ b + bx \\ &+ c + 2cx + cxx \\ &+ e + 3ex + 3exx + ex^3 \\ &+ f + 4fx + 6fxx + 4fx^3 + fx^4 \\ &+ g + 5gx + 10gxx + 10gx^3 + 5gx^4 + gx^5 \\ &+ h + 6hx + 15hxx + 20hx^3 + 15hx^4 + 6hx^5 + hx^6. \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Ergo, comparando dimenſiones æquales, invenietur pro coëfficientibus $a = 0$, $c + e + f + g + h = 0$, $c + 3e + 4f + 5g + 6h = 0$, $2e + 6f + 10g + 15h = 0$, $3f + 10g + 20h = 0$, $4g + 15h = 0$, $5h = 0$. Quoniam autem provenit $h = 0$, erunt pariter omnes aliæ litteræ $= 0$, quod indicio eſt, hoc modo Problema non poſſe ſolvi. Ponatur ergo punctum D inter A &

A & G; erit, cæteris poſitis ut prius, ob DB : DC = BE : CF = $a : x - a$

$$\begin{array}{l} +b - bx \\ \quad +cx - cxx \\ \qquad +exx - ex^3 \\ \qquad\quad +fx^3 - fx^4 \\ \qquad\qquad +gx^4 - gx^5 \\ \qquad\qquad\quad +hx^5 - hx^6 \\ \qquad\qquad\qquad \&c. \end{array}$$

=, ob identitatem relationis punctorum in curva,

$$\begin{array}{l} +a \\ +b - bx \\ +c - 2cx + cxx \\ +e - 3ex + 3exx - ex^3 \\ +f - 4fx + 6fxx - 4fx^3 + fx^4 \\ +g - 5gx + 10gxx - 10gx^3 + 5gx^4 - gx^5 \\ +h - 6hx + 15hxx - 20hx^3 + 15hx^4 - 6hx^5 + hx^6 \\ \quad \&c. \end{array}$$

unde comparando dimenſionum æqualium coëfficientes, reperientur $a = 0$, $c + e + f + g + h = 0$, $-3e - 3e - 4f - 5g - 6h = 0$, $+2c + 2e + 6f + 10g + 15h = 0$, $-5f - 10g - 20h = 0$, $+2f + 4g + 15h = 0$, $-7h = 0$, $-2h = 0$; Ex quo concluditur litteras b, c, e, eſſe arbitrarias, ceteræ vero erunt $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$; ideoque ſubſtitutis hiſce valoribus, habebitur æquatio quæſita pro natura curvæ, talis $y = bx + cxx + ex^3 - (2c - 2e)x^4 + (c + e)x^5$. Rurſum inde patet, quod hæc Series continuari poſſit quantum placuerit, ita ut infinita genera curvarum, præter Circulum, e veſtigio exhiberi poſſint, quæ lineas rectas per punctum quoddam datum ductas capiant æquales.

Nota, quod punctum D poſſit etiam, imo nonnunquam debeat eſſe extra A, G, ſed tunc CD + DB ſtatuitur = unitati.

Conferatur Nrus. XXX, pag. 158, *Tom. I.* ubi Solutio hujus Problematis exſtat, ſed ſine Demonſtratione.

DE ANALYSI INFINITORUM VARIA.

****

N°. CLVI.

Modus reſolvendi æquationem $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, *per logarithmos circulares, ſine præcedente ſeparatione indeterminatarum.*

Conferatur N^rus. CXXXVI. *Tom. III*, pag. 108.

Ponatur $\pi\int\frac{(\alpha^2ydx-\alpha^2xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}+l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2)=C.$
Differentietur hæc æquatio ut habeatur

$$\begin{aligned}&+2\alpha\alpha xdx+2\alpha\alpha\beta ydx+2\alpha\alpha\beta xdy+2\alpha\alpha\beta\beta ydy=0\\&+2xdx+2\varepsilon ydx+2\varepsilon xdy+2\varepsilon\varepsilon ydy\\&+(\beta\pi-\varepsilon\pi)\alpha^2ydx+\alpha^2xdy.(-\beta\pi+\varepsilon\pi)\end{aligned}$$

Hujus termini comparentur cum terminis homogeneis æquationis propoſitæ; prodibunt valores litterarum aſſumtarum $\alpha, \beta, \varepsilon, \pi$; Tot enim occurrunt comparationes inſtituendæ, quot ſunt aſſumtæ litteræ. Earum itaque valores, ſubſtituti in æquatione ſuppoſita, formabunt eam convenientem æquationi propoſitæ &c. Supereſt ut oſtendam quantitatem $\pi\int\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$ exprimere arcum circuli; quod ſic facio:

$$\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}=\frac{\frac{(\alpha\alpha ydx-\alpha\alpha xdy)}{(x+\beta y)^2}\times(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha+\left(\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}\right)^2}.$$

Eſt autem numerator hujus fractionis differentiale ipſius $\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}$ multiplicatum per α^2: Quare deſcriptus arcus circuli radio α, cujus tangens $=\frac{x+\varepsilon y}{x+\beta y}$, erit $=\int\frac{(\alpha^2ydx-\alpha^2xdy).(\beta-\varepsilon)}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2}$, qui arcus π vicibus ſumtus, & additus logarithmo $l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+(x+\varepsilon y)^2)$ dabit æquationem integralem propoſitæ canonicæ differentialis primi gradus. $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0.$

SCHO-

N°. CLV.

Fig. 2.

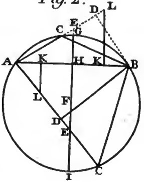


Fig. 3.

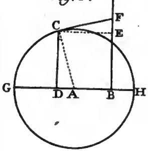


Fig. 5.

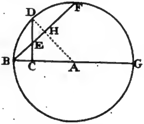
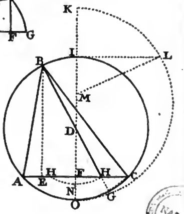


Fig. 8.



Fig. 7.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

S C H O L I O N.

Poteſt, brevitatis gratia, in $(x+\varepsilon y)^2$, negligi x, & poni ſimpliciter $\pi\int\frac{\alpha^2\varepsilon x dy-\alpha^2\varepsilon y dx}{\alpha\alpha(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy}+l(\alpha\alpha(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy)=C.$ Quæ differentiata dat hanc $2\alpha\alpha x dx+2\alpha\alpha\beta y dx+2\alpha\alpha\beta x dy+2\alpha\alpha\beta\beta y dy=0$
$-\pi\alpha^2\varepsilon y dx+\pi\alpha^2\varepsilon x dy+2\varepsilon\varepsilon y dy$, comparandam terminotenus cum $axdx+bydx+cxdy+eydy=0$; faciendo ſcilicet $2\alpha\alpha=a$, $2\alpha\alpha\beta-\pi\alpha^2\varepsilon=b$, $2\alpha\alpha\beta+\pi\alpha^2\varepsilon=c$, $2\alpha\alpha\beta\beta+2\varepsilon\varepsilon=e$. Ex prima habetur $\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}a}$, ex ſecunda & tertia $4\alpha\alpha\beta=b+c$, & $2\pi\alpha^2\varepsilon=c-b$, unde porro fluit $\beta=(b+c):2a$; $2\alpha\alpha\beta\beta=(b+c)^2:4a$, adeoque ex quarta $(b+c)^2:4a+2\varepsilon\varepsilon=e$, hinc $\varepsilon^2=(4ae-(b+c)^2):8a$. Quoniam vero $2\pi\alpha^2\varepsilon=c-b$, inde $\pi=(c-b):2\alpha^2\varepsilon=(2c-2b):\sqrt{(2aae-\tfrac{1}{2}a(b+c)^2)}$. Inveniuntur itaque litterarum aſſumtarum hi quatuor valores $\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}a}$, $\beta=(b+c):2a$, $\varepsilon=\sqrt{((4ae-(b+c)^2):8a)}$, $\pi=(2c-2b):\sqrt{(2aae-\tfrac{1}{2}a(b+c)^2)}$. His ſubſtitutis emergit quæſita æquatio in terminis finitis hæc

$$\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\tfrac{1}{2}a.(b+c)^2)}}\int\frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{(2aae-\tfrac{1}{2}a.(b+c)^2)}.(xdy-ydx)}{\tfrac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2+\frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy}$$
$$+l\tfrac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2+\frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy=C.$$

Eſt enim in aſſumta formula $\frac{\alpha^2\varepsilon x dy-\alpha^2\varepsilon y dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy}$ idem quod $(\frac{\alpha^2\varepsilon x dy-\alpha^2\varepsilon y dx}{(x+\beta y)^2}):(\alpha\alpha+\frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x+\beta y)^2})$ id quod nihil aliud eſt, quam elementum arcus circuli, cujus radius $=\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}a}$, & tangens $=\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}$ $=(y\sqrt{\frac{(4ae-(b+c)^2}{8a}}):(x+\frac{b+c}{2a}y)$. Porro quantitas ſub ſigno logarithmicali rite ordinata abit in hanc $l(\tfrac{1}{2}axx+\frac{(b+c)^2}{2}xy+\tfrac{1}{2}eyy)$; Ergo ſi prædictus arcus dicatur $=A$, erit æquatio finita ſatisfaciens canonicæ hæc $\frac{2c-2b}{\sqrt{(2aae-\frac{1}{2}a.(b+c)^2)}}\times A$ $+l(\tfrac{1}{2}axx+\frac{b+c}{2}xy+\tfrac{1}{2}eyy)=C.$

COROLLARIUM.

Hinc liquet $4ae$ debere eſſe $> (b+c)^2$ ut hæc methodus ſuccedat. Altera vero, quæ per meros logarithmos peragitur requirit contrarium, ut nimirum $4ae$ ſit $< (b+c)^2$: adeoque quodlibet particulare exemplum per alterutram methodum ſolvi poteſt, excepto unico caſu quo $4ae = (b+c)^2$. Hunc autem in ſcripto *Petropolin* miſſo §. 19 *, peculiari modo ſolutum dedi, monſtrans eum lineæ rectæ convenire.

Applicatio ad Exemplum de curva velocitatum in Cycloide. Vid. N^{us}. CLXXXIII, infra.

Æquatio hujus curvæ eſt $sds - gvds + vdv = 0$. Supponendo igitur $x = s$ & $y = v$, erit hic $a = 1$, $b = -g$, $c = 0$, $e = 1$. Quibus ſubſtitutis in æquatione finita generali, prodit $\frac{2g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times A + l(\frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}gsv + \frac{1}{2}vv) = C$, quæ evaneſcente v, dat $\frac{2g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times 0 + 2l\alpha - l2 = C$, quia tangens arcus A etiam evaneſcit, & s evadit $=$ longitudini totius deſcenſus, quam vocavi α, ſicuti longit. aſcenſus $= 6$. Unde vera æquatio correcta hæc eſt $\frac{2g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times A + l(ss - gsv + vv) - 2l\alpha = 0$, quæ evaneſcente v & ipſa tota evaneſcet. Sed exiſtente $s = 0$, tangens arcus A fit $= \frac{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}}{-g}$, ubi notandum etiamſi hic tangens ſit negativa, ideo arcum ipſum non eſſe negativum, ſed potius quadrante majorem, & affirmativum, ſeu complementum ad duos quadrantes ejus qui quadrante minor pro tangente habet $\frac{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}}{+g}$. Vocetur igitur hic arcus quadrante major $= Q + B$. Et erit in caſu $s = 0$, $\frac{2g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q + B) + 2lv - 2l\alpha = 0$,

* N°. CXXXVI, *Tom. III*, pag. 121.

Digitized by Google

$= 0$, unde $lv = l\alpha - \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q + B)$. Haud abſimili ratiocinio concluditur, pro aſcenſu fore $lv = l\beta + \frac{g}{\sqrt{(2 - \frac{1}{2}gg)}} \times (Q - B)$; Qui duo valores conſentire deprehenduntur cum illis, quos per ſeparationem indeterminatarum invenimus *; ſicuti patebit attentione facta ad id quod in uno modo aſſumtus ſit radius $= 1$, in altero vero $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; & quod in uno eſt B, id in altero ſit complementum ad quadrantem.

NOTA. Poterat pro multiplo arcus ſimpliciter poni .... $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$; hic enim pariter habentur quatuor aſſumtæ litteræ $\alpha, \beta, \varepsilon, \pi$, adeoque ſufficientes ad quatuor comparationes inſtituendas. Et ita ſemper invenitur tangens arcus ſimpli, qui aliquoties ſumtus dat $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$. Eſt enim $\frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy} = \left(\frac{\pi x dy - \pi y dx}{(x + \beta y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \beta y)^2}\right)$ $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}\left(\frac{\alpha\alpha\varepsilon x dy - \alpha\alpha\varepsilon y dx}{(x + \beta y)^2}\right) : \left(\alpha\alpha + \frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x + \beta y)^2}\right)$. Eſt vero numerator hujus fractionis differentiale ipſius $\frac{\varepsilon y}{x + \beta y}$ multiplicatum per $\alpha\alpha$, ſumtum $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus. Adeoque $\int \frac{\pi x dy - \pi y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy}$ deſignabit arcum circuli $\frac{\pi}{\alpha\alpha\varepsilon}$ vicibus ſumti, cujus radius $= \alpha$, & tangens $= \frac{\varepsilon y}{x + \beta y}$. Quare, ſi ſtatuatur $\pi \int \frac{x dy - y dx}{\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy} + l(\alpha\alpha.(x + \beta y)^2 + \varepsilon\varepsilon yy) = C$, dabit ea differentiata,

$$\begin{aligned} 2\alpha\alpha x dx + 2\alpha\alpha\beta y dx + 2\alpha\alpha\beta x dy + 2\alpha\alpha\beta^2 y dy &= 0 \\ - \pi y dx \quad + \quad \pi x dy \quad + 2\varepsilon\varepsilon y dy & \end{aligned}$$

comparandam cum propoſita $axdx + bydx + cxdy + eydy = 0$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha = a$, $2\alpha\alpha\beta - \pi = b$, $2\alpha\alpha\beta + \pi = c$, $2\alpha\alpha\beta\beta + 2\varepsilon\varepsilon = e$, & quærendo valores litterarum, invenietur nunc $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}a}$, $\beta = (b + c) : 2a$, $\pi = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; $\varepsilon = \sqrt{(4ae - (b + c)^2)} : \sqrt{8a}$.

* N°. CLXXXIII, infra.

His ergo valoribus ſubſtitutis in formula habetur $\frac{c-b}{2}$

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{1}{2}a\left(x+\frac{b+c}{2a}y\right)^2 + \frac{4ae-(b+c)^2}{8a}yy} + l\left(\tfrac{1}{2}a\left(x+\frac{(b+c)}{2a}y\right)^2\right.$$

$+\frac{4ae-(b+c)^2}{a}yy\Big) = C.$ Reliqua fiunt ut ſupra.

Propoſita jam ſit æquatio canonica ſecundi ordinis, cujus reſolutio pendeat a logarithmis partim, partim a rectificatione arcus circularis, $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=0$.

Hic jam pono hanc integralem ſatisfacere $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy}$ $+\lambda l(x+\mu y)+l((x+\mu y)\times\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy)=C.$ Differentiata enim dat æquationem etiam ſecundi ordinis, & adſunt ſex litteræ aſſumtæ pro totidem comparationibus inſtituendis. Adeoque reſolvetur propoſita.

Propoſita æquatio canonica tertii ordinis poſtulat, ut integralis hoc pacto ponatur: $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy}+\Phi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\gamma\gamma.(x+\sigma y)^2+\theta\theta yy}$ $+l(\alpha\alpha.(x+\beta y)^2+\varepsilon\varepsilon yy)\times(\gamma\gamma.(x+\delta y)^2+\vartheta\theta yy))=C.$ Et ita habentur octo aſſumtæ litteræ pro totidem comparationibus faciendis.

Pro canonica quarti ordinis, addenda eſt ad aſſumtam adhuc $\lambda l(x+\mu y)$. Et ita procedendum in infinitum. Hac methodo poteſt æquatio canonica $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, reſolvi per meros logarithmos, ubi rei natura hoc permittit, ut faciliori forſan modo perveniatur ad æquationem exponentialem, quam edocui in *Commentariis Petropolit.* * In hunc finem ita procedo. Fiat $\pi\int\frac{x\,dy-y\,dx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}+l(\alpha\alpha.(x+\beta y)^2$ $-\varepsilon\varepsilon yy)=C.$ Quod ſi differentietur, habebitur

$$\begin{aligned}2\alpha\alpha x\,dx+2\alpha\alpha\beta y\,dx+2\alpha\alpha\beta x\,dy+2\alpha\alpha\beta^2 y\,dy&=0,\\ -\ \pi y\,dx\ +\ \pi x\,dy\ -\ 2\varepsilon\varepsilon y\,dy&\end{aligned}$$

compa-

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 108.

Digitized by Google

comparanda cum propoſita $axdx+bydx+cxdy+cydy=0$, ubi nulla eſt alia differentia, quam quod hic ſemper habeatur $-\varepsilon\varepsilon$ pro $+\varepsilon\varepsilon$. Faciendo ergo $2\alpha\alpha=a$, $2\alpha\alpha\beta-\pi=b$, $2\alpha\alpha\beta+\pi=c$; nunc vero $2\alpha\alpha\beta\beta-2\varepsilon\varepsilon=e$, & quærendo valores litterarum invenietur $\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}a}$, $\beta=(b+c):2a$, $\pi=\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}b$; ſed $\varepsilon=\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}$. His ergo valoribus ſubſtitutis in formula habetur

$$\frac{c-b}{2}\int\frac{xdy-ydx}{\tfrac{1}{2}a.(x+\frac{b+c}{2a}y)^2-(\frac{(b+c)^2-4ae}{8a})yy}+$$

$$l(\tfrac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2-\frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy)=C.$$ Hinc ergo, & ex præcedentibus, patet formulam noſtram pendere ex logarithmis quotieſcunque $(b+c)^2>4ae$, ſed ex rectificatione arcus circularis quando $(b+c)^2<4ae$. In poſteriori caſu rem jam vidimus; In priori caſu vero res ita peragitur: In aſſumta expreſſione habetur $\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=(\frac{xdy-ydx}{(x+\beta y)^2}):(\alpha\alpha-\frac{\varepsilon\varepsilon yy}{(x+\beta y)^2})$ $=$ [poſito $\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}=z$] $\frac{\frac{1}{\varepsilon}dz}{\alpha\alpha-zz}=\frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon}\times\frac{2\alpha\alpha dz}{\alpha\alpha-zz}=\frac{1}{2\alpha\alpha\varepsilon}$ $(\frac{\alpha dz}{\alpha+z}+\frac{\alpha dz}{\alpha-z})$. Ergo integrando & multiplicando per π, prodibit $\pi\int\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}l\frac{\alpha+z}{\alpha-z}$, & reponendo pro z ejus valorem $\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}$, prodibit $\pi\int\frac{xdy-ydx}{\alpha\alpha.(x+\beta y)^2-\varepsilon\varepsilon yy}=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}$ $l((\alpha+\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}):(\alpha-\frac{\varepsilon y}{x+\beta y}))=\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon}l\frac{\alpha x+\alpha\beta y+\varepsilon y}{\alpha x+\alpha\beta y-\varepsilon y}$. Adeoque ſubſtitutis pro $\alpha,\beta,\varepsilon,\pi$ eorum valoribus, habetur æquatio logarithmica hæc $\frac{c-b}{\sqrt{((b+c)^2-4ae)}}\times$

$$l\frac{x\sqrt{\tfrac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y+y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}}{x\sqrt{\tfrac{1}{2}a}+\frac{b+c}{2\sqrt{2a}}-y\sqrt{((b+c)^2-4ae)}:\sqrt{8a}}+l(\tfrac{1}{2}a(x+\frac{b+c}{2a}y)^2$$

$$-\frac{(b+c)^2-4ae}{8a}yy)=C.$$

Quia autem $\frac{1}{2}a.\ (x + \frac{b+c}{2a}y)^2 - \frac{(b+c)^2 - 4ae}{8a}yy = (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}}) \times (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}})$; poterit æquatio inventa, per $\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}$ prius multiplicata ita exprimi $(c-b)\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}}) - (c-b)\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}}) + \sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}}) + \sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}\,l\,(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}}) = C.$ Habebitur tranſeundo a logarithmis ad numeros, $(x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y + \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}})^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}} \times (x\sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \frac{b+c}{2\sqrt{2a}}y - \frac{y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}}{2\sqrt{2a}})^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}} = C.$ Et omnia ſub parentheſibus multiplicando per $2\sqrt{2a}$; erit $(2ax + (b+c)y + y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)})^{c-b+\sqrt{((b+c)^2-4ae)}} \times (2ax + (b+c)y - y\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)})^{-c+b+\sqrt{((c+b)^2-4ae)}} = C$: vel, brevitatis gratia, ſcribendo m pro $\sqrt{((b+c)^2 - 4ae)}$, prodit tandem hæc æquatio $(2ax + (b+c+m)y)^{c-b+m}$ $(2ax + (b+c-m)y)^{-c+b+m} = C$; eodem prorſus modo ut inveni in priori Schediaſmate edito in *Comment. Petropolitanis* *.

* N°. CXXXV, *Tom. III*, pag. 120.

PROBLE-

N°. CLVII.

PROBLEMA.

Invenire conditiones ſeparabilitatis differentialium in æquationibus hujus formæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$.

SOLUTIO.

Caſ. 1. Si $m = p$, patet ſeparari poſſe dividendo per $a + bu^q$.

Caſ. 2. Fiat $u = z^\alpha$, adeoque $du = \alpha z^{\alpha - 1} dz$; quibus ſubſtitutis prodit $as^m ds + bz^{\alpha q} s^p ds = \alpha z^{\alpha - 1} dz$; ubi ſi ponatur $m = \alpha q + p = \alpha - 1$ [ut nimirum indeterminatæ s & z eundem in omnibus terminis dimenſionis numerum efficiant, adeoque per regulam generalem ſeparabiles evadant] habebitur $m = (p + q) : (1 - q)$.

Caſ. 3. Fiat $u = xy$, adeoque $du = xdy + ydx$; per ſubſtitutionem provenit $as^m ds + bx^q y^q s^p ds = xdy + ydx$. Ponatur $bx^q y^q s^p ds = xdy$, & $as^m ds = ydx$. Ut vero ubique æquationi ſatisfiat, ſit $q = 1$; mutabitur prior in hanc $by s^p ds = dy$, ac proinde $bs^p ds = y^{-1} dy$; datur itaque y per s: ſit ergo $y = S$; quo ſubſtituto in altera $as^m ds = ydx$, oritur $as^m ds = Sdx$, adeoque $\frac{as^m}{S} ds = dx$; dabitur ergo etiam x per S, ſit igitur $x = \Sigma$: unde [exiſtente $q = 1$] erit u [xy] $= S\Sigma$. Hac methodo jam uſus ſum in *Actis Lipſ.* A. 1697, *p.* 115 *, pro ſolutione æquationis ſimilis a Fratre meo mihi propoſiti.

* N°. XXXV, *Tom. I*, pag. 179.

Caſ. 4. Fiat $s=z^{\alpha}$, adeoque $ds=\alpha z^{\alpha-1}dz$; quæ ſubſtituantur, & orietur $\alpha a z^{\alpha m+\alpha-1}dz+\alpha b u^{q} z^{\alpha p+\alpha-1}dz = du$; quare ut indeterminatæ ubique eaſdem dimenſiones obtineant, ponendum eſt $\alpha m+\alpha-1=0=q+\alpha p+\alpha-1$; ex priori habetur $m=(1-\alpha):\alpha$; ex altera vero $q=1-\alpha-\alpha p$; ubi notandum numerum α eſſe arbitrarium. Ex. gr. aſſumta $\alpha=\frac{1}{2}$, erit $m=1$, & $q=(1-p):2$. Hic caſus ex ſecundo etiam deduci poteſt, atque ſi eliminetur α, ad eandem conditionem pervenietur.

Caſ. 5. Dantur etiam caſus, in quibus æquatio propoſita ad algebraicam omnino reduci poteſt. Hoc modo: $as^{m}ds+bu^{q}s^{p}ds=du=\alpha du+(1-\alpha)du$. Ponatur $as^{m}ds=\alpha du$, & $bu^{q}s^{p}ds=(1-\alpha)du$, ſeu $bs^{p}ds=(1-\alpha)u^{-q}du$; per utriuſque integrationem provenit $\frac{a}{m+1}s^{m+1}=\alpha u$, & $\frac{b}{p+1}s^{p+1}=\frac{1-\alpha}{-q+1}u^{-q+1}$; prior dat $u=\frac{a}{\alpha(1+m)}s^{m+1}$, altera vero $u=\left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)}s^{(1+p):(1-q)}$. Ut igitur hi duo valores ipſius u identificentur, coæquandæ ſunt tam dimenſiones, quam coëfficientes; h. e. fiat $m+1=(1+p):(1-q)$ & $a:\alpha(1+m)=\left(\frac{b(1-q)}{(1-\alpha)(1+p)}\right)^{1:(1-q)}$; unde primo habetur $m=(p+q):(1-q)$; quæ eſt eadem conditio jam *Caſ.* 2, & 4, inventa pro ſeparabilitate tantum. Secundo erit $\left(\frac{a}{\alpha.(1+m)}\right)^{1-q}=\frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$, vel ſubſtituto valore ipſius $1+m$, $\left(\frac{a.(1-q)}{\alpha.(1+p)}\right)^{1-q}=\frac{b.(1-q)}{(1-\alpha).(1+p)}$, hoc eſt $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q}\times\left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{1-q}=\frac{b}{1-\alpha}\times\frac{1-q}{1+p}$, adeoque $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1-q}\times\left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q}=\frac{b}{1-\alpha}$; reducta æquatione habetur

$b\alpha$

$b\alpha^{1-q} = (1-\alpha) \times a^{1-q} \times \left(\frac{1-q}{1+p}\right)^{-q} = (1-\alpha) \times a^{1-q}$ $\times (1-q)^{-q} \times (1+p)^q$. Cujus radix α determinat quæſitum.

Ex quo patet æquationem $as^m ds + bu^q s^p ds = du$ [quando nempe $m = (p+q):(1-q)$,] non tantum ad ſeparabilitatem differentialium reduci, ſed omnino algebraice exprimi poſſe, ei quippe reſpondet hæc $\frac{a}{\alpha.(1+m)} s^{1+m} = u$; adeo ut curva, cujus natura per dictam æquationem differentialem determinatur, eſſe poſſit ex Parabolarum genere.

ALITER ET FACILIUS.

Ponatur æquationem propoſitæ reſpondentem eſſe $\pi s^{\mathfrak{G}} = u$, erit $\mathfrak{G}\pi s^{\mathfrak{G}-1} ds = du$. Subſtituendo in propoſita loco u^q & du ipſarum valores, mutabitur in hanc $as^m ds + b\pi^q s^{\mathfrak{G}q+p} ds = \mathfrak{G}\pi s^{\mathfrak{G}-1} ds$, h. e. $as^m + b\pi^q s^{\mathfrak{G}q+p} = \mathfrak{G}\pi s^{\mathfrak{G}-1}$; quæ ut fiant perfecte æqualia, faciendum eſt $m = \mathfrak{G}q + p = \mathfrak{G} - 1$, & $a + b\pi^q = \mathfrak{G}\pi$; ex priori venit $m = (p+q):(1-q)$ & $\mathfrak{G} = (1+p):(1-q)$, ut ante; altera vero $b\pi^q - \mathfrak{G}\pi + a = 0$, dat $b\pi^q + \frac{-1-p}{1-q}\pi + a = 0$, cujus radix π erit parameter Parabolæ quæſitæ: adeoque in caſu quo $m = (p+q):(1-q)$, æquationi propoſitæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$ ſatisfacit hæc algebraïca $\pi s^{(1+p):(1-q)} = u$.

N°. CLVIII.

FORMULÆ REDUCTIONUM.

Videantur N^ti. CXIV & CXV, *Tom. II*, pag. 402.

I. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} = \int \frac{1}{(e+fx^q)^n} \times dx = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{fx^q\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}}\,dx - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}} =$ $\frac{x}{(e+fx^q)^n} + nq \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - nq \int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$: Unde nqe $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \frac{x}{(e+fx^q)^n} + (nq-1) \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

Coroll. I. Exiſtente $nq = 1$, erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ abſolute integrabile, utpote cujus integrale $= \frac{1}{e} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n}$.

Coroll. II. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$, & per eandem rationem $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n-1}}$, & ita porro; uſquedum, ſuppoſito n numero integro & affirmativo, perveniatur ad $\int \frac{dx}{e+fx^q}$; a quo per conſequens dependet $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ niſi fortaſſis $(n-1).\ q = 1$; quo caſu eſſet hoc abſolute integrabile, ut & quicquid ab hoc dependet, nempe $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+m}}$.

II. $\int \frac{e\,dx}{e+fx^q} = \int \frac{e+fx^q}{e+fx^q}\,dx - \int \frac{fx^q dx}{e+fx^q} = x - \int \frac{fx^q\,dx}{e+fx^q}$;

adeo

adeoque $f\int \frac{x^q dx}{e+fx^q} = x - e\int \frac{dx}{e+fx^q}$; hinc ergo $\int \frac{x^q dx}{e+fx^q}$ dependet a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

III. $\int \frac{e dx}{(e+fx^q)^2} = \int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^2} dx - \int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^2} =$ $\int \frac{dx}{e+fx^q} - \int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^2}$; unde $f\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2} = \int \frac{dx}{e+fx^q} -$ $e\int \frac{dx}{(e+fx^q)^2}$; $=$ [per primam] $\frac{1}{q}\int \frac{dx}{e+fx^q} - \frac{1}{q} \times \frac{x}{e+fx^q}$; adeoque $fq\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2} = \frac{-x}{e+fx^q} + \int \frac{dx}{e+fx^q}$. Hinc igitur $\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^2}$ dependet a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

IV. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} = \frac{1}{e}\int \frac{e+fx^q}{(e+fx^q)^{n+1}} dx - \frac{1}{e}\int \frac{fx^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{f}{e}\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$. Itaque $\frac{f}{e}\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}} =$ [per primam] $\frac{1}{e}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{1}{nqe} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n} - \frac{nq-1}{nqe} \times \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} =$ $\frac{1}{nqe}\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{1}{nqe} \times \frac{x}{(e+fx^q)^n}$; adeoque $nfq \times \int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{x}{(e+fx^q)^n}$. Hinc ergo $\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$.

 V. Quia

V. Quia $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} = \int \frac{ex^q + fx^{2q}}{(e+fx^q)^n}dx = e\int \frac{x_q\,dx}{(e+fx^q)^n}$ $+ f\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; patet $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n}$, hoc eſt per præced. a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$ dependere.

VI. Eodem modo demonſtratur $\int \frac{x^{3q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ & [ſumto p pro numero integro & affirmativo] generaliter $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ dependere a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod eſt THEOR. V *.

VII. Quia, per Coroll. I, Prop. I, exiſtente $nq = 1$; erit $\frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ abſolute integrabile, & quia per ipſam Prop. I, $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$ dependet a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$, atque $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+3}}$ a $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{n+2}}$, & ita deinceps, ſequitur [aſſumto k pro quolibet numero integro affirmativo, excepta cyphra] fore $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}}$ abſolute quadrabilem. Quod eſt THEOR. I. †.

VIII. Quia etiam, per Propoſitionem IV, $nfq\int \frac{x^q dx}{(e+fx^q)^{n+1}}$ $= \int \frac{dx}{(e+fx^q)^n} - \frac{x}{(e+fx^q)^n}$, exiſtente vero $nq - q = 1$; per Coroll. II, eſt $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^n}$ abſolute quadrabilis; erit per-

con-

* N°. CXIV, *Tom. II*, pag. 418. † Ibid. pag. 417.

conſequens etiam $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{(2q+1):q}}$ abſolute quadrabilis.

IX. Quia $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n} = \frac{1}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{n-1}} - \frac{e}{f}\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^n}$, per V; hæ vero partes ſimul non poſſunt eſſe quadrabiles; ſequitur $\int \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ non eſſe quadrabilem. Idem etiam valet de $\int \frac{x^{3q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, $\int \frac{x^{4q}\,dx}{(e+fx^q)^n}$, & in genere de $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; quamvis interim ſingulæ dependeant a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$.

X. $\int \frac{dx}{(e+fx^q)^{1:q+k}} = \int \frac{(e+fx^q)\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; quia itaque, per VII, totum eſt quadrabile, & per eandem etiam pars $\int \frac{e\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$; erit quoque reliquum $ff \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}}$ quadrabile.

XI. Pariter $\int \frac{x^q\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+1}} = \int \frac{(ex^q+fx^{2q})\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$. Ergo quia, per præced. totum eſt quadrabile; ut & ablatum; erit etiam quadrabile reliquum $ff \frac{x^{2q}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+2}}$.

XII. Per proceſſus continuationem probabitur generaliter, quadrabilem eſſe hanc Formulam $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}}$. Quod eſt Theor. II. *

N 2 XIII.

* Ibid. pag. 417.

XIII. Quia itaque $\int \frac{x^{pq}\,dx}{(e+fx^q)^{1:q+k+p}}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per $x^{1+kq+pq}$] $\int \frac{x^{-kq-1}\,dx}{(e\,x^{-q}+f)^{1:q+k+p}}$; Ergo nominando e per f, f per e, $-q$ per $+q$, erit $\int \frac{x^{kq-1}\,dx}{(e+fx^q)^{-1:q+k+p}}$ quadrabilis. Quod eſt Theor. III. & IV. *

XIV. Porro quia $\int \frac{x^{pq}dx}{(e+fx^q)^n}$ = [dividendo numeratorem & denominatorem per x^{qn}] $\int \frac{x^{pq-nq}dx}{(ex^{-q}+f)^n}$; ergo etiam nominando e per f, & f per e, & $-q$ per $+q$, prodibit $\int \frac{x^{nq-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$; vel, vocando $n-p$ per $-p$, provenit $\int \frac{x^{-pq}\,dx}{(e+fx^q)^n}$ dependens a $\int \frac{dx}{e+fx^q}$. Quod eſt Theor. VI. † Hæc dudum inventa habui.

NB. *Theorema* VII facile reducitur ad *Theor.* V, ponendo tantum $x^{l+1} = z$. Et Theor. VIII eſt tantum Corollarium utriuſque.

Alia Methodus pro reductione Formulæ $dx : \sqrt[n]{(x^n + a)}$ Petropoli *nuper miſſa.*

Ponatur $\sqrt[n]{(x^n+a)} = xz$, unde $x^n + a = x^n z^n$, ſeu $(z^n - 1)\,x^n = a$, vel $x^n = a : (-1 + z^n)$. Hinc nlx =

* Ibid. pag. 417, 418. † Ibid. pag. 418.

$= la - l(-1+z^n)$; differentiando $dx:x = -z^{n-1} dz:(z^n - 1)$. Per ſubſtitutionem aſſumptæ quantitatis xz pro $\sqrt[n]{(x^n+a)}$, provenit $dx:\sqrt[n]{(x^n+a)} = dx:xz$, ubi pro $dx:x$ ſubſtituatur valor inventus $-z^{n-1} dz:(z^n-1)$; emergit $dx:\sqrt{(x^n+a)} = -z^{n-2} dz:(z^n-1)$.

Pro EULERI noſtri, vel Filii mei *Danielis* expreſſione $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ ſic pariter procedo. Pono $\sqrt[n]{(a+bx^n)} = xz$, $a+bx^n = x^n z^n$, $(z^n - b)x^n = a$, $x^n = a:(z^n - b)$, $nlx = la - l(z^n - b)$, $dx:x = -z^{n-1} dz:(z^n - b)$. Per ſubſtitutionem xz pro $\sqrt[n]{(a+bx^n)}$ habetur $dx:\sqrt[n]{(a+bx^n)} = dx:xz = -z^{n-2} dz:(z^n - b)$. Quæ fractio cum ſit rationalis, patet reduci poſſe ad quadraturam Circuli, vel ad Logarithmos; ſed non video dari caſus abſolute quadrabiles.

GENERALIUS.

Sit formula reducenda $dx:\sqrt[n]{(ax^p + bx^n)}$. Pono, ut ante, $ax^p + bx^n = x^n z^n$, $(z^n - b)x^n = ax^p$, $z^n - b = ax^{p-n}$, $l(z^n - b) = la + (p-n)lx$, $nz^{n-1} dz:(z^n - b) = (p-n)dx:x$. Hinc $dx:\sqrt[n]{(ax^p + bx^n)} = dx:xz = \frac{n}{p-n} z^{n-2} dz:(z^n - b)$.

COROLL. Vocetur $p = q + n$, & erit $dx:\sqrt[n]{(ax^{q+n} + bx^n)} = dx: x\sqrt[n]{(ax^q + b)}$; quæ nova eſt formula reducibilis.

No. CLIX.

RESOLUTIO

Binomii $1 \pm x^n$ *in ſuos Factores reales duarum dimenſionum.*

SIT primo n numerus par, adhibito ſigno ſuperiori $+$, a cujus quippe reſolutione etiam reſolutio reliquorum Caſuum dependet. Hunc in finem, formo Tabellam ſequentem, quæ incipit a ſimpliciſſimis & ad magis compoſitos progreditur, unde aliqua progreſſionis Lex eluceſcet.

TAB. I.

1 $1+xx = 1+xx$

2 $1+x^4 = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2})$

3 $1+x^6 = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3})$

4 $1+x^8 = (1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{2})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{2})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{2})})$

5 $1+x^{10} = (1+xx).(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5+\sqrt{5})}).$
$(1+xx+x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})}).(1+xx-x\sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{(5-\sqrt{5})})$

6 $1+x^{12} = (1+xx+x\sqrt{2}).(1+xx-x\sqrt{2}).(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{3})}).(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{3})}).$
$(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{3})})$

7 $1+x^{14} = (1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).$
$(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx)$

NB. Litteræ p, q & r determinantur per tres ſequentes æquationes $pp+qq+rr=7$

$ppqq+pprr+qqrr=14$

$ppqqrr=7$

1+

9 $1+x^{16}=(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2+\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{2})})}).$
$(1+xx+x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).(1+xx-x\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}).$

8 $1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+px).(1+xx-px).(1+xx+qx).(1+xx-qx).(1+xx+rx).(1+xx-rx).(1+xx+sx).(1+xx-sx).$

NB. Litteræ p, q, r & s determinantur per compendium ita:

$$1+x^{18}=(1+x^6).(1-x^6+x^{12})=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+x^4+pxx).(1+x^4+qxx).(1+x^4+rxx)$$

ubi p, q & r ſunt tres radices hujus æquationis $z^3-3z+1=0$, quarum minima eſt Chorda decimæ octavæ partis circumferentiæ, media eſt Chorda $\frac{15}{18}$ circumferentiæ, & maxima negative ſumenda eſt Chorda $\frac{7}{18}$ circumferentiæ. Eſt vero

$$1+x^4+pxx=(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)})$$
$$1+x^4+qxx=(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)})$$
$$1+x^4+rxx=(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)})$$

Adeoque

$$1+x^{18}=(1+xx).(1+xx+x\sqrt{3}).(1+xx-x\sqrt{3}).(1+xx+x\sqrt{(2-p)}).(1+xx-x\sqrt{(2-p)}).(1+xx+x\sqrt{(2-q)}).(1+xx-x\sqrt{(2-q)}).(1+xx+x\sqrt{(2-r)}).(1+xx-x\sqrt{(2-r)}).$$

SCHOLIUM.

Conſtructio hujus Tab. I fundatur in hac altera

TAB. II.

3 $1+x^6=(1+xx).(1-xx+x^4)$
5 $1+x^{10}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8)$
7 $1+x^{14}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12})$
9 $1+x^{18}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16})$
11 $1+x^{22}=(1+xx).(1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{18}+x^{20})$
13 $1+x^{26}=(1+xx).(1-xx+$ &c. .)
&c. &c. = &c. &c.)

Ut autem factores compoſiti $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+$&c. reſolvantur in ſimplices, incipiatur a primo $1-xx+x^4$, qui

Digitized by Google

Collatis terminis homogeneis, emergit $pp+qq+rr=7$; $ppqq+pprr+qqrr=14$, & $ppqqrr=7$. Valores litterarum pp, qq, rr, habentur ſumendo tres radices hujus æquationis $z^3-7zz+14z-7=0$. Obſervando legem progreſſionis, inveniuntur factores ſequentis $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-x^{14}+x^{16}$; adhibitis nempe pp, qq, rr, ss, erit illa $=$

$1+$	$8xx$	$+28x^4$	$+56x^6$	$+70x^8$	$+56x^{10}$	$+28x^{12}$	$+8x^{14}$	$+x^{16}$
	$-pp$	$-6pp$	$-15pp$	$-20pp$	$-15pp$	$-6pp$	$-pp$	
	$-qq$	$-6qq$	$-15qq$	$-20qq$	$-15qq$	$-6qq$	$-qq$	
	$-rr$	$-6rr$	$-15rr$	$-20rr$	$-15rr$	$-6rr$	$-rr$	
	$-ss$	$-6ss$	$-15ss$	$-20ss$	$-15ss$	$-6ss$	$-ss$	
		$+ppqq$	$+4ppqq$	$+6ppqq$	+ &c.	+ &c.		
		$+pprr$	$+4pprr$	$+6pprr$	&c.	&c.		
		$+ppss$	$+4ppss$	$+6ppss$				
		$+qqrr$	$+4qqrr$	$+6qqrr$				
		$+qqss$	$+4qqss$	$+6qqss$				
		$+rrss$	$+4rrss$	$+6rrss$				
			$-ppqqrr$	$-2ppqqrr$				
			$-ppqqss$	$-2ppqqss$				
			$-pprrss$	$-2pprrss$				
			$-qqrrss$	$-2qqrrss$				
				$+ppqqrrss$				

Ex comparatione homogeneorum prodit $pp+qq+rr+ss=9$, $ppqq+pprr+ppss+qqrr+qqss+rrss=27$, $ppqqrr+ppqqss+pprrss+qqrrss=30$, $ppqqrrss=9$. Quare quatuor Radices hujus æquationis $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$, dabunt valores litterarum pp, qq, rr, ss.

Conjectis iſtis Valoribus litterarum pp, qq, rr, &c. pro quolibet caſu in Tabellam; apparebit illa ut ſequitur.

T A B. III.

Pro caſu	Tertio	$1+x^6$	habetur $z-3=0$
	Quinto	$1+x^{10}$	.... $zz-5z+5=0$
	Septimo	$1+x^{14}$	.... $z^3-7zz+14z-7=0$
	Nono	$1+x^{18}$	.... $z^4-9z^3+27zz-30z+9=0$
	Undecim.	$1+x^{22}$	.... $z^5-11z^4+44z^3-77zz+55z-11=0$.

Generaliter vero hos Caſus determinare licet, faciendo ; $1 + x^{4n+2} = (1 + xx).(1 - xx + x^4 - x^6 \ldots\ldots x^{4n})$ tum ponendo $1 - xx + x^4 - x^6 \ldots\ldots x^{4n} = (1 + xx + px).(1 + xx - px).(1 + xx + qx).(1 + xx - qx).(1 + xx + rx).(1 + xx - rx)$. &c. Prodibit obſervata lege progreſſionis, quæ in eo conſiſtit, ut numeri puri præfixi poteſtatibus xx, x^4, x^6 &c. ſint coëfficientes terminorum binomii ad $2n$ elevati, deinde numeri præfixi litteris pp, qq, rr &c. coëfficientes ſint binomii ad $2n - 2$ elevati, poſtea numeri ipſis $ppqq$, $pprr$, &c. coëfficientes binomii ad $2n - 4$ elevati, & ita porro; hæc æquatio

$$(1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots\ldots x^{4n}) =$$

$$1 + \frac{2n}{1}xx + \frac{2n.2n-1}{1.2}x^4 + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8 + \&c.$$

$$\begin{array}{llll}
= P & - \frac{2n-2}{1}P & - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P & - \frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3.}P \\
 & + Q & + \frac{2n-4}{1}Q & + \frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\
 & & + R & - \frac{2n-6}{1}R \\
 & & & + S
\end{array}$$

Intelligo per P ſummam omnium $pp + qq + rr +$ &c. per Q ſummam omnium productorum ex ſingulis binis $ppqq + pprr + qqrr +$ &c. per R ſummam omnium productorum ex ſingulis ternis $ppqqrr +$ &c. per S ſummam omnium ex ſingulis quaternis $ppqqrrss +$ &c. per T ſummam omnium ex ſingulis quinis $ppqqrrsstt +$ &c. Et ita deinceps.

Hinc ponendo $\left.\begin{array}{r}\frac{2n}{1} \\ -P\end{array}\right\} = -1, \left.\begin{array}{l}+\frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q\end{array}\right\} = +1;$

+2n.

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{2n.\,2n-1.\,2n-2}{1.\;2.\;3} \\ -\frac{2n-2.\,2n-3}{1.\;2}P \\ +\frac{2n-4}{1}Q \\ -\qquad R \end{array}\right\} = -1, \left.\begin{array}{l} +\frac{2n.\,2n-1.\,2n-2.\,2n-3}{1.\;2.\;3.\;4} \\ -\frac{2n-2.\,2n-3.\,2n-4}{1.\;2.\;3}P \\ +\frac{2n-4.\,2n-5}{1.\;2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +\qquad S \end{array}\right\} = +1.\&c.$$

Invenientur ſucceſſive ſingula P, Q, R, S, T, &c. poſteriora ex prioribus; erit namque

$P = 2n + 1.$

$Q = (2n-2)P - \frac{2n.\,2n-1}{1.2} + 1,$

$R = (2n-4)Q - \frac{2n-2.\,2n-3}{1.2}P + \frac{2n.\,2n-1.\,2n-2}{1.2.3} + 1,$

$S =$ &c.

Ut nunc determinentur etiam caſus comprehenſi ſub num. 2, 4, 6, &c. Tab. I, ubi exponens poteſtatis xx eſt numerus pariter par, qui in hactenus pertractatis erat impariter par, conſideranda eſt Tabula ſequens.

T A B. I V.

$$\text{Pro caſu}\left\{\begin{array}{ll} \text{Secundo } 1+x^4 = & (1+xx+px).(1+xx-px) \\ \text{Quarto } 1+x^8 = & (1+xx+px).(1+xx-px). \\ & (1+xx+qx).(1+xx-qx) \\ \text{Sexto } 1+x^{12} = & (1+xx+px).(1+xx-px). \\ \vdots & (1+xx+qx).(1+xx-qx). \\ & (1+xx+rx).(1+xx-rx) \\ 2n^{\circ}.\ 1+x^{4n} = & (1+xx+px).(1+xx-px). \\ & (1+xx+qx).(1+xx-qx). \\ & (1+xx+rx).(1+xx-rx). \\ & \&c. \qquad \&c. \end{array}\right.$$

ad-

adhibendo tot litteras p, q, r &c. quot ſunt unitates in n.

Hoc modo acquiritur per actualem multiplicationem, quod ſequitur in Tab. V.

T A B. V.

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 1+x^4 = 1 + 2xx + x^4 \\
 & \qquad\quad -pp \\
4 & 1+x^8 = 1 + 4xx + 6x^4 + 4x^6 + x^8 \\
 & \qquad\quad -pp - 2pp - pp \\
 & \qquad\quad -qq - 2qq - qq \\
 & \qquad\qquad\quad +ppqq \\
6 & 1+x^{12} = 1 + 6xx + 15x^4 + 20x^6 + 15x^8 + 6x^{10} + x^{12} \\
 & \qquad\quad -pp - 4pp - 6pp - 4pp - pp \\
 & \qquad\quad -qq - 4qq - 6qq - 4qq - qq \\
 & \qquad\quad -rr - 4rr - 6rr - 4rr - rr \\
 & \qquad\qquad\quad +ppqq + 2ppqq + ppqq \\
 & \qquad\qquad\quad +pprr + 2pprr + pprr \\
 & \qquad\qquad\quad +qqrr + 2qqrr + qqrr \\
 & \qquad\qquad\qquad -ppqqrr
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
2n & 1+x^{4n} = 1 + \frac{2n}{1}xx + \frac{2n.2n-1}{1.2}x^4 + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}x^6 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{1.2.3.4}x^8 + \&c. \\
 & \qquad -P - \frac{2n-2}{1}P - \frac{2n-2.2n-3}{1.2}P - \frac{2n-2.2n-3.2n-4}{1.2.3}P \\
 & \qquad\qquad + Q + \frac{2n-4}{1}Q + \frac{2n-4.2n-5}{1.2}Q \\
 & \qquad\qquad\qquad - R - \frac{2n-6}{1}R \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad + S
\end{array}
$$

Hic ex comparatione homogeneorum patet, coëfficientes terminorum intermediorum ponendos eſſe $=0$, hoc eſt

$$
\left.\begin{array}{l} 2n \\ -P \end{array}\right\} = 0, \quad \left.\begin{array}{r} \frac{2n.2n-1}{1.2} \\ -\frac{2n-2}{1}P \\ +Q \end{array}\right\} = 0,
$$

$2n$.

$$\left.\begin{matrix}\frac{2n.\overline{2n-1}.\overline{2n-2}}{1.2.3} \\ -\frac{\overline{2n-2}.\overline{2n-3}}{1.2}P \\ +\frac{\overline{2n-4}}{1}Q \\ -R\end{matrix}\right\}=0,\quad \left.\begin{matrix}\frac{2n.\overline{2n-1}.\overline{2n-2}.\overline{2n-3}}{1.2.3.4} \\ -\frac{\overline{2n-2}.\overline{2n-3}.\overline{2n-4}}{1.2.3}P \\ +\frac{\overline{2n-4}.\overline{2n-5}}{1.2}Q \\ -\frac{2n-6}{1}R \\ +S\end{matrix}\right\}=0,\text{\&c.}$$

Hoc pacto inveniuntur P, Q, R, S, T, &c. poſteriora ex prioribus, nempe.

$$P=2n$$

$$Q=(2n-2)P-\frac{2n.\overline{2n-1}}{1.2}$$

$$R=(2n-4)Q-\frac{\overline{2n-2}.\overline{2n-3}}{1.2}P+\frac{2n.\overline{2n-1}.\overline{2n-2}}{1.2.3},$$

$S=$ &c.

Id ſi ad caſus ſpeciales ſucceſſive applicetur, obtinebitur.

TAB. VI.

Pro caſu
- Secundo $1+x^4 \ldots z-2=0.$
- Quarto $1+x^8 \ldots zz-4z+2=0.$
- Sexto $1+x^{12} \ldots z^3-6zz+9z-2=0.$
- Octavo $1+x^{16} \ldots z^4-8z^3+20zz-16z+2=0.$
- Decimo $1+x^{20} \ldots z^5-10z^4+35z^3-50zz+25z-2=0.$

Harum æquationum radices dant ſuas reſpective quantitates pp, qq, rr &c.

Quod nunc attinet ad eaſdem illas formulas, adhibito ſigno negativo $-$, & exiſtente n numero pari, liquet eas reſolvi poſſe ut exhibet Tabula ſequens.

Digitized by Google

TAB. VII.

1 $1 - xx = 1 - xx$ ſeu $(1+x).(1-x)$
2 $1 - x^4 = (1-xx).(1+xx)$
3 $1 - x^6 = (1-xx).(1+xx+x^4)$
4 $1 - x^8 = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6) = (1-xx).(1+xx).(1+x^4)$
5 $1 - x^{10} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8)$
6 $1 - x^{12} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10})$
$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8)$
7 $1 - x^{14} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12})$
8 $1 - x^{16} = (1-xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14})$
$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8+x^{12})$
$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4).(1+x^8)$
9 $1 - x^{18} = (1+xx).(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+x^{14}+x^{16})$
10 $1 - x^{20} = (1-xx).(1+xx+x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{16}+x^{18})$
$= (1-xx).(1+xx).(1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16})$.

Qui caſus omnes, ceu liquet, reſolvuntur per Methodum ad Tab. III. explicatam.

SCHOLIUM.

Poſſunt etiam reſolvi primo in factores duos dimenſionis dimidiæ, & deinde qui gaudet ſigno — & numero dimenſionis pari iterum in duos factores dimenſionis dimidiæ, idque iterum donec ad dimenſionem imparem perveniatur; atque ita tandem res reducta ſit ad reſolutionem binomiorum dimenſionis imparis, quod negotii poſt Exemplum aliquod aggrediemur.

Sit ex. gr. $1 - x^{20}$ reſolvendum: Ponatur $1 - x^{20} = (1+x^{10}).(1-x^{10}) = (1+x^{10}).(1+x^5).(1-x^5)$; Primus iſtorum factorum $1+x^{10}$ reſolutus eſt in ſuperioribus, reliqui duo reſolventur per nunc tradenda.

TAB. VIII.

T A B. VIII.

Continens reſolutionem binomiorum poteſtatum imparium.

1 | $1 \pm x = 1 \pm x.$
2 | $1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx)$
3 | $1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4)$
4 | $1 \pm x^7 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4 \mp x^5 + x^6)$

Hi autem factores reſolvuntur ſimili modo ut ſupra factum poſt Tab. III, vel quod commodius eſt: Fiat $x = yy$, hoc enim modo reducuntur formulæ ad exponentes pares dimenſionum, habebitur nempe

1 | $1 \pm x = 1 \pm x = 1 \pm yy$
2 | $1 \pm x^3 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx) = (1 \pm yy).(1 \mp yy + y^4)$
3 | $1 \pm x^5 = (1 \pm x).(1 \mp x + xx \mp x^3 + x^4) = (1 \pm yy).$
$(1 \mp yy + y^4 \mp y^6 + y^8)$

Ergo &c.

N°. CLX.

INVESTIGATIO & DEMONSTRATIO

THEOREMATIS *COTESIANI.*

INter Opuſcula poſtrema *Rogeri* COTESII apud *Cantabrigienſes* Profeſſoris, collecta & edita ab ejus Succeſſore *Roberto* SMITH, reperitur aliquod Theorema ad Cyclometriam pertinens, quod SMITHIUS expoſuit, ſed ſine demonſtratione, verbis ſequentibus.

„ Si quærantur factores Binomii $a^\lambda \pm x^\lambda$, indice λ exiſtente TAB. LXXVIII.
„ quolibet integro; dividatur circuli circumferentia ABCD, N°. CLX.
„ cujus centrum O, in totidem partes æquales AB, BC, *Fig.* 1 & 2.
„ CD, DE, EF, &c. quot ſint unitates in 2λ, & ab om-

„ nibus

„ nibus diviſionibus ad punctum quodvis P in O A radio, ſi „ opus producto, ſitum, ducantur rectæ AP, BP, CP, DP, „ EP, FP, &c; deinde poſitis OA $= a$, OP $= x$; con- „ tentum ſub omnibus AP, CP, EP, &c. ſumtis a diviſio- „ nibus alternis per integrum circuitum, adæquabit $a^\lambda - x^\lambda$ vel „ $x^\lambda - a^\lambda$, prout P fuerit intra vel extra circulum: & conten- „ tum ſub reliquis BP, DP, FP, &c. in locis reliquis al- „ ternis, adæquabit $a^\lambda + x^\lambda$. Exempli gratia, ſi λ ſit 5; divi- „ datur circumferentia in 10 partes æquales, eritque AP $\times$ „ CP $\times$ EP $\times$ GP $\times$ IP $=$ OA^5 $-$ OP^5, exiſtente P in- „ tra circulum: Et BP $\times$ DP $\times$ FP $\times$ HP $\times$ KP $=$ OA^5 „ $+$ OP^5. Similiter ſi λ ſit 6; diviſa circumferentia in 12 „ partes æquales, erit AP $\times$ CP $\times$ EP $\times$ GP $\times$ IP $\times$ LP „ $=$ OA^6 $-$ OP^6, exiſtente P intra circulum: Et BP $\times$ „ DP $\times$ FP $\times$ HP $\times$ KP $\times$ MP $=$ OA^6 $+$ OP^6.

Hujus Theorematis, haud ſane inelegantis, demonſtrationem ſuppreſſerat COTESIUS, nec eam dederat SMITHIUS. Exhibuit poſtea aliquam PEMBERTONUS, eidem Libro *Coteſiano* * inſertam, ſed tam longam, tam intricatam, ut tædioſum ſit examinare, utrum omnia recte ſe habeant, nulluſque lateat paralogiſmus. Felicioribus vero auſpiciis rem aggreſſus Clariſſimus MOIVREUS, Vir profunde doctus atque in analyticis verſatiſſimus, dedit hujus Theorematis eruendi viam expeditiſſimam, & quidem ad alia hujus generis longiſſime ſe porrigentem, quouſque impar Adverſarius penetrare non poterat. Methodus *Moivreana* petita eſt ex natura Serierum, ut vocat, recurrentium, quæ licet in obſcuriſſimis diſquiſitionibus plerumque magno ſint auxilio, nonnullis tamen iſta operandi methodus non ſatis naturalis eſſe videtur. Quare ſtatim ſuſpicabar perveniri poſſe modo directo, & ſine magno labore, ad veritatem Theorematis *Coteſiani*, ope Seriei univerſalis, quam olim dedi, pro dividendo arcu circulari in partes quotcunque.

* In *Epiſtola ad amicum de* COTESII *inventis*, Lond. 1722. 4°.

Digitized by Google

que æquales. Etenim in *Actis Lipſ.* anni 1701, p. 171. * illa Series conſpicitur, ubi poſitis radio circuli $= 1$, chorda arcus dati $= a$, chorda arcus ſubmultipli $= z$, chorda ejus complementi ad ſemicirculum $= \sqrt{(4 - zz)} = y$, erit [ſupponendo arcum dividendum eſſe in partes numero n] æquatio generalis quæ ſequitur $a = zy^{n-1} - \frac{n-2}{1} zy^{n-3}$

$$+ \frac{n-3.n-4}{1.2} zy^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6.}{1.2.3} zy^{n-7} + \&c.$$

Eſto jam $a = 0$, hoc eſt, ſit vel tota circumferentia, vel dupla circumferentia, vel tripla, vel quadrupla, vel &c. ſecanda in partes numero n; utpote in quibus ſingulis caſibus fit $a = 0$; erit dividendo per z, hæc æquatio

$$0 = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2} y^{n-5} - \frac{n-4.n-5.n-6}{1.2.3} y^{n-7}$$

$$+ \frac{n-5.n-6.n-7.n-8}{1.2.3.4} y^{n-9} - \&c.$$

cujus adeo radices y, ſeu $\sqrt{(4 - zz)}$ determinant non tantum z, ſeu chordam arcus ſubmultipli, ſed etiam chordas hujus arcus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, ſextupli, &c., quia ſinguli hi arcus conſtituunt partes ſimiles circumferentiæ, vel ſimplæ, vel duplæ, vel triplæ, vel quadruplæ, vel quintuplæ, vel ſextuplæ &c. Hoc eſt, ſi æquatio exprimatur per zz ejuſque poteſtates, concipiaturque Polygonum regulare laterum n circulo inſcriptum; deſignabunt radices æquationis quadratum, tum lateris, tum ſingularum diagonalium.

Sit ex. gr. $n = 7$, hoc eſt, ſit Heptagonum circulo inſcriptum, æquatio noſtra univerſalis abit in hanc $0 = y^6 - 5y^4 + 6yy - 1$, & ſubſtituto $4 - zz$ pro yy, prodibit hæc altera $0 = z^6 - 7z^4 + 14zz - 7$, cujus tres radices zz indicabunt quadratum, tum lateris Polygoni, tum utriuſque diagonalium: ſunt enim in Heptagono duo diagonalium reſpective æqualium paria. Vocentur ergo quadratum lateris $= pp$, quadratum diagonalis minoris $= qq$, & quadratum diagonalis majoris $= rr$,

P 3 erit,

* N°. LXIX. pag. 387, *Tom. I.*

erit, ex natura æquationum, $pp + qq + rr = 7$, $ppqq + pprr + qqrr = 14$, & $ppqqrr = 7$. Formetur Tabula ejuſmodi æquationum valores ipſarum z determinantium, pro aſſumtione ſucceſſiva numeri n; quæ ita ſe habebit pro imparibus, & pro paribus.

Pro numeris imparibus formabitur

T A B. I.

$$\text{Aſſumto numero}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}\text{prodibit}\left\{\begin{array}{l} zz - 3 = 0 \\ z^4 - 5zz + 5 = 0 \\ z^6 - 7z^4 + 14zz - 7 = 0 \\ z^8 - 9z^6 + 27z^4 - 30zz + 9 = 0 \\ z^{10} - 11z^8 + 44z^6 - 77z^4 + 55zz - 11 = 0 \end{array}\right.$$

Pro numeris paribus, formabitur hæc altera

T A B. II.

$$\text{Aſſumto numero}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}\text{prodibit}\left\{\begin{array}{l} zz - 2 = 0 \\ z^4 - 4zz + 3 = 0 \\ z^6 - 6z^4 + 10zz - 4 = 0 \\ z^8 - 8z^6 + 21z^4 - 20zz + 5 = 0 \\ z^{10} - 10z^8 + 36z^6 - 56z^4 + 35zz - 6 = 0. \end{array}\right.$$

Ex quibus patet numeros poſtremos [quibus pro ſcopo noſtro opus habemus] ſemper æquales eſſe numeris n quibus reſpondent in imparibus, ſemiſſes vero eſſe numerorum n quibus reſpondent in paribus. Unde concludendum, in quolibet Polygono regulari imparium laterum productum ex quadrato lateris omnibuſque quadratis diagonalium in ſemicirculo contentarum, ſeu, quod tantundem eſt, productum ex omnibus diagonalibus totius Polygoni duobuſque lateribus, eſſe æquale potentiæ, tot vicibus ſumtæ quot ſunt latera, radii circuli Polygono circumſcripti, cujus potentiæ exponens eſt numerus laterum minus unitate. Ita ſi numerus laterum Polygoni ſit quilibet impar $2m + 1$; vocetur que radius circuli Polygono circumſ-

Digitized by Google

cumſcripti $= c$, erit factum illud ex diagonalibus omnibus & duobus lateribus $= (2m + 1) \times c^{2m}$.

Concluditur porro productum illud in Polygonis parium laterum, æquari potentiæ, dimidio tot vicibus ſumtæ quot ſunt latera, radii circuli Polygono circumſcripti, cujus exponens eſt numerus laterum demto binario. Poſito namque numero laterum $2m$, dictoque radio $= c$, erit productum $= m \times c^{2m-2}$.

Sciendum autem hic non computari diametrum pro diagonali, etſi omnium diagonalium ſit maxima; id quod ex eo venit, quia æquatio ſuperior $o = y^{n-1} - \frac{n-2}{1} y^{n-3} + \frac{n-3 . n-4}{1 . 2} y^{n-5}$ &c, in caſu numerorum parium, diviſa fuit per y, unde & ipſa $y = o$, ſeu $\sqrt{(4 - zz)} = o$, quæ dat $z = 2$, quæque adeo eſt ex numero radicum, ſequeſtrata fuit. Quod itaque diameter etiam in numerum diagonalium referenda ſit, [uti certe referri debet,] oportet tantum multiplicare adhuc $m \times c^{2m-2}$ per $2c$, & ita productum totale erit $= 2m \times c^{2m-1}$. Unde generaliter, in numeris paribus æque ac imparibus, res eodem modo ſe habet, atque in forma Theorematis ita enunciari poteſt.

THEOREMA.

In Polygono regulari quocunque, cujus numerus laterum $= \mathrm{n}$; *& radius circuli circumſcripti* $= \mathrm{c}$; *factum ex omnibus diagonalibus & binis lateribus contiguis, tanquam etiam diagonalibus conſideratis, erit* $= \mathrm{n}\,\mathrm{c}^{\mathrm{n}-1}$, *hoc eſt, æquale potentiæ radii [cujus exponens* $\mathrm{n} - 1$ *] tot vicibus ſumtæ quot ſunt unitates in* n.

Hoc Theorema viam ſternit ad demonſtrandum Theorema *Coteſianum*; quod nunc ſuſcipimus, præmittendo Lemma ſequens.

LEM-

Digitized by Google

LEMMA.

TAB. LXXVIII. N°. CLX. Fig. 3. *Sit in circulo* ACE, *cujus centrum* O, *chorda qualibet* AC *ad extremitatem diametri* AE *ducta*, *ſitque punctum* P *datum & invariabile in diametro*, *a quo tendat recta* PC: *dico fore* $PC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

DEMONSTRATIO.

Demiſſo perpendiculo CI, habetur $PC^2 = AC^2 + AP^2 - 2AP \times AI = AC^2 + AP^2 - \frac{2AP}{2AO} \times AI \times AE = AC^2 + AP^2 - \frac{AP}{AO} \times AC^2 = \frac{AO - AP}{AO} \times AC^2 + AP^2 = AP^2 + \frac{OP}{AO} \times AC^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$. *Q. E. D.*

COROLL. I. Hinc etiam ducta CE chorda complementi ad ſemicirculum; erit $PC^2 = EP^2 - \frac{OP}{OE} \times CE^2 = AP^2 + \frac{OP}{OE} \times AC^2$.

COROLL. II. Proinde $(PC^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2$; ut & $(-PC^2 + EP^2) \times \frac{OE}{OP} = CE^2$.

COROLL. III. Nec non $(EP^2 - AP^2) \times \frac{OE}{OP} = AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4OE^2$.

His ita demonſtratis, ſit ut in præcedentibus $AC = z$, $CE = y$, $OA = OE = 1$, $OP = x$; & præterea $PC = t$, $AP = 1 - x = g$; erit $zz = \frac{1}{x} \times (tt - gg)$. Hoc valore ipſius zz ſucceſſive ſubſtituto in æquationibus Tabularum primæ & ſecundæ, prodibit, retentis primo & ultimo termino quibus opus habemus, ac neglectis intermediis in quibus variabilis

riabilis tt reperitur, pro Polygonis imparium & parium laterum Tabula ſequens.

T A B. III.

Pro imparibus.

$$\text{Poſito}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ n=9 \\ n=11 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-3=0. \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{5}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{7}{xx}g^4-\frac{14}{x}gg-7=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{9}{x^3}g^6+\frac{27}{xx}g^4+\frac{30}{x}gg+9=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{11}{x^4}g^8-\frac{44}{x^3}g^6-\frac{77}{xx}g^4-\frac{55}{x}gg-11=0 \end{array}\right.$$

T A B. IV.

Pro paribus.

$$\text{Poſito}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ n=12 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{x}tt-\frac{1}{x}gg-2=0 \\ +\frac{1}{xx}t^4\ldots+\frac{1}{xx}g^4+\frac{4}{x}gg+3=0 \\ +\frac{1}{x^3}t^6\ldots-\frac{1}{x^3}g^6-\frac{6}{xx}g^4-\frac{10}{x}gg-4=0 \\ +\frac{1}{x^4}t^8\ldots+\frac{1}{x^4}g^8+\frac{8}{x^3}g^6+\frac{21}{xx}g^4+\frac{20}{x}gg+5=0 \\ +\frac{1}{x^5}t^{10}\ldots-\frac{1}{x^5}g^{10}-\frac{10}{x^4}g^8-\frac{36}{x^3}g^6-\frac{56}{xx}g^4-\frac{35}{x}gg-6=0 \end{array}\right.$$

In duabus his Tabulis videre eſt, coëfficientes numerales eſſe eoſdem qui conſpiciuntur in Tab. I, & II, cujus quidem neceſſitas ex conſtructione ipſarum Tabularum ſtatim apparet; hoc tantum diſcimine, quod ibi ſint ſigna alternantia, hic vero contigua. Nunc in hoc ſubſtituantur valores ipſius gg, ejuſque po-

poteſtatum, qui ſunt $gg=1-2x+xx$, $g^4=1-4x+6xx-4x^3+x^4$, $g^6=1-6x+15xx-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$, $g^8=1-8x+28xx-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$, $g^{10}=1-10x+45xx-120x^3+210x^4-252x^5+210x^6-120x^7+45x^8-10x^9+x^{10}$, & ſic porro. Quo facto mutabitur Tabula præcedens in hunc alteram.

TAB. V.

Pro imparibus

$$\text{Poſito}\left\{\begin{array}{l} n=3 \\ n=5 \\ n=7 \\ \\ n=9 \\ \\ n=11 \\ \\ \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg+3=(1+x+xx):x \\ \frac{1}{xx}g^4+\frac{5}{x}gg+5=(1+x+xx+x^3+x^4):xx \\ \frac{1}{x^3}g^6+\frac{7}{xx}g^4+\frac{14}{x}gg+7 \\ \quad =(1+x+xx+x^3+x^4+x^5+x^6):x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8+\frac{9}{x^3}g^6+\frac{27}{xx}g^4+\frac{30}{x}gg+9 \\ =(1+x+xx+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8):x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10}+\frac{11}{x^4}g^8+\&c.\;\ldots\ldots \\ =(1+x+xx+\ldots\ldots x^{10}):x^5 \end{array}\right.$$

TAB. VI.

Pro paribus.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ n=10 \\ \\ n=12 \end{array}\right\}\text{erit}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}gg+2=(1+xx):x \\ \frac{1}{xx}g^4+\frac{4}{x}gg+3=(1+xx+x^4):xx \\ \frac{1}{x^3}g^6+\frac{6}{xx}g^4+\frac{10}{x}gg+4=(1+xx+x^4+x^6):x^3 \\ \frac{1}{x^4}g^8+\frac{8}{x^3}g^6+\frac{21}{xx}g^4+\frac{20}{x}gg+5 \\ \quad =(1+xx+x^4+x^6+x^8):x^4 \\ \frac{1}{x^5}g^{10}+\frac{10}{x^4}g^8+\ldots=(1+xx+x^4+x^6+x^8+x^{10}):x^5 \end{array}\right.$$

Cum

Cum igitur in Tab. III, æquationum termini ultimi & invariabiles deſignent productum omnium radicum $\frac{1}{x}tt$, hoc eſt, omnium quadratorum linearum PC ex puncto fixo P ductarum in angulos ſingulos Polygoni in alterutro ſemicirculo contentos, diviſo quolibet quadrato per x, vel, quod idem eſt, productum linearum ipſarum ad ſingulos angulos totius Poligoni ductarum, exceptis tamen illis [vel una in Polygono imparium laterum, vel utraque in Polygono parium laterum] quæ ad angulos diametro contiguos ducuntur, diviſa interim unaquaque linea per $\sqrt{x}$, vel quod perinde eſt, diviſo producto ipſo per x elevatum ad ſemi-numerum omnium linearum ad angulos totius Polygoni [exceptis diametro contiguis] eductarum. Hinc ergo liquet, ſi omiſſis x, xx, x^3, &c. quæ dividunt tt, t^4, t^6, &c. ab una parte & ab altera parte ipſa illa producta, utpote utrobique ejuſdem dimenſionis, ſumantur producta illa, & æquentur quantitatibus iſtis cuique numero n competentibus $1+x+xx+x^3$ &c. pro imparibus, & $1+xx+x^4+x^6$ &c. pro paribus; fore, pro quolibet numero impare $2m+1$, productum omnium linearum in angulos ductarum, excepta ea quæ in angulum diametro contiguum ducitur, $=1+x+xx+x^3\ldots+x^{2m}$, & pro quolibet numero pari $2m$, factum ex lineis in omnes Polygoni angulis ductis, exceptis iis quæ in utrumque angulum diametro contiguum ducitur, eſſe $=1+xx+x^4+x^6\ldots+x^{2m-2}$. Ut vero valor habeatur duorum horum productorum completorum, quæ nempe fiunt multiplicando lineas eductas in angulos Polygoni prorſus omnes, nihil aliud agendum, quam ut, pro imparibus lateribus, factum ex lineis PC multiplicetur adhuc per eam quæ deeſt, nempe per PA ſeu $1-x$, & ita habebitur $(1+x+xx+x^3\ldots\ldots+x^{2m})\times(1-x)=1-x^{2m+1}$; pro paribus autem, ut factum ex iiſdem lineis PC multiplicetur porro per ambas quæ deſunt, nempe per PA & PE, hoc eſt, per $1-x$ & $1+x$, ſeu

TAB. LXXVIII. N°. CLX. *Fig.* 2.

 per

per $1 - xx$; ſicque obtinebitur $(1 + xx + x^4 + x^6 \ldots\ldots + x^{2m-2}) \times (1 - xx) = 1 - x^{2m}$. Ex qua utraque æquatione perſpicitur, quod ſi ad Polygoni regularis [laterum ſive parium ſive imparium] angulos ſingulos, ex puncto quodam in diametro per angulum quendam tranſeunte ſumto, ducantur totidem rectæ; erit exiſtente numero laterum vel angulorum quocunque $= n$, & diſtantia puncti $= x$, productum ex omnibus iſtis rectis $= 1 - x^n$. Id quod primam conſtituit partem Theorematis *Coteſiani*. Altera ex prima facillime fluit: Ecce quomodo. Diviſis bifariam ſingulis arcubus quos ſubtendunt latera Polygoni, novum concipiatur Polygonum duplo plurium laterum, ad cujus angulos ſingulos rurſus eductæ ſunt rectæ; harum ergo productum erit $= 1 - x^{2n}$; quod ſi dividatur per productum prius $1 - x^n$, prodibit productum linearum alternatim ſumtarum $= 1 + x^n$, quarum prima cadit perpendiculariter in latus primum prioris Polygoni. Quæ pars eſt altera Theorematis prædicti. *Q. E. D.*

P R O-

N°. CLXI.

PROBLEMA.

Æquationes differentiales incompletas cujuſcunque gradus reddere completas, hoc eſt, *eas tranſmutare in alias*, *in quibus nulla differentialis ſupponatur conſtans.*

Confer. TAYLOR *de Method. increm.* p. 8.

Poſita dx conſtante,

Sit $dy = zdx$ erit $\frac{dy}{dx} = z$

$ddy = dzdx = tdx^2$ $\frac{dz}{dx} = t$

$d^3y = dtdx^2 = vdx^3$ $\frac{dt}{dx} = v$

$d^4y = dvdx^3 = rdx^4$ $\frac{dv}{dx} = r$

$d^5y =$ &c.

Differentiando, poſitis omnibus variabilibus, emerget

$$dz = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$$

$$dt = d\left(\frac{dz}{dx}\right) = d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right) = \&c.$$

$$dv = d\left(\frac{dt}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right) = \&c.$$

$$dr = d\left(\frac{dv}{dx}\right) = d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{1}{dx} \times d\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^3}\right)\right)\right) = \&c.$$

&c. = &c.

Q 3 Hinc,

Digitized by Google

Hinc, pro incompletis dy, ddy, d^3y, &c. ſubſtituantur completa, ut ſequitur.

Incompl. Compl.

$$dy = dy = dy$$

$$ddy = dzdx = (dxddy - dyddx) : dx$$

$$d^3y = dtdx^2 = dx^2 . d((dxddy - dyddx) : dx^3)$$

$$= (1dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - 1dxdyd^3x) : dx^2.$$

$$d^4y = dvdx^3 = dx^3 . d\left(\frac{1}{dx} . d((dxddy - dyddx) : dx^3)\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} dx^3d^4y - 6dx^2ddxd^3y + 15dxddx^2ddy - 15ddx^3dy \\ \qquad - 4dx^2d^3xddy + 10dxddxd^3xdy \\ \qquad - dx^2d^4xdy \end{array}\right) : dx^3.$$

$$d^5y = drdx^4 = \&c.$$

S C H O L I U M.

Hujus Regulæ eſt uſus in transformandis differentialibus conſtantibus in alias conſtantes. Ex. gr. Si dy debeat eſſe conſtans, hoc tantum agendum, ut deleantur termini in quibus reperiuntur ddy, d^3y, d^4y, &c. Ita quoque ſi quævis functio, ex differentialibus ſolis, vel ex differentialibus & finitis compoſita, fieri debeat conſtans, ex. gr. ſi deſideretur ut fiat conſtans elementum curvæ, hoc eſt $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; nam ex hac ſuppoſitione ſequitur $dxddx + dyddy = 0$; adeoque ſi in formulis noſtris completarum pro ddy ſubſtituatur $-dxddx : dy$, & quod inde provenit, ſi in æquatione aliqua incompleta, ubi dx ſupponitur conſtans, ſubſtituatur porro pro ddy; ejuſque differentiale pro d^3y, & ita deinceps quouſque opus eſt, reſultabit æquatio in qua erit $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ conſtans. Vel, quod eodem recidit, & clarius intelligitur, mutetur ſtatim propoſita æquatio incompleta, ubi dx conſtans, in æquationem completam; ſubſtituendo ſcilicet pro incompletis ddy, d^3y, &c. eorum reſpondentes completos, qui ſunt $(dxddy - dyddx) : dx$, $(dx^2d^3y - 3dxddxddy + 3ddx^2dy - dxdyd^3x,) : dx^2$, &c. deinde in æquatione completa, quæ inde emergit, ſupponatur aliquod ex differentialibus compoſitum conſtans, ex. gr. quod ſupra aſſumſimus $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$,

&

& quod vocemus $= dv$, unde fluit $ddy = -dxddx : dy = -dxddx : \sqrt{(dv^2 - dx^2)}$, $d^3y = (-ddx^2 - dxd^3x) : dy$ &c. Hos itaque valores in æquatione completa oportet ſurrogare pro ddy, d^3y, &c. & inde lucrabimur novam æquationem, in qua conſtans erit dv, ſeu $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, & quæ proin propoſitæ [ubi dx erat conſtans] eſt æquivalens. Similiter, ſi velimus propoſitam mutare in aliam, in qua ſit ex. gr. ydx ſeu elementum areæ conſtans, erit $dydx + yddx = 0$, adeoque $dy = -yddx : dx$; $ddy = (-dydxddx + yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$, $=$ [ſcribendo pro dy ejus valorem $-yddx : dx$] $(2yddx^2 - ydxd^3x) : dx^2$; $d^3y =$ &c. Vel, quod hic præſtat, ut eliminemus ddx, d^3x, &c. erit $ddx = -dxdy : y$, $d^3x = (2dy^2dx - ydxddy) : yy$. Quod ſi igitur, in æquatione completa, ſubſtituamus pro ddy, d^3y, &c. eorum valores in ddx, d^3x, &c. vel pro ddx, d^3x, &c. eorum valores in dy, ddy, &c. expreſſos, acquiremus utroque modo æquationem in qua erit ydx conſtans, loco propoſitæ, ubi erat dy conſtans.

N°. CLXII.

REDUCTIO

Æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ *ad æquationem differentialem primi gradus, ubi ſupponitur* $ddx = 0$.

Ponatur $y = tx^a$, adeoque $dy = x^a dt + atx^{a-1} dx$; & $ddy = x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2$, quibus in propoſita ſubſtitutis, mutabitur illa in hanc (A)...

$$t^m x^{am}(x^a ddt + 2ax^{a-1} dxdt + (aa - a)tx^{a-2} dx^2)$$
$$= q.x$$

$= qx^n dx^p (x^a dt + atx^{a-1} dx)^{2-p}$. Poſito autem $dx = xzdt$, erit ddx ſeu $0 = xzddt + xdzdt + xzzdt^2$, unde $ddt = -dzdt : z - zdt^2$. Subſtituto hoc valore in A habebitur [rite procedendo] hæc altera æquatio (B).. $t^m x^{am+a} ((2a-1)zdt^2 + (aa-a)tzzdt^2 - dzdt : z) = qx^{n+p+2a-pa} z^p dt^2 (1+atz)^{2-p}$. Ut nunc littera x evaneſcat, ejus exponentes ſunt ponendi æquales, nempe $am+a = n+p+2a-pa$; unde emergit $a = (n+p) : (m+p-1)$, atque reſultabit, dividendo per dt, æquatio differentialis primi gradus, conſtans tantum ex duabus indeterminatis z & t, earumque differentialibus primis, quæ erit hæc (C)...$(2a-1)t^m zzdt + (aa-a)t^{m+1} z^3 dt - t^m dz = qz^{p+1} dt (1+atz)^{2-p}$. Ubi ſi quocunque modo, per ſeparationem indeterminatarum, vel aliter, haberi poteſt relatio inter z & t, habebitur etiam ea inter x & y. Facto enim $x = c^{\int zdt}$, & $y = tx^a = tx^{(n+p):(m+p-1)} = tc^{(n+p)\int zdt : (m+p-1)}$, obtinetur quæſitum.

COROLLARIUM I.

Si $m+p=1$, erit $a=\infty$, adeoque etiam $y = tx^a = tx^\infty = \infty$. Hinc in hoc caſu Problema non ſolvitur per hanc methodum, ſed ſolvi poteſt, ſi æquatio propoſita ita mutatur, ut dy ſit conſtans; quod fieri poteſt.

COROLLARIUM II.

Si $n+p=0$, hoc eſt, ſi $n=-p$, erit $y = tx^0 = t$, & $a=0$. Unde inventa æquatio in hanc abit $-t^m zzdt - t^m dz = qz^{p+1} dt$, vel $-t^m dz = (t^m zz + qz^{p+1}) dt$. Ubi ſi præterea $p=1$, fit æquatio ſeparabilis & ſimul integrabilis, nem-

nempe hæc $-dz : zz = dt + qdt : tm$, quæ integrata dat $b + 1 : z = t + \frac{q}{1-m} t^{1-m}$, unde $z = (1-m) : ((1-m)t + qt^{1-m} + bm - b)$; quare æquatio propoſita in hanc abiens $y^m ddy = q dx dy : x$ conſtrui poteſt ſumendo $y = t$, & $x = c^{\int((1-m)dt : ((1-m)t + qt^{1-m} + bm - b))}$; vel ſimpliciter ſumendo $x = c^{\int((1-m)dy : ((1-m)y + qy^{1-m} + bm - b))}$.

Si exponens eſt logarithmicabilis, prodit æquatio algebraïca. Ex. gr. Si $m = -1$, erit $x = c^{\int(2dy : (2y + qyy - 2b))}$, adeoque $lx = \int(2dy : (2y + qyy - 2b)) =$ alicui Logarithmo, excepto tamen caſu quo $2b$ aſſumitur $= -1 : q$, hoc enim caſu fit $\int(\frac{2}{q} dy : (yy + \frac{2}{q} y + \frac{1}{qq}) = -\frac{2}{q} : (y + \frac{1}{q})$ $=$ quantitati algebraïcæ.

COROLLARIUM III.

In eodem caſu quo $n + p = 0$, ſi præterea $p = 2$, adeoque $n = -2$, & ſi $m = -1$; ita ut æquatio noſtra generalis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ abeat in hanc $y\, ddy = q x^{-2} dx^2 dy^0$ ſeu $xx ddy = qy dx^2$; mutata æquatio per Regulam dat $-t^{-1} dz = (t^{-1} zz + qz^2) dt$, vel $-dz : zz = (1 + qtz) dt$, quæ integrari poteſt ſequenti modo: Ponatur $tz = v$, unde $t = v : z$ & $dt = (zdv - vdz) : zz$; quibus ſurrogatis, erit $dz : zz = (1 + qv)(zdv - vdz) : zz$, vel $\frac{dz}{z} = \frac{1 + qv}{-1 + v + qvv} dv$ $= \frac{1}{2} \times \frac{1 + 2qv}{-1 + v + qvv} dv + \frac{1}{2} \times \frac{dv}{-1 + v + qvv} = \frac{1}{2}(\frac{1 + 2qv}{-1 + v + qvv} dv + \frac{dv}{(qv + \alpha)(v + \beta)}) = \frac{1}{2} \times (\frac{1 + 2qv}{-1 + v + qvv} dv + \frac{\varepsilon dv}{qv + \alpha} + \frac{\eta dv}{v + \beta})$, unde habetur $lfz = \frac{1}{2}(l(-1 + v + qvv) + \frac{\varepsilon}{q} l(v + \frac{\alpha}{q})$

$+\eta l(v+\beta))$; & $fz=(-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}}\times(v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q}\times(v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$: vel propter $v=tz$, $fz=(-1+tz+qttzz)^{\frac{1}{2}}\times(tz+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q}\times(tz+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, quæ eſt æquatio terminis finitis conſtans. Ergo &c. Pro conſtructione ponatur $f=1$, erit $z=(-1+v+qvv)^{\frac{1}{2}}\times(v+\frac{\alpha}{q})^{\varepsilon:2q}\times(v+\beta)^{\frac{1}{2}\eta}$, & $dz=(tdv-vdt):tt$ [propter $v=tz$]; ergo etiam habebitur zdt in meris v & dv; adeoque etiam $x=c^{\int zdt}$ & $y=t$.

ALITER ET GENERALIUS PRO HOC CASU.

Ex æquatione (B) patet, exiſtente $n+p=0$, faciendum eſſe $am+a=2a-pa$, quod cum dividi poſſit per a, ita ut tantum ſit $m+p=1$, relinquitur utique a arbitrarium; adeoque, omni in caſu ubi $n+p=0$, & $m+p=1$; id quod facit $p=1-m$ & $n=m-1$. Æquatio noſtra inventa C. . . . . $(2a-1)t^{m}zzdt+(aa-a)t^{m+1}z^{3}dt-t^{m}dz=qz^{p+1}dt(1+atz)^{2-p}$, quæ mutatur in hanc (D). . . . $(2a-1)t^{m}zzdt+(aa-a)t^{m+1}z^{3}dt-t^{m}dz=qz^{2-m}dt(1+atz)^{1+m}$, permittit a liberum; quod proinde ita ſumere licet, ut æquatio fiat integrabilis. In caſu ergo propoſito $y^{-1}ddy=qx^{-2}dx^{2}$, ubi $n+p=0$, $m=-1$, $n=-2$, $p=2$; lubet deſtruere, in æquatione D, terminum primum $(2a-1)t^{m}zzdt$, faciendo $2a-1=0$ ſeu $a=\frac{1}{2}$; hoc enim dat $-\frac{1}{4}z^{3}dt-t^{-1}dz=qz^{3}dt$, hoc eſt, reductione peracta, $-4dz:z^{3}(4q+1)tdt$; quod integrando habetur $4:zz+b^{2}=(4q+1)tt$, ſeu $4=(4q+1)ttzz-bbzz$; unde $z=2:\sqrt{((4q+1)tt-bb)}$. Cum itaque $x=c^{\int zdt}$, hoc eſt, $lx=\int zdt$, ſeu $dx:x=zdt$, erit $\int(dx:x)=\int zdt=\int(2dt:\sqrt{((4q+1)tt-bb)}$; adeoque integrando per Logarithmos, erit $lfx=\frac{2}{\sqrt{(4q+1)}}\times l(t+\sqrt{(tt}$

—.

$-\frac{bb}{4q+1}))=$ [ponendo $\frac{bb}{4q+1}=ee$] $\frac{2e}{b}\times l(t+\sqrt{(tt-ee)})$; atque $fx=(t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Porro quia $y=tx^{a}=tx^{1:2}=t\sqrt{x}$, prodibit $y=\frac{t}{\sqrt{f}}(t+\sqrt{(tt-ee)})^{e:b}$. Ut nunc æquatio habeatur per x & y expreſſa, eliciatur valor ipſius t, ope primæ æquationis $fx=(t+\sqrt{(tt-ee)})^{2e:b}$. Quod ſic fit: $(fx)^{b:2e}=t+\sqrt{(tt-ee)}$, adeoque $(fx)^{b:2e}-t=\sqrt{(tt-ee)}$ quadrando $(fx)^{b:e}-2(fx)^{b:2e}t+tt=tt-ee$; hinc $t=((fx)^{b:e}+ee):2(fx)^{b:2e}$. Hoc valore ſubſtituto in altera æquatione $y=t\sqrt{x}$; prodibit $y=((fx)^{b:e}+ee)\sqrt{x}:2(fx)^{b:2e}$; vel $2yf^{b:2e}x^{b:2e-1:2}=f^{b:e}x^{b:e}+ee$, vel etiam $y=\frac{1}{2}f^{b:2e}x^{b:2e+1:2}+\frac{1}{2}eef^{-b:2e}x^{-b:2e+1:2}$; ſed quia $b:e=\sqrt{(4q+1)}$, & $ee=bb:(4q+1)$, ſubſtituantur hi valores; eritque $y=\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}x^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}}+\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}x^{-\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}+\frac{1}{2}}$. Aut, quia f & b ſunt arbitrariæ, poſſunt pro coëfficientibus $\frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}\sqrt{(4q+1)}}$ & $\frac{bb}{8q+2}f^{-\frac{1}{2}\sqrt{(+q+1)}}$ poni duæ litteræ ſimplices a & c; & habebitur $y=ax^{\frac{1}{2}+\sqrt{(q+\frac{1}{4})}}+cx^{\frac{1}{2}-\sqrt{(q+\frac{1}{4})}}$.

COROLL. IV.

In fine *Coroll.* 2, ubi inventum eſt $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b))$, ſi ſumatur $b=0$, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy))=lfy-l(+2qy)=l(fy:(2+qy))$, adeoque $x=fy:(2+qy)$, & reductis ſuppletis que homogeneis, $2x+qyx=fy$. Ex quo patet curvam eſſe poſſe Hyperbolam. Quod ſi vero relinquatur b arbitrarium, erit $lx=\int(2dy:(2y+qyy-2b)=\int(\frac{2}{q}dy:(yy+\frac{2}{q}y-\frac{2}{q}b))=\int\frac{\alpha dy}{y+f}+\int\frac{\beta dy}{y+g}=\alpha l(y+f)+\beta l(y+g)$; adeoque aſſumta nova arbitraria erit $nx=(y+f)^{\alpha}\times(y+g)^{\beta}$. Sed per Calculum inveniuntur $\alpha=1:\sqrt{(1+2bq)}$, $\beta=-1:\sqrt{(1+2bq)}$; $f=$

$f = \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}, g = \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$. Hinc æquatio generaliſſima $nx = (y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{1:\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)})^{-1:\sqrt{(1+2qb)}}$, vel quod eodem recidit, debite reducendo $(nx)^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (y + \frac{1}{q} + \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}) = y + \frac{1}{q} - \sqrt{(\frac{1}{qq} + \frac{2}{q}b)}$, vel demum omnia multiplicando per q & ponendo a pro $n^{\sqrt{(1+2bq)}}$, erit $ax^{\sqrt{(1+2bq)}} \times (qy + 1 + \sqrt{(1+2bq)}) = qy + 1 - \sqrt{(1+2bq)}$; quæ ergo generaliter ſatisfacit huic æquationi $ddy : y = q\,dx\,dy : x$. Porro quia q afficitur per arbitrariam b, poteſt $\sqrt{(1+2bq)}$ conſiderari ut arbitrarium: vocetur ergo c, & ſic æquatio inventa abit in hanc ſimpliciſſimam $ax^{c}(qy + c + 1) = qy - c + 1$.

Nota. Poteſt caſus propoſitus $x\,ddy = qy\,dx\,dy$ ſine applicatione ad Regulam generalem (quæ applicatio eſt operoſa) facilius ſolvi hoc modo. $\int x\,ddy = x\,dy - \int dx\,dy = x\,dy - y\,dx + a\,dx$; hoc ergo $= \int qy\,dx\,dy = \frac{1}{2}qyy\,dx$; & ita res redacta eſt ad differentiales primas. Reliqua per indeterminatarum ſeparationem peraguntur. Poſito $a = 0$, prodit caſus particularis $2x + qyx = \int y$. Simili modo caſus proponendi in *Coroll.* 5, 6 & 7, ad differentias primas reducuntur, ſine recurſu ad Regulam noſtram generalem. Sit enim relinquendo m in tota ſua extenſione, $y^{m}ddy = q\,dx\,dy : x$, erit $x\,ddy = qy^{-m}dx\,dy$; idque ut prius integrando, prodit $\int x\,ddy = x\,dy - y\,dx = \frac{q}{1-m}y^{1-m}dx + a\,dx$. Quo reducto fit $(1 - m\,dy) : (qy^{1-m} + (1-m)y + (1-m)a) = dx : x$. Cætera abſolvuntur ut in *Coroll.* 5, pro caſu $m = 2$.

SCHOLIUM.

Interdum non patet quomodo æquatio ad differentiales primas reducta ſeparationem admittat; ſed ut ſupra monuimus, mutari poteſt æquatio, ante illam reductionem, ut quibuſdam in

caſibus,

Digitized by Google

caſibus perveniri poſſit ad differentiales primas, ſine recurſu ad Regulam, ſi nimirum ex invariabili dx fiat variabilis, & viciſſim ex variabili dy fiat invariabilis. Sic generalis noſtra æquatio $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ transformatur hoc modo in hanc, $-y^m ddx = qx^n dx^{p+1} dy^{1-p}$. Si $m=1$, & $p=0$, habetur pro priori, $yddy = qx^n dy^2$, quæ ægre reducitur per Regulam, ſed poſita dy invariabili, transformatur in hanc $-yddx = qx^n dxdy$, quæ per conſuetam integrationem dat $-ydx + xdy = \frac{q}{n+1} x^{n+1} dy + ady$. &c. ſeparabilem.

COROLL. V.

Si in æquatione *Coroll.* 2. $y^m ddy = qdxdy : x$, habeatur $m=2$; ita ut reſolvenda jam ſit $yyddy = qdxdy : x$, erit nunc $lx = \int \frac{-dy}{-y+qy^{-1}+b} = \int \frac{ydy}{yy-by-q} = \int \frac{\alpha dy}{y+f} + \int \frac{\beta dy}{y+g} = \alpha l(y+f) + \beta l(y+g)$, adeoque aſſumpta nova arbitraria n, erit $nx = (y+f)^{\alpha} \times (y+g)^{\beta}$. Sed hic per calculum reperiuntur $\alpha = (-\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$, $\beta = (\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}) : 2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$, $f = -\frac{1}{2}b +$

$g = -\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}$; unde æquatio ger

caſu erit $nx = (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{(-\frac{1}{2}b+\sqrt{(}}$

$\times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb+q}))^{(\frac{1}{2}b+\sqrt{}}$

vel etiam $(nx)^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (y - \frac{1}{2}b$

$\times (y - \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(}}$

multiplicando primum factorem

$\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{b}$, deinde qu

torem actu etiam multiplicando

$(y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{b}$:

obſervato, prodibit $nx^{2\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} = (yy - by - q)^{\frac{1}{2}b+\sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)}} \times (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-b}$. Ut fractiones in exponentibus tollantur, eorum ſumantur dupla; eritque $nx^{2\sqrt{(bb+4q)}} = (yy - by - q)^{b+\sqrt{(bb+4q)}} \times (y - \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}bb+q)})^{-2b}$; verum etiam, ut exponentium irationalitas abeat, poſſum arbitrariam b ita ſumere ut $bb + 4q$ evadat quadratum perfectum: ſit itaque $b = e - q:e$, unde fit $bb + 4q = ee + 2q + qq:ee$ & $\sqrt{(bb+4q)} = e + q:e$; quibus ergo ſubſtitutis, habebitur $nx^{2e+2q:e} = (yy - (e - q:e)y - q)^{2e} \times (y + q:e)^{-2e+2q:e}$; vel multiplicando exponentes per $\frac{1}{2}e$, erit $nx^{ee+q} = (yy - (e - q:e)y - q)^{ee} \times (y + q:e)^{-ee+q}$; & fractionibus ſublatis in factoribus, multiplicando æquationem per e^q, prodibit $ne^q x^{ee+q} = (eyy - (ee - q)y - eq)^{ee} \times (ey + q)^{-ee+q}$; & [quoniam $eyy - eey + qy - eq = (y - e) \times (ey + q)$, & propter arbitrariam n, pro ne^q ſcribi poteſt a], orietur tandem æquatio ſimpliciſſima hæc $ax^{ee+q} = (y - e)^{ee} \times (ey + q)^q$, reſpondens generaliter huic $yyddy = qdxdy:x$. Quod ſi aſſumatur arbitraria $ee = q$, prodibit $axx = (yy - q)\sqrt{q}$, vel pro arbitraria a ſcribendo $c\sqrt{q}$, reſultat $cxx = yy - q$, æquatio ad Hyperbolam; quæ ergo inter infinitas alias curvas ſatisfacit æquationi propoſitæ $yyddy = qdxdy:x$.

COROLL. VI.

Sit porro in æquatione *Coroll.* 2, $y^m ddy = qdxdy:x$, ſit $m = \frac{1}{2}$; adeo ut reſolvenda veniat $ddy\sqrt{y} = qdxdy:x$; erit $lnx = \int \frac{dy}{y + 2q\sqrt{y} - b} =$ [poſito $zz = y$] $\int \frac{2zdz}{zz + 2qz - b}$

$= \int$

$= \int \frac{\alpha dz}{z+f} + \int \frac{\beta dz}{z+g} = \alpha l(z+f) + \beta l(z+g)$; proinde $nx = (z+f)^{\alpha} \times (z+g)^{\beta}$. Dat autem calculus $f = q - \surd(qq+b)$, $g = q + \surd(qq+b)$, $\alpha = (-q + \surd(qq+b)) : \surd(qq+b)$, $\beta = (q + \surd(qq+b)) : \surd(qq+b)$. Hinc fluit $nx = (z+q - \surd(qq+b))^{(-q+\surd(qq+b)) : \surd(qq+b)} \times (z+q+\surd(qq+b))^{(q+\surd(qq+b)) : \surd(qq+b)}$, vel elevando utrumque ad $\surd(qq+b)$, erit $(nx)^{\surd(qq+b)} = (z+q-\surd(qq+b))^{-q+\surd(qq+b)} \times (z+q+\surd(qq+b))^{q+\surd(qq+b)}$. Quia vero b arbitrarium, erit ipſum $\surd(qq+b)$ arbitrarium; ponatur ergo $\surd(qq+b) = e$. Unde emergit $(nx)^{e} = (z+q-e)^{-q+e} \times (z+q+e)^{q+e}$; reſubſtituendo pro z ejus valorem $\surd y$, & ſcribendo a pro n^{e}, prodit tandem æquatio inter x & y, quæ hæc eſt $ax^{e} = (\surd y + q - e)^{-q+e} \times (\surd y + q + e)^{q+e}$; complectens omnes poſſibiles curvas huic æquationi $ddy \surd y = qdxdy : x$ reſpondentes.

COROLL. VII.

Liceat denique addere hoc *Corollarium*, quo relinquitur m in tota ſua extenſione: ſed ponatur arbitraria $b = 0$, vocetur-que $1 - m = h$, erit pro caſu *Coroll.* 2. $lnx = \int (hdy : (hy + qy^{h})) = \int (hy^{-h} dy : (hy^{1-h} + q)) = \frac{1}{1-h} l(hy^{1-h} + q)$. Hinc ergo aſſumpto a pro n^{1-h} provenit $ax^{1-h} = hy^{1-h} + q$, hoc eſt $ax^{m} = (1-m) y^{m} + q$, quæ quidem pro qua-libet m reſpondet æquationi $y^{m} ddy = qdxdy : x$, ſed non om-nes poſſibiles curvas complectitur.

R E D U C T I O

æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$
ad genus Parabolarum.

Sit æquatio formulæ propoſitæ reſpondens $y = \alpha x^\beta$; proinde $dy = \alpha\beta x^{\beta-1} dx$, & $ddy = (\alpha\beta\beta - \alpha\beta) x^{\beta-2} dx^2$. His valoribus in propoſita ſurrogatis, orietur $(\alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta)$ $x^{\beta m+\beta-2} dx^2 = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p} x^{n+p-2+2\beta-\beta p} dx^2$. Ut ambo membra identificentur, æquandi ſunt coëfficientes, ut & exponentes, nimirum:

$$\text{A} \ldots \alpha^{m+1}\beta\beta - \alpha^{m+1}\beta = q\alpha^{2-p}\beta^{2-p}.$$

$$\text{B} \ldots \beta m + \beta - 2 = n + p - 2 + 2\beta - \beta p.$$

Ex æquatione B habetur $\beta = (n+p):(m+p-1)$, quo ſubſtituto pro β in æquatione A, reſultabit $\alpha = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ & hoc modo fiet $y = \alpha x^\beta = \left(\frac{q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p}{n-m+1}\right)^{1:(m+p-1)}$ $x^{(n+p):(m+p-1)}$. Adeoque $(n-m+1)\, y^{m+p-1} = (q.(n+p)^{1-p} \times (m+p-1)^p)\, x^{n+p}$ Q. E. F.

C O R O L L. I.

Pro caſu ſpeciali $yyddy = xdx^2$, ubi $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$, habetur $0y^3 = 3x^3$; proinde $x = 0$, pro qualibet y.

C O R O L L. II.

Si $m+p = 1$, erit $(n-m+1) = 0\, x^{n+p} = 0$. Quod eſt contradictio, niſi forſan $n-m+1 = 0$, ſeu $n+1 = m$; adeoque $n+1+p = 1$, unde $p = -n$.

C O R O L L. III.

Si $n+p = 0$, erit $(n-m+1) y^{m+p-1} = 0$; proinde $y = 0$ pro qualibet x.

PROBLE-

N°. CLXIII.

PROBLEMA.

Rectificare Curvam datam, per aliam formulam quam per $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

SOLUTIO.

Sit curva ABC primo rectangula, hoc eſt, cujus tangentes in punctis extremis A & C ſint ſibi invicem perpendiculares. Sint AF vel NB $= x$, FB vel AN $= y$, arcus AB $= s$, radius oſculi in B ſeu BM $= r$. Sit applicata ultima KC vel AE $= b$; ſit EG perpendicularis ad tangentem BH, adeoque parallela ipſi BM. TAB. LXXVIII. N°. CLXIII Fig. 1.

Erit HN $= xdy : dx$, unde HE $= xdy : dx + b - y$. Porro $ds : dx =$ BH : BN $=$ HE : EG; unde EG $= (xdy + (b-y)dx) : ds$. Fiat nunc MB $[r]$: EG $[(xdy+(b-y)dx) : ds]$ $= ds$ ad quartam, erit hæc quarta $= (xdy+(b-y)dx) : r$. Atqui per naturam Reptoriarum [alibi demonſtratam a me] ejus integrale, per totam curvam ABC ſumtum, dat ipſam longitudinem curvæ ABC, ſeu totam s; quod eſt Theorema habens in quibuſdam exemplis elegantes proprietates.

EXEMPLUM I.

Sit curva ABC Elaſtica notiſſima, ſeu Lintearia, cujus natura hæc eſt, ut ſit $y = \int(xxdx : \sqrt{(1-x^4)})$, nominando ſcilicet ultimam applicatam KC vel AE $= b$, & ultimam abſciſſam AK vel EC $= 1$. Notum eſt etiam quemlibet arcum AB eſſe $\int(dx : \sqrt{(1-x^4)})$; invenitur vero $r = 1 : 2x$, qui-

bus ſubſtitutis, prodit $(xdy+(b-y)dx):r=(2x^4dx+2x(b-y)dx\sqrt{(1-x^4)}):\sqrt{(1-x^4)}=2x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}+2xdx(b-y)$. Integretur, quoad fieri poteſt; eritque pro arcu A B, quod ſequitur; $2\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+bxx-yxx+\int xxdy=$ [ob $xxdy=x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}$] $3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})+xx(b-y)$; unde tota curva A B C [ubi $b=y$] erit $=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$, adeoque evadente $x=1$, habebimus hanc proprietatem, ut ſit $\int(dx:\sqrt{(1-x^4)})=3\int(x^4dx:\sqrt{(1-x^4)})$.

EXEMPLUM II.

Sit nunc curva A B C generalius expreſſa per $y=\int(x^n dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; reliquis poſitis ut prius; erit quilibet arcus $AB=\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$, & reperietur $r=1:nx^{n-1}$. Hiſce ſubſtitutis in generali $(xdy+(b-y)dx):r$, prodibit $(xdy+(b-y)dx):r=nx^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}+nx^{n-1}dx(b-y)$. Quod integratum, quoad fieri poteſt, dabit arcum $AB=n\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+bx^n-yx^n+\int x^n dy$ $=$ [ob $x^n dy=x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})}$] $(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})+(b-y)x^n$. Unde exiſtente $b=y$, evaneſcet ſecundus terminus $x^n(b-y)$; eritque tota curva ABC $=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$; proinde evadente $x=1$, erit hæc proprietas, ut ſit ſemper $\int(dx:\sqrt{(1-x^{2n})})=(n+1)\int(x^{2n}dx:\sqrt{(1-x^{2n})})$.

COROLLARIUM.

In caſu quo $n=2$, incidimus in exemplum præcedens: ſed ſi $n=1$, erit $\int(dx:\sqrt{(1-xx)})=2\int(xxdx:\sqrt{(1-xx)})$, quod utrumque dependet a circulo; & examinando per communem viam, deprehendentur ambo membra, in ſuppoſitione $x=1$, deſinere

deſinere in quadrantes circulorum æqualium, id quod generalem noſtram methodum mirifice confirmat.

Sit nunc curva ABC obliquangula, hoc eſt, ſit angulus ACE acutus; manente interim angulo CAE recto. TAB. LXXVIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 2 & 3.

Pro hoc caſu, ex puncto C ducta ſit tangens CL, in eamque normalis EL. Ex dato angulo acuto ECL & ex data longitudine CE, dabitur utique CL, quæ dicatur $= t$.

Jam ad faciendum angulum ACE rectum, concipiatur ad extremitatem C adjungi arculum radii infinite parvi, qui centrum habeat in recta EC, ipſique C quam proximum, ita ut coaleſcat cum curva ABC; faciatque hoc pacto angulum rectum cum CA, nempe angulum KCE. Res iſta talem habet faciem ut videre eſt in *Figura* 3; ubi ABC eſt curva propoſita, ad cujus extremitatem C, adjunctus concipitur arculus circuli Cc, cujus radius infinite parvus CO vel cO, ita ut centrum O ſit in ultima applicata cE, quæ ab ipſa CE diſtare non cenſetur; ſicuti pariter ABc ab ipſa ABC longitudine non differt. Sic itaque AcE jam eſt rectus, cum antea alter ACE eſſet acutus; adeoque jam conſiderabimus $ABCc$ tanquam curvam in caſu *Fig.* 1. Ut autem habeatur ſumma omnium elementorum $(xdy + (b-y)dx) : r$ pro toto arcu $ABCc$, addenda ei eſt ſumma eorum quæ pertinent ad arculum circularem Cc, quæ ut facile intelligitur æqualis eſt ipſi tangenti CL, hoc eſt $= t$. Hinc longitudo arcus ABC ſeu $ABCc = t + \int((xdy + (b-y)dx) : r)$.

EXEMPLUM.

Sit ABC iterum Elaſtica, non integra quidem, ſed tantum ejus portio, cujus altitudo vel ultima applicata KC, vel AE, nominetur iterum b; abſciſſa vero ultima AK, vel EC, quæ antea erat $= 1$, nunc ſit $= a$; erit, ex natura Elaſticæ, tangens CL ſeu $t = a\sqrt{(1-a^4)}$; adeoque longitudo curvæ ABC ſeu $ABCc$, hoc eſt, $t + \int((xdy + (b-y)dx) : r) = a\sqrt{(1-a^4)} + 3\int(x^4\, dx : \sqrt{(1-x^4)})$; ubi notandum integrationem inſti-

 tuendam

tuendam eſſe, non per totam unitatem, ſed tantum per ejus portionem a; atque ita habebimus, evadente $x = a$, hanc proprietatem, ut ſit $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)} + 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$. Similiter in aliis procedendum.

COROLL. I.

Si a ſumitur = toti unitati, evaneſcit $a\sqrt{(1 - a^4)}$, eritque tantum $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) = 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, ut fieri par eſt; relabimur enim in primum caſum ſupra explicatum.

COROLL. II.

Hinc in omni caſu, modo a ſit minor unitate, erit $\int(dx : \sqrt{(1 - x^4)}) - 3\int(x^4 dx : \sqrt{(1 - x^4)})$, hoc eſt, $\int((dx - 3x^4 dx) : \sqrt{(1 - x^4)}) = a\sqrt{(1 - a^4)}$; adeoque integrabilis, in caſu quo x evadit $= a$.

N°. CLXIV.

DE TRANSFORMATIONIBUS ET RECTIFICATIONIBUS CURVARUM.

PROBLEMA I.

Curvas parabolicas cujuſvis gradus transformare in alias alius generis curvas algebraicas, ejuſdem longitudinis.

SIT numerus poteſtatis, a qua denominatur Parabola, $= n$; parameter $= 1$; unde æquatio ad Parabolam $x^n = y$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{2n-2}dx^2 + 1dx^2)}$. Jam ut habeantur duæ aliæ coordinatæ quam x^n & x, oportet quadratum

tum elementi curvæ $nnx^{2n-2}\,dx^2 + 1dx^2$ diſponere in duo alia quadrata, quorum latera ſunt integrabilia; hæc autem quadrata ſunt, $nnx^{2n-2}\,dx^2 - 2nx^{n-1}dx^2 + dx^2$ & $+2nx^{n-1}dx^2$; quorum radices ſunt, $\pm\, nx^{n-1}dx \mp dx$ & $\pm\sqrt{2n\,x^{n-1}dx^2}$; earum ergo integralia $\pm\, x^n \mp x$ & $\pm\,\frac{2}{n+1}x^{(n+1):2}\sqrt{2n}$ erunt coordinatæ curvæ novæ ipſi Parabolæ longitudine æqualis.

In Parabola communi, ubi $n=2$, erunt novæ coordinatæ $\pm\, xx \mp x$ & $\frac{4}{3}x^{3:2}$, unde ſi ponatur $xx - x = s$ & $\frac{4}{3}x^{3:2} = t$, reperietur, pro natura curvæ novæ, hæc æquatio [ſumta a pro conſtante ad implendas homogeneas] $81t^4 = \pm\, 432astt + 144aatt \pm 256as^3$.

PROBLEMA II.

Idem præſtare pro curvis hyperbolicis cujuſvis gradus, ad aſymtoton.

Sit numerus poteſtatis, a qua denominatur Hyperbola $=n$; latus conſtans $=1$; unde æquatio ad Hyperbolam, $y = 1 : x^n$; ideoque elementum curvæ $= \sqrt{(nnx^{-2n-2}\,dx^2 + 1\,dx^2)}$. Reliqua faciendo ut ſupra, reperietur, pro coordinatis novæ curvæ ipſi Hyperbolæ longitudine æqualis, $+x^{-n} + x$, & $\frac{2}{1-n}x^{(1-n):2}\sqrt{2n}$.

SCHOLIUM.

In Hyperbola communi regula noſtra ceſſat; altera enim ordinata curvæ novæ evadit infinita: unde nihil habetur. Ad hunc defectum reſarciendum, en alium modum. Quadratum elementi curvæ, $x^{-4}\,dx^2 + 1dx^2$, diſtribui poterit in duo alia quadrata, ſi ponamus radicem unius eſſe $-\,x^{-2}dx + mx^p\,dx$, ideoque quadratum $x^{-4}dx^2 - 2mx^{p-2}dx^2 + mmx^{2p}\,dx^2$; ſi aufe-

auferatur a $x^{-4}dx^2 + 1dx^2$, remanebit $2mx^{p-2}dx^2 - mmx^{2p}dx^2 + 1dx^2$, quod ut fiat quadratum perfectum, oportet duplum rectangulum inter radices partium ſigno + affectarum æquari parti ſigno — affectæ, id eſt $2x^{\frac{1}{2}p-1}\sqrt{2m} = mmx^{2p}$; adeoque, ut tam dimenſiones quam coëfficientes ipſius x utrobique ſint eædem, erunt $\frac{1}{2}p - 1 = 2p$ & $2\sqrt{2m} = mm$; unde diſcimus ſumendum eſſe $p = -\frac{2}{3}$ & $m = 2$; ergo radices duorum quadratorum quæſitorum erunt $-x^{-2}dx + 2x^{-\frac{2}{3}}dx$ & $-2x^{-\frac{4}{3}}dx + 1dx$, quarum itaque integralia $x^{-1} + 6x^{1:3}$ & $6x^{-1.3} + x$, ſeu, uſurpando expreſſiones communes, $1:x + 6\sqrt[3]{x}$ & $6:\sqrt[3]{x} + x$, dabunt coordinatas curvæ novæ ipſi Hyperbolæ ordinariæ longitudine æquales.

NB. Hæc Regula etiam porrigitur ad Parabolas & Hyperbolas in genere, cujuſvis ſint gradus.

P R O B L E M A III.

Invenire curvam algebraïcam, cujus partes ſint proportionales ſegmentis circuli.

Poſito radio circuli $= 1$, & abſciſſa ſuper diametro ex centro ſumta $= x$, erit elementum ſpatii circularis, ſeu differentia duorum ſemi-ſegmentorum $= dx\sqrt{(1 - xx)}$; hoc ergo in elementum curvæ alicujus transformandum eſt, quod ſic facio; quadratum elementi $1dx^2 - xxdx^2$ diſtribuatur in duo quadrata, latera habentia integrabilia; ſumendo pro uno $1dx^2 - 2mxxdx^2 + mmx^4dx^2$, & pro altero $2mxxdx^2 - xxdx^2 - mmx^4dx^2$, [hæc enim ſimul faciunt $1dx^2 - xxdx^2$]; eorum autem latera ſunt $\pm 1dx \mp mxxdx$ & $xdx\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, quorum integralia $\pm x \mp \frac{1}{3}mx^3$, & $\frac{2m - 1 - mmxx}{3mm}\sqrt{(2m - 1 - mmxx)}$, erunt coordinatæ quæſitæ.

PRO-

P R O B L E M A IV.

Data portione curvæ parabolicæ communis; invenire aliam curvam algebraicam, cum qua juncta illa portio parabolica ſit rectificabilis.

Conf. Num. XLIX, Tom. I, *pag.* 251.

Eſto propoſita portio parabolica A B, vertex A, ſemi-parameter A D; centro A & ſemiaxe tranſverſo A D deſcripta Hyperbola æquilatera DE, facit [ut notum eſt] ſpatium A D E C æquale rectangulo ſub recta D A & curva A B; huicque per conſequens proportionale. Si ergo etiam ad complementum hujus ſpatii, nempe ad D F E, invenitur curva proportionalis, erit utique inventa, una cum data A B, proportionalis toti ſpatio, ſeu rectangulo CF; adeoque rectificabilis. Id autem ſic efficitur: Ponatur $AD = a$, $DF = x$; erit $FE = \surd(2ax + xx)$ & quadratum different. ſpatii $DFE = 2axdx^2 + xxdx^2$, quod manifeſte diſtribuitur in duo quadrata $2axdx^2$ & $xxdx^2$ latera habentia $dx\surd 2ax$ & xdx integrabilia; quippe quæ ſunt $\frac{2}{3}x\surd 2ax$ & $\frac{1}{2}xx$. Si igitur fiat nova curva A G, cujus coordinatæ A H, H G ſint $xx : 2a$ & $2x\surd 2ax : 3a$, erit compoſita G A B rectificabilis, nempe æqualis rectangulo CF diviſo per AD. TAB. LXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 1.

S C H O L I U M.

Ut habeatur natura curvæ A G, ponatur A H, ſeu $xx : 2a = r$, & H G ſeu $2x\surd 2ax : 3a = t$; reperietur hæc æquatio $512ar^3 = 81t^4$, quæ docet curvam AG eſſe Parabolam cubico-biquadraticam, cujus parameter $= \frac{512}{81}a = 6\frac{26}{81}a = 3\frac{13}{81}$ parametri Parabolæ propoſitæ. Poterit jam, omiſſa Hyperbola DE, Problema confici. Eſt enim BI normalis ad Parabolam æqualis ipſi FA, ideoque centro I, radio IL ſubtangente, æquali nimirum ſemi-parametro DA, deſcriptus arcus LK relinquet $BK = x = DF$; quocirca ſi ad parametrum Parabolæ & ad BK ſumatur tertia proportionalis AH; erit, ducta applicata, arcus AG quæſitus, qui cum AB æquatur lineæ rectæ IM,

T 2 quæ:

quæ habetur prolongando CB, cui occurrit recta IM ad BI perpendicularis; erit enim $IM = \frac{IB \times BI}{LI} = \frac{AC \times CE}{AD}$.

PROBLEMA V.

Invenire curvam algebraïcam, cum qua datus arcus circuli ſit rectificabilis.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXIV. *Fig.* 2.

Sit ſemi-circulus EAF, centrum C, perpendicularis CA, arcus datus AB: qui multiplicatus per $\frac{1}{2}$ CA producit ſectorem CAB. Ductis AH & BG parallelis diametro occurrentibus perpendiculari EH; quæremus curvam algebraïcam, quæ multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA producat ſpatium AHGB: evidens enim eſt illam curvam ſatisfacturam, quippe quæ cum arcu AB conjuncta, & multiplicata per $\frac{1}{2}$ CA, producit rectilineum CAHGBC. Illam autem invenimus hoc modo: Sit $CA = a$, $CD = x$, erit differentiale ſpatii $AHGB = (ax - xx)\,dx : \surd(aa - xx)$, adeoque elementum curvæ quæſitæ $= (2x - 2xx : a)\,dx : \surd(aa - xx)$; cujus quadratum $(4xx - \frac{8x^3}{a} + \frac{4x^4}{aa})\,dx^2 : (aa - xx)$ diſtribuendum eſt duas partes latera habentes integrabilia. Ponantur pro lateribus quæſitis $(mx \surd(1 : a) + nxx \surd(1 : a^3))\,dx : \surd(a - x)$, & $(px \surd(1 : a) + qxx \surd(1 : a^3))\,dx : \surd(a + x)$; horumque quadrata $(mmxx : a + 2mnx^3 : aa + nnx^4 : a^3)\,dx^2 : (a - x)$ & $(ppxx : a + 2pqx^3 : aa + qqx^4 : a^3)\,dx^2 : (a + x)$ in unam ſummam collecta

$$\left.\begin{array}{l} +mmxx + 2mnx^3 : a + nnx^4 : aa \\ \qquad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3 \\ +ppxx + 2pqx^3 : a + qqx^4 : aa \\ \qquad - ppx^3 : a - 2pqx^4 : aa - qqx^5 : a^3 \end{array}\right\} dx^2 : (aa - xx)$$

debent æquari quadrato elementi curvæ quæſitæ $(4xx - 8x^3 : a + 4x^4 : aa)\,dx^2 : (aa - xx)$; ideoque ſi omiſſo denominatore communi $aa - xx$, æquationes inſtituantur inter terminos pari utrobique dimenſione ipſius x affectos, nempe $mm + pp = 4$

$2mn$

N.° CLX.

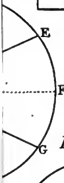


Fig. 2.

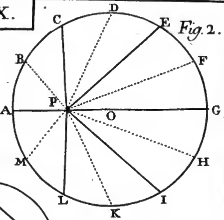


Fig. 3.

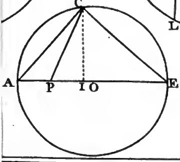


Fig. 1.

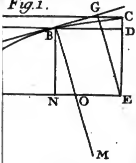
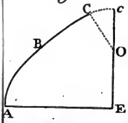


Fig. 3.



N.° CLXIV.

Fig. 1.

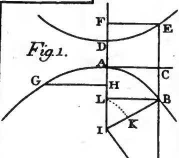
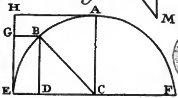


Fig. 2.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

$2mn + mm + 2pq — pp = — 8$, $nn + 2mn + qq — 2pq = 4$, & $nn — qq = 0$, quibus reductis incipiendo a poſtrema æquatione, reperietur tandem hæc æquatio $n^8 + 24n^4 + 16 = 8n^6 + 32nn$. Quæ ut porro reduci poſſit, ſubtrahendum eſt ab utroque membro $32n^4$ & remanebit $n^8 — 8n^4 + 16 = 8n^6 — 32n^4 + 32nn$; extracta utrobique radice, provenit $n^4 — 4 = (2n^3 — 4n)\surd 2$; diviſo utroque per $nn — 2$, habebitur $nn + 2 = 2n\surd 2$, adeoque $n = \surd 2$; unde ſi per calculum quærantur valores reliquarum litterarum, patebit omnes inter ſe & ipſi n fore æquales; nimirum $q = p = m = n = \surd 2$; hoc tamen cum diſcrimine ut ſi n & q ſint affirmativæ, reliquæ m & p debeant eſſe negativæ, vel vice verſa; $q = — p = — m = n = \pm \surd 2$; erunt itaque $(\mp x\surd(2:a) \pm xx\surd(2:a^3))\,dx : \surd(a — x)$ & $\mp x\surd(2:a) \pm xx\surd(2:a^3)\,dx : \surd(a + x)$ differentiales coordinatarum curvæ quæſitæ, quarum ergo integrales $(\pm 4aa \pm 2ax \mp 6xx)\surd(2a — 2x) : 15a\surd a$, & $(\pm 12aa \mp 6ax \pm 2xx)\surd(2a + 2x) : 5a\surd a$ dabunt ipſas coordinatas, adeoque etiam ipſam curvam algebraicam quæſitam. *Q. E. F.*

Hæc ergo curva, una cum arcu AB, erit æqualis ſpatio CAHGB diviſo per $\frac{1}{2}a$, æquali $2a — \frac{2a + x}{a}\surd(aa — xx) =$ lineæ rectæ. Unde in caſu CD = CE, erit compoſitum ex arcu, ſeu quadrante AE, & curva, æquale diametro.

A L I T E R.

Sit jam $ED = x$; erit, per prius dicta, quadratum elementi curvæ quæſitæ $(4xx — 8x^3 : a + 4x^4 : aa)dx^2 : (2ax — xx)$; quod ut diſtribui poſſit in duas partes latera habentes integrabilia, ponatur pro lateribus quæſitis $(mx\surd(1:a) + nxx\surd(1:a^3))\,dx : \surd(2a — x)$ & $(px\surd(1:a) + qxx\surd(1:a^3))\,dx : \surd x$, quorum quadrata ſi in unam colligantur ſummam provenit

$$\frac{\begin{array}{l}2ppxx + 4pqx^3 : a + 2qqx^4 : aa \\ \quad — ppx^3 : a — 2pqx^4 : aa — qqx^5 : a^3 \\ \quad + mmx^3 : a + 2mnx^4 : aa + nnx^5 : a^3\end{array}}{2ax — xx}dx^2 = \frac{4xx — 8x^3 : a + 4x^4 : aa}{2ax — xx}dx^2$$

inſtitutis æquationibus inter terminos homogeneos, pervenitur ad hanc æquationem $n^4 + 2n^3\sqrt{2} + 4nn + 4n\sqrt{2} + 4 = 0$, cujus radix eſt $n = -\sqrt{2}$; reliquis factis, ut ſupradictum, reperietur iterum $q = -p = -m = n = \pm\sqrt{2}$. Erunt itaque $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx\sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{(2a - x)}$ & $(\mp x\sqrt{(2:a)} \pm xx \sqrt{(2:a^3)})dx : \sqrt{x}$ differentiales coordinatarum curvæ quæſitæ, quarum ergo integrales $(\mp 8aa \mp 2ax \mp 2xx)\sqrt{(4a - 2x)} : 5a\sqrt{a}$ & $(\mp 10ax \pm 6xx)\sqrt{2x} : 15a\sqrt{a}$ dabunt coordinatas ipſas, hoc eſt curvam quæſitam, quæ cum arcu BE erit = ſpatio CBGE diviſo per $\frac{1}{2}a = \frac{a+x}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$ = lineæ rectæ. Unde in caſu ED = EC, erit arcus, ſeu quadrans AE, cum curva, æqualis diametro, ut ante.

N°. CLXV.

DE EVOLUTIONE

SUCCESSIVA ET ALTERNANTE

Curvæ cujuſcunque in infinitum continuata, tandem Cycloidem generante;

SCHEDIASMA CYCLOMETRICUM.

TAB. LXXVIII N°. CLXV. SIT curva quælibet ADB, cujus tangentes in A & B ad ſe invicem perpendiculares, atque ideo oppoſitis coordinatis parallelæ; productis itaque axe CA & tangente BF in infinitum, evolvi intelligatur ADB, incipiendo evolutionem in A; quæ inde deſcribitur AEF, evolvatur quoque incipiendo a fine F, & inde deſcripta FGH porro evolvatur initio facto ab H, & ſic fiat in infinitum alterna evolutio, inchoando quamlibet evolutionem a puncto in quo præcedens finitur. Dico poſt evolutiones in infinitum continuatas, curvas tunc poſtremo generatas fore Cycloides identicas, qualiſcunque fuerit primitiva curva ADB, ex qua reliquæ generantur. Et quidem

tam

tam promte convergunt ad Cycloidem, ut, poſt paucas evolutiones, ab ea ſenſibiliter non diſcrepent generatæ per evolutionem.

Hujus rei veritas attente conſideranti facile patebit.

Sit nunc ADB quadrans circuli, cujus longitudo dicatur $= a$, radius CA vel CB $= 1$; dicantur etiam AEF $= b$, HIK $= c$, MNO $= e$, QRS $= f$, &c. Ex puncto quolibet D ducta tangente DE, agantur etiam tangentes EG, GI, IL, LN, &c. quæ alternatim ad ſe invicem erunt parallelæ, DE, GI, LN &c. ut & EG, IL, LP &c. conſtituuntque angulos rectos in, E, G, I, L &c.

Ponatur AD $= z$, erit $1 : dz =$ ED : dAE $=$ GE : dHG $=$ IG : dHI $=$ LI : dMC $=$ NL : dMN $=$ &c. Sunt autem ex natura evolutionis, rectæ ED, IG, NL, &c. æquales arcubus reſpective ſumtis AD, HG, ML, &c. Et rectæ GE, LI, PN, &c. $=$ FE, KI, ON &c. hoc eſt $= b -$ AE, $c -$ HI, $e -$ MN &c. Hinc invenitur AE $= \frac{zz}{1.2}$, HG $= bz - \frac{z^3}{1.2.3}$ HI $= \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$, ML $= cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$, MN $= \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$; QP $= ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$, QR $= \frac{ezz}{1.2} - \frac{ez^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}$ &c. His in ordinem digeſtis, ſequentes duas formo Tabellas, quarum prior ſervit pro curvis, quæ tangunt inferiorem parallelam CQ, altera pro iis, quæ tangunt ſuperiorem BS.

TAB. I.

$$AE = \frac{zz}{1.2}$$

$$HI = \frac{bzz}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4}$$

$$MN = \frac{czz}{1.2} - \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3..6}$$

$$QR = \frac{ezz}{1.2} - \frac{cz^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^6}{1.2.3..6} - \frac{z^8}{1.2.3....8}.$$

&c. = &c.

TAB. II.

$$AD = z$$

$$HG = bz - \frac{z^3}{1.2.3}$$

$$ML = cz - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$$

$$QP = ez - \frac{cz^3}{1.2.3} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3...7}$$

&c. = &c.

Abeunte D in B, fiet $z = a$; quo ſubſtituto ubique, habebitur AEF ſeu b, HIK ſeu c, MNO ſeu e, QRS ſeu f, &c. earumque evolutæ, ADB, HGF, MLK, QPO &c. unde ſequentes duæ conduntur Tabulæ.

TAB. III.

$$AEF = b = \frac{aa}{1.2}$$

$$HIK = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$$

$$MNO = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3..6}$$

$$QRS = f = \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3...8}$$

&c. $= g =$ &c.

TAB. IV.

Digitized by Google

TAB. IV.

$$ADB = a$$
$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.\,2.\,3}$$
$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.\,2.\,3} + \frac{a^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$
$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.\,2.\,3} + \frac{ba^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{a^7}{1.\,2.\,3 \ldots 7}$$
$$\&c. = \&c.$$

Quod ſi jam appropinquare lubeat ad determinandam veram rationem diametri ad circumferentiam Circuli, ſumo aliquam ex curvis TAB. III determinatis, tanquam veram Cycloïdem conſiderando, utpote a qua poſt paucas evolutiones nihil fere diſcrepat: deinde ſubſtituo ſucceſſive valores ipſarum b, c, e &c. donec perveniam ad curvam quam ſeligo, ex. gr. ad QRS, quæ poſt ſeptimam evolutionem producitur; & ſic oriuntur longitudines ſingularum curvarum per quadrantes circulares expreſſæ, ut videre eſt in ſequenti Tabella.

TAB. V.

$$AEF = b = aa \times \frac{1}{1.\,2}$$
$$HIK = c = a^4 \times \frac{5}{1.\,2.\,3\,4}$$
$$MNO = e = a^6 \times \frac{61}{1.\,2.\,3 .. 6}$$
$$QRS = f = a^8 \times \frac{1385}{1.\,2.\,3 \ldots 8}$$

Cum itaque QRS habeatur pro ſemi-Cycloide, cujus baſis eſt erecta perpendicularis QT = CB = 1, & proinde ST diameter circuli ejus generatoris, cujus diametri duplum = QRS; erit QT: 2ST [QRS] = ut ſemicircumferentia ad 2 diametros = ADB: 2AC. Adeoque $1 : a^8 \times \frac{1385}{1.2.3 \ldots 8} = a : 2$;

Digitized by Google

unde ſequitur $a^9 = \frac{2 \times 1.2.3.4 \ldots 8}{1385} = \frac{16128}{277}$; atque extracta radice nonæ poteſtatis, fit $a = \frac{135}{86}$, ſeu $4a = \frac{270}{43}$, hoc, eſt, circumferentia continet radium $6\frac{12}{43}$, ipſumque adeo diametrum $3\frac{6}{43}$ vicibus, quod monſtrat rationem paulo minorem *Archimedea*, quæ eſt $3\frac{1}{7}$, vel $3\frac{6}{42}$. Per logarithmos calculus eſt facilior.

SCHOLIUM.

Poteſt autem facilius indagari ratio inter circumferentiam circuli & diametrum, ſine extractione radicum, & ſine comparatione Cycloidis: Conſiderando nimirum, poſt evolutiones multoties repetitas, tandem longitudines curvarum utriuſque ordinis convergere ad ſenſibilem æqualitatem. Quocirca ſi æquatio inſtituatur inter curvas utriuſque ordinis, ſat bene a prima remotas, quarum una ex altera generatur, ex. gr. QRS ex QPO, dabitur ſtatim ratio inter quadrantem circularem ejuſque radium quam proxime; etenim valor generatæ expreſſus per a ad poteſtatem elevatam cujus exponens æqualis eſt numero curvarum, ſemper una tantum dimenſione major eſt, quam valor curvæ generantis, ſeu immediate præcedentis.

Condenda eſt in hunc finem Tabula VI, ex ſupputatione curvarum Tab. IV, exhibitarum; eaque ita ſe habet, ut monſtrat Tabula ſequens.

TAB. VI.

$$ADB = a$$

$$HGF = ba - \frac{a^3}{1.2.3} = a^3 \times \frac{2}{1.2.3}$$

$$MLK = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} = a^5 \times \frac{16}{1.2.3.4.5}$$

$$QPO = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3 \ldots 7} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3 \ldots 7}.$$

Ponamus

Ponamus itaque QRS $=$ QPO, & habebimus $a^8 \times \frac{1385}{1.2.3...8} = a^7 \times \frac{272}{1.2.3...7}$; unde dividendo per a^7, & reducendo numeros ad unam partem, obtinemus ſtatim $a = \frac{2176}{1385}$, adeoque $2a = \frac{4352}{1385}$, & ſic erit ſemicircumferentia ad radium, ſive tota circumferentia ad diametrum, ut 4352 ad 1385. Ut pateat quam parum abludat a proportione *Archimedea*, fiat ut 22 ad 7, ita 4352 ad quartum, qui erit $1384\frac{8}{11}$, hoc eſt $\frac{3}{11}$ unitatis minor quam 1385, adeoque noſtra analogia tantillo minor eſt, quam *Archimedea*. Scimus autem *Archimedeam* [utpote juſto majorem] in exceſſu peccare; noſtra igitur propius ad veram accedit.

Si quis vellet Tabulas noſtras 5^{am} & 6^{am} per aliquot adhuc gradus continuare, perveniret ſtatim ad numeros rationis incredibili modo veris appropinquantis.

Volumus autem utramque Tabulam una curva augere, quod, quomodo fiat; facile patet ex lege progreſſionis litterarum *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, &c. atque lubet binas iſtas Tabulas conflare in unam Tab. VII extenſam ad decimam curvam a quadrante circuli ADB incluſive ſumpto. Ubi notandum, curvam ipſam ADB vocari I; AEF, II; HGF, III; HIK, IV, MLK, V; & ita ſequentes. Tabula VII, quæ inde formatur, hæc eſt.

TAB.

TAB. VII.

$$\text{Curva I} = a$$

$$\ldots\ldots\ \text{II} = b = \frac{aa}{1.2}$$

$$\ldots\ldots\ \text{III} = ba - \frac{a^3}{1.2.3}$$

$$\ldots\ldots\ \text{IV} = c = \frac{baa}{1.2} - \frac{a^4}{1.2.3.4}$$

$$\ldots\ldots\ \text{V} = ca - \frac{ba^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}$$

$$\ldots\ldots\ \text{VI} = e = \frac{caa}{1.2} - \frac{ba^4}{1.2.3.4} + \frac{a^6}{1.2.3\ldots6}$$

$$\ldots\ \text{VII} = ea - \frac{ca^3}{1.2.3} + \frac{ba^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3..7}$$

$$\ldots\ \text{VIII} = f - \frac{eaa}{1.2} - \frac{ca^4}{1.2.3.4} + \frac{ba^6}{1.2.3..6} - \frac{a^8}{1.2.3..8}$$

$$\ldots\ \text{IX} = fa = \frac{ea^3}{1.2.3} + \frac{ca^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ba^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{a^9}{1.2.3\ldots9}$$

$$\text{X} = g = \frac{faa}{1.2} - \frac{ea^4}{1.2.3.4} + \frac{ca^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{ba^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{a^{10}}{1.2.3\ldots10}$$

$$\text{XI} = ga - \frac{fa^3}{1.2.3} + \frac{ea^5}{1.2.3.4.5} - \frac{ca^7}{1.2.3\ldots.7} + \frac{ba^9}{1.2.3..9} - \frac{a^{11}}{1.2.3\ldots11}$$

$$\text{XII} = h = \frac{gaa}{1.2} - \frac{fa^4}{1.2.3.4} + \frac{ea^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{ca^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{ba^{10}}{1.2.3\ldots10} - \frac{a^{12}}{1.2.3\ldots12}$$

Generatio & continuatio hujus Tabulæ fiet manifeſta, modo attendatur ad progreſſionem litterarum, b, c, e &c. & unius cujuſque conſtructio ex præcedentibus. Aliquid laboris requiritur ad ſupputandos ſingularum litterarum valores; reperi autem [ſalvo errore calculi] fore eos, ut ſequitur in hoc adjecto laterculo.

TAB.

Digitized by Google

TAB. VIII.

$$
\begin{aligned}
&\text{Curva I} = a = a\,(1)\\
&\ldots\ \text{II} = b = a^{2}\left(\frac{1}{1.2}\right)\\
&\ldots\ \text{IV} = c = a^{4}\left(\frac{5}{24}\right) = a^{4}\left(\frac{5}{1.2.3.4}\right)\\
&\ldots\ \text{VI} = e = a^{6}\left(\frac{61}{1.2.3\ldots6}\right)\\
&\ldots\ \text{VIII} = f = a^{8}\left(\frac{1385}{1.2.3\ldots8}\right)\\
&\ldots\ \text{X} = g = a^{10}\left(\frac{50521}{1.2.3\ldots10}\right)\\
&\ldots\ \text{XII} = h = a^{12}\left(\frac{2702765}{1.2.3\ldots12}\right).
\end{aligned}
$$

Ex his facile ſupputantur curvæ intermediæ numerorum imparium: Erunt namque ordine, ut ſequens monſtrat laterculus.

TAB. IX.

$$
\begin{aligned}
&\text{Curva III} = a^{3}\left(\frac{2}{1.2.3}\right)\\
&\ldots\ \text{V} = a^{5}\left(\frac{16}{1.2.3.4.5}\right)\\
&\ldots\ \text{VII} = a^{7}\left(\frac{272}{1.2.3\ldots7}\right)\\
&\ldots\ \text{IX} = a^{9}\left(\frac{7936}{1.2.3\ldots\ldots9}\right)\\
&\ldots\ \text{XI} = a^{11}\left(\frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11}\right)
\end{aligned}
$$

Diſponendo nunc ambos laterculos ſecundum ordinem curvarum, prodit

T A B. X.

Curva I $= a\,(1)$

.... II $= a^2\,(\frac{1}{1.2})$

.... III $= a^3\,(\frac{2}{1.2.3})$

.... IV $= a^4\,(\frac{5}{1.2.3.4})$

.... V $= a^5\,(\frac{16}{1.2.3.4.5})$

.... VI $= a^6\,(\frac{61}{1.2.3\ldots 6})$

.... VII $= a^7\,(\frac{272}{1.2.3\ldots 7})$

.... VIII $= a^8\,(\frac{1385}{1.2.3\ldots 8})$

.... IX $= a^9\,(\frac{7936}{1.2.3\ldots 9})$

.... X $= a^{10}\,(\frac{50521}{1.2.3\ldots 10})$

.... XI $= a^{11}\,(\frac{353792}{1.2.3\ldots 11})$

.... XII $= a^{12}\,(\frac{2702765}{1.2.3\ldots 12})$

.... XIII $= a^{13}\,(\frac{22368256}{1.2.3\ldots 13})$

.... XIV $= a^{14}\,(\frac{199360981}{1.2.3\ldots 14})$

Videamus nunc, quam promte convergant longitudines curvarum ad æqualitatem, & inde appropinquetur mira celeritate ad veram rationem inter quadrantem circuli & radium; id quod fit æquando ſucceſſive ſingularum valores cum valore proxime inſequentis. Ponatur itaque

I =

Digitized by Google

I = II. hoc eſt, $a = aa\,(\frac{1}{1.2})$. unde $a:1$ ſeu ratio quadrantis ad radium $= 2:1$, juſto major.

II = III. h. e. $a^2(\frac{1}{2}) = a^3\,(\frac{2}{1.2.3})$: unde $a:1 = 3:2$, juſto minor.

III = IV. h. e. $a^3(\frac{2}{1.2.3}) = a^4\,(\frac{5}{1.2.3.4})$. unde $a:1 = 8:5$..major.

IV = V. h. e. $a^4(\frac{5}{1.2.3.4}) = a^5\,(\frac{16}{1.2.3.4.5})$. unde $a:1 = 25:16$..minor.

V = VI. h. e. $a^5(\frac{16}{1.2.3.4.5}) = a^6(\frac{61}{1.2.3....6})$. unde $a:1 = 96:61$..major.

VI = VII. h. e. $a^6(\frac{61}{1.2.3....6}) = a^7(\frac{272}{1.2.3....7})$. unde $a:1 = 427:272$..minor.

VII = VIII. h. e. $a^7\,(\frac{272}{1.2.3....7}) = a^8\,(\frac{1385}{1.2.3..8})$. unde $a:1 = 2176:1385$..major.

VIII = IX. h. e. $a^8(\frac{1385}{1.2.3..8}) = a^9(\frac{7936}{1.2.3..9})$. unde $a:1 = 12456:7936$..minor.

IX = X. h. e. $a^9\,(\frac{7936}{1.2.3.9}) = a^{10}(\frac{50521}{1.2.3...10})$. unde $a:1 = 79360:50521$..major.

X = XI. h. e. $a^{10}(\frac{50521}{1.2.3..10}) = a^{11}(\frac{353792}{1.2.3...11})$. unde $a:1 = 555731:353792$..minor.

XI = XII. h. e. $a^{11}(\frac{353792}{1.2.3..11}) = a^{12}(\frac{2702765}{1.2.3..12})$. unde $a:1 = 4245504:2702765$.major.

XII = XIII. h. e. $a^{12}\,(\frac{2702765}{1.2.3...12}) = a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13})$. unde $a:1 = 35135945:22368256$.min.

XIII = XIV. h. e. $a^{13}(\frac{22368256}{1.2.3....13}) = a^{14}(\frac{199360981}{1.2.3....14})$. unde $a:1 = 313155584:199360981$.maj.

&c. = &c.

Sumendo antecedentium quadrupla, habebimus rationes appropinquantes circumferentiæ ad radium, vel faciendo, ut quilibet conſequens ad quadruplum antecedentis, ita radius, qui ponatur = 10, 000, 000, ad quartum, qui dabit numerum partium circumferentiæ, ad verum celeriter accedentem. Fiat itaque

1°. 1 : 8 = 10, 000, 000 : 80, 000, 000, qui numerus juſto major eſt.
2°. 2:12 = 10, 000, 000 : 60, 000, 000, qui juſto minor eſt.
3°. 5:32 = 10, 000, 000 : 64, 000, 000, juſto major.
4°. 16:100 = 10,000,000:62,500,000, juſto minor.
5°. 61:384 = 10, 000, 000 : 62, 950 , 820, juſto major.
6°. 272:1708 = 10, 000,000 : 62, 794, 117, juſto minor.
7°. 1385:8704 = 10, 000, 000 : 62, 844, 766, juſto major.
8°. 7936:49860 = 10, 000, 000 : 62, 827, 621, juſto minor.
9°. 50521:317440 = 10, 000, 000: 62,833, 277, juſto major.
10°. 353792:2222924 = 10, 000, 000 : 62, 831, 381, juſto minor.
11°. 2702765:16982016 = 10, 000, 000 : 62, 832, 011, juſto major.
12°. 22368256:140543780 = 10,000,000:62,831, 800, juſto minor.
13°. 199360981:1252462336 = 10, 000,000:62,831,871, juſto major.

N°. CLXVI.

P R O B L E M A.

In ſuperficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta breviſſimam.

SOLUTIO *.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 1.

SIT AE $= x$, EB $= y$, & a puncto B erigi intelligatur recta B$b = z$, normalis ad planum AEB & ſuperficiei curvæ occurrens in b, & detur æquatio quævis exprimens relationem trium coordinatarum x, y, z, qua relatione natura ſuperficiei determinatur.

Eſto jam linea quæſita lbc, a cujus ſingulis punctis l, b, c cadere intelligantur in ſubjectum planum AEB normales lL, bB, cC, formantes projectionem [curvæ quæſitæ] LBC. Concipiatur planum IBb, cujus ſectio communis cum plano AEB, quæ

* *Hanc Solutionem communicavit Auctor cum Cl.* KLINGENSTIERNA *in Univerſitate* Upſalenſi *Matheſeos Profeſſore ſub finem Anni* 1728, *quam ipſe* KLINGENSTIERNA *poſtea ita in chartam conjecit, ut hic extat.*

Digitized by Google

quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC, quare planum IB*b* curvam quæſitam *lbc* ſtringet in elemento *bc*.

Concipiatur etiam planum *b*GI ſuperficiem curvam tangens in *b*, & occurrens plano AEB in communi ſectione GI, ac plano IB*b* in communi ſectione *b*I, quæ [quia utrumque planorum *b*GI & IB*b* curvam quæſitam ſtringit in elemento *bc*] erit productio ejuſdem elementi *bc*, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur BE, donec ſectioni IG occurrat in G, & a puncto G demittatur ad BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IB*b*. A puncto H demittatur in rectam *b*I normalis H*h*, & a puncto *b* in rectam *c*C normalis *be*. His factis, dicatur $EF = BD = dx$, $DC = dy$, $BC = be = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, $ce = dz$, ſubtangens BG, quæ ex natura ſuperficiei datur in x, y & z, $= T$.

Fundamentum Solutionis ſequentis in eo conſiſtit, quod planum per tria curvæ quæſitæ puncta infinite propinqua tranſiens, rectum ſit ad planum quod ſuperficiem curvam tangit. Quærendi itaque ſunt duo anguli: unus quem planum contingens *b*GI facit cum plano IB*b*; alter vero, quem planum per tria curvæ quæſitæ puncta tranſiens facit cum eodem plano IB*b*. Inventis his angulis, ſtatuenda eſt eorum ſumma æqualis angulo recto, & habebitur æquatio Problemati ſatisfaciens.

Hunc in finem ita procedendum: Ob ſimilitudinem triangulorum CBD, BGH, eſt CB $[ds]$: BD $[dx] =$ BG $[T]$: GH; unde $GH = T dx : ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, GBH, eſt BC $[ds]$: CD $[dy] =$ GB $[T]$: BH; unde $BH = T dy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum *ceb*, *b*BI, eſt *ce* $[dz]$: *eb* $[ds] = b$B $[z]$: BI; unde $BI = z\,ds : dz$.

Ex BI $[z\,ds : dz]$ ſubtrahatur BH $[T dy : ds]$, & relinquitur $IH = z\,ds : dz - T dy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum *bce*, IH*h*, eſt *bc* $[\sqrt{(ds^2 + dz^2)}]$: *ce* $[dz] =$ IH $[\frac{z\,ds}{dz} - \frac{T\,dy}{ds}]$: H*h*; unde H*h*

$=[\frac{z\,ds}{dz} - \frac{T\,dy}{ds}]\times dz : \sqrt{(ds^2+dz^2)} = (z\,ds^2 - T\,dy\,dz) : ds\sqrt{(ds^2+dz^2)}$.

Jam quia GH normalis eſt ad planum IB*b* & H*b* normalis ad rectam *b*I, quæ eſt ſectio communis planorum IB*b* & *b*GI, erit triangulum H*b*G in plano ad utrumque planorum IB*b* & *b*GI recto; adeoque, ob angulum GH*b* rectum, *b*H : HG = radius : tang. anguli inclinationis H*b*G. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis H*b*G $= \frac{HG}{Hb}$ $= \frac{T\,dx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{z\,ds^2 - T\,dy\,dz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæſitæ *lbc* puncta infinite propinqua tranſiens facit cum plano IB*b*, ita inveſtigatur.

TAB. LXXIX N°. CLXVI. *Fig.* 2, & 3. In projecta LBC [*Fig.* 2, concipienda eſt ut portio infinite parva ſuperficiei cylindroïdicæ, plicatæ in linea *b*B, ita ut LB & BC ſint duo elementa curvæ LBC, quæ eſt baſis cylindroïdis] ſint tria puncta L, B, C, quorum diſtantiæ LB, BC ſint æquales & infinite parvæ; ſintque in curva quæſita *lbc* tria puncta correſpondentia *l*, *b*, *c*, per quæ tranſeat dictum planum. Producantur LB ad ϭ [*Fig* 3], & *lb* ad β, ut fiant Bϭ = BC, & $b\beta = bc = bp$, factiſque reliquis, ut in figura, & poſitis LB = BC = ds conſtantibus, erit $fe = -ddz$, & ob ſimilitudinem triangulorum *bce*, *fcp*, *bc* [$\sqrt{(ds^2+dz^2)}$] : *be* [ds] = *fc* [$-ddz$] : *cp*; unde $cp = -ds\,ddz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}$. Ut inveniatur $p\beta$, ſeu quæ ipſi æqualis cenſeri debet, Cϭ, ſit [*Fig.* 3] curva projecta LBC, BC = ds, BD = dx, CD = dy, tangens ad B recta Bϭ, in quam a puncto C cadat normalis Cϭ & a puncto ϭ in CD normalis ϭO.

Ob ſimilitudinem triangulorum BCD ϭCO, erit BD [dx] : BC [ds] = CO [ddy] : Cϭ. Ergo Cϭ $= ds\,ddy . dx = p\beta$.

Jam quia cp & $c\beta$ normales ſunt ad bc, quæ eſt communis ſectio plani IB*b* ſeu CB*b*, & plani per tria puncta *l*, *b*, *c*, tranſeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque iſtorum pla-

planorum recto, adeoque ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp:p\beta$ = radius : tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta$, $= \frac{p\beta}{cp}$ $= \frac{dsddy:dx}{-dsddz:\sqrt{(ds^2+dz^2)}} = \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}$.

Quoniam igitur per fundamentum Solutioni præmiſſum, angulus $pc\beta$ + angulo HhG [*Fig.* 1] = angulo recto; erit productum tangentium iſtorum angulorum = quadrato radii = 1. Unde ducta tangente anguli $pc\beta$, modo inventa, $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}:dxddz$ in tangentem anguli HhG, quæ ſupra inventa erat $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}:(zds^2-Tdydz)$, habetur æquatio Problemati ſatisfaciens; $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2-Tdydz} \times \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz} = 1$, vel $(ds^2+dz^2)\,Tddy = (Tdzdy - zds^2)\,ddz$.

SCHOLIUM I. *

Hic eſt animadvertendum, quod Cl. KLINGENSTIERNA omiſit, poſſe ſcil. ſuperficiem curvam datam etiam conſiderari ſectam planis parallelis ipſi AE per puncta B tranſeuntibus & plano AEB perpendicularibus, quæ ſectiones facient in ſuperficie curva, alias lineas curvas datas, quarum ſubtangentes ad ſingula puncta B ſpectantes dicantur $= \theta$. Unde mutatis T in θ, dy in dx, & ddy in ddx, prodibit hæc alia æquatio Problemati ſatisfaciens $(ds^2+dz^2)\,\theta ddx = (\theta dzdx - zds^2)\,ddz$; aut quia $-dxddx = dyddy$, prodibit multiplicando per $-Tdx:dy$, $(ds^2+dz^2)\,\theta Tddy = (-\theta Tdzdx^2:dy + Tzdxds^2:dy)\,ddz$. Eſt autem, quod facile demonſtrari poteſt generaliter pro quacunque curva in ſuperficie ad lubitum deſcripta, ſemper $\frac{\theta dy+Tdx}{\theta T} = \frac{dz}{z}$, adeoque $\theta Tdz = \theta zdy + Tzdx$; unde ſubſtituto valore ipſius θTdz, in æquatione ultimo inventa, reſultabit $(ds^2+dz^2)\,\theta Tddy = (-\theta zdx^2 - Tzdx^3:dy + Tzdx$ TAB. LXXIX N°. CLXVI. *Fig.* 1.

* *Scholii hujus, ut & ſequentium ſunt ipſius Authoris verba.*

$Tzdxds^2 : dy)ddz =$ [ſubſtituendo dy^2 pro $ds^2 - dx^2$]; $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$. Ponantur porro loco θT & z, eorum proportionales $\theta dy + Tdx$ & dz; abit æquatio in hanc $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, hoc eſt, $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$.

Nota. Eadem æquatio immediate deducitur etiam ex primo inventa $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$. Hanc enim multiplicando per θ, & poſtea pro θTdz ſubſtituendo ejus valorem $\theta zdy + Tzdx$, oritur $(ds^2 + dz^2)\theta Tddy = (\theta zdy^2 + Tzdydx - \theta zds^2)ddz =$ [ob $dy^2 - ds^2 = -dx^2$] huic $(-\theta dx^2 + Tdydx)zddz$, ſcriptoque $\theta dy + Tdx$ & dz pro θT & z, quibus ſunt proportionales; habebitur $(ds^2 + dz^2) \times (\theta dy + Tdx)ddy = (-\theta dx^2 + Tdydx)dzddz$, & proinde $\frac{dzddz}{ds^2+ds^2} =$ $\frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ut ante.

Pro tribus coordinatis x, y, z, ſcribatur t, x, y; ſitque æquatio naturam ſuperficiei curvæ exprimens, ut facit Cel. EULERUS *, hæc $Pdx = Qdy + Rdt$; erit [ponendo $dt = 0$] $Pdx = Qdy$, adeoque $P : Q = dy : dx = y : T$, unde $T = Qy : P$; ponendo nunc $dx = 0$, erit $Qdy = -Rdt$, id eſt, $-R : Q = dy : dt = y : \theta$, hinc $\theta = -Qy : R$. Quare in formula mea $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ſi pro x, y, z, T, θ, ſcribatur reſpective $t, x, y, Qy : P, -Qy : R$, & pro ds, quod mihi conſtans ſupponitur, ponatur $\sqrt{(dt^2 + dx^2)}$, prodibit $\frac{Pddt + Rddx}{Pdt + Rdx}$ $= \frac{dyddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

Si in æquatione mea priori $(ds^2 + dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ litteræ *Eulerianæ* adhibeantur, & pro T ſcribatur $Qy : P$, emergit æquatio paulo ſimplicior $\frac{Qddx}{Qdxdy - Pdt^2 - Pdx^2}$ $= \frac{ddy}{dt^2+dx^2+dy^2}$.

In

* *Comment. Acad. Petrop.* Tom. III. pag. 110 ſeqq.

In altera vero, modo ſupra expoſita, $(ds^2 + dz^2)\,\theta ddx = (\theta dzdx - zds^2)\,ddz$, adhibitis rurſus litteris *Eulerianis*; ut pro θ ſcribendo $-Qy:R$, reſultat æquatio parum differens a præcedente $\frac{Qddt}{Qdtdy + Rdt^2 + Rdx^2} = \frac{ddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$.

Quod ſi conferantur membra priora harum duarum æquationum, redibit æquatio naturam ſuperficiei curvæ exprimens, $Pdx = Qdy + Rdt$, plane ut fieri oportuit: ſunt enim illæ duæ æquationes æquivalentes.

SCHOLIUM II.

Methodus hactenus explicata ſolvendi Problema de Linea breviſſima ducenda in ſuperficie data, inſervit etiam Solutioni aliorum hujuſmodi Problematum difficiliorum, ad quæ communes methodi mere analyticæ ægrius forſan, aut plane non pertingent. Ex. gr. proponatur hoc

PROBLEMA.

Ducere in ſuperficie data lineam curvam, cujus in puncto quolibet planum oſculans datam habeat inclinationem ad planum tangens ſuperficiem datam in eodem puncto.

Voco autem *planum oſculans*, quod tranſit per tria curvæ quæſitæ puncta infinite ſibi invicem propinqua.

SOLUTIO.

Si inclinationis angulus ſit omnino rectus, coincidit hoc Problema cum præcedente: eſt enim curva quæſita ipſa breviſſima, pro qua dedimus æquationem. Sit vero nunc angulus ille inclinationis obliquus, cujus tangens data ſit $= n$. Conſtat ex Theoremate meo in *Actis Lipſ.* 1722, menſ. Jul. publicato *, ſi duorum angulorum tangentes ſint a & b, fore tangentem eorum ſummæ $= (a+b):(1 - ab)$, ſumta nimirum unitate pro ſi-

* N°. CXXVII. pag. 527, 528. *Tom. II.*

nu toto, ſeu tangente anguli ſemirecti. Quandoquidem igitur angulus noſter inclinationis oſtenſus eſt, in Solutione præcedenti, conſtare ex duabus partibus, quarum una pro tangente habet $Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}:(zds^2 - Tdydz)$ quæ vocetur $= a$, alterius vero tangens $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}:dxddz$, quæ dicatur b; quibus ſubſtitutis in $(a+b):(1-ab)$, & quod provenit æquando ipſi n, habebitur $\left(\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}\right):$ $\left(1+\frac{Tddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}\right) = n$, ſeu $\frac{Tdx\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{zds^2 - Tdydz} + \frac{-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)}}{dxddz}$ $= \frac{nzds^2ddz - nTdydzddz + nTddy\times(ds^2+dz^2)}{zds^2ddz - Tdydzddz}$.

Reducto priori membro ad communem denominatorem, & poſterioris utroque termino per dx multiplicato, ita ut utrumque membrum etiam habeat communem denominatorem; quo proin neglecto, orietur $(Tdx^2ddz - zds^2ddy + Tdydzddy)$ $\times\sqrt{(ds^2+dz^2)} = nzds^2dxddz - nTdydxdzddz + nTdxddy$ $\times(ds^2+dz^2)$. Quæ æquatio ſi tractetur ut ſupra factum in *Nota* poſt *Scholium* I, eruetur, operatione rite peracta, hæc altera æquatio: $(\theta dxdyddz + Tdx^2ddz - \theta dxdzddy + Tdzdyddy)$ $\sqrt{(ds^2+dz^2)} = n\theta dx^2dzddz - nTdxdydzddz + (n\theta dyddy$ $+ nTdxddy)\times(ds^2+dz^2)$. Utraque igitur harum duarum æquationum ſatisfacit Problemati.

COROLLARIUM.

Dantur caſus ſpeciales, in quibus æquatio ſupra inventa $(ds^2$ $+dz^2)Tddy = (Tdzdy - zds^2)ddz$ ad differentias primas reduci poteſt. Sit v. gr. ſuperficies curva data ejus naturæ, ut omnes illius ſectiones, planis ad rectam AE normalibus factæ, ſint lineæ rectæ ordinatis EB parallelæ, cujus generis ſuperficies *Cylindroidicæ* appellari poſſunt. Hoc caſu ſubtangens T evadit infinita; adeoque zds^2 infinite parva, reſpectu $Tdzdy$. Deleta itaque zds^2, & reliquis æquationis terminis per T diviſis, oritur æquatio $(ds^2+dz^2)ddy = dzdyddz$; unde $ddy:dy = dzddz:$ (ds^2+dz^2); & multiplicando per 2, $2ddy:dy = 2dzddz:(ds^2+dz^2)$, ſumtiſ-

Digitized by Google

ſumtiſque integralibus per Logarithmos $lndy^2 = l(ds^2 + dz^2)$, factoque tranſitu ad numeros, $ndy^2 = ds^2 + dz^2$. Quoniam in hoc caſu z datur per x & conſtantes, ponatur $dz = pdx$, intelligendo per p quantitatem utcunque datam in x & conſtantibus, & pro ds^2 ſcribatur ejus valor $dx^2 + dy^2$, & mutatur æquatio inventa in hanc: $ndy^2 = dx^2 + dy^2 + ppdx^2$ vel $(n-1)dy^2 = (1+pp)dx^2$, extractaque radice quadrata $dy\sqrt{(n-1)} = dx\sqrt{(pp+1)}$. Jam manifeſtum eſt, membrum hujus æquationis poſterius $dx\sqrt{(pp+1)}$ deſignare elementum arcus curvæ, cujus coordinatæ ſunt x & $\int pdx$, ſeu z; id eſt curvæ generatricis Cylindroidis. Si itaque arcus ille dicatur A, erit $dy\sqrt{(n-1)} = dx\sqrt{(pp+1)} = dA$, ſumtiſque integralibus $y\sqrt{(n-1)} = A$; id eſt ordinata curvæ projectionis eſt ad arcum curvæ generatricis Cylindroidis ut 1 ad $\sqrt{(n-1)}$, ſeu in ratione conſtante; quod aliunde non difficulter colligitur, & bonitatem Solutionis præcedentis confirmat.

SCHOLIUM III.

Poteſt perveniri modo elegantiori ad æquationem noſtram ſupra inventam $\frac{dz\,ddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$, ſine operoſa ſupputatione anguli inclinationis $H b G$ quem nimirum facit planum tangens ſuperficiem curvam $b I G$ cum plano $b B I$. Hunc in finem, adhibita imaginatione, conſulendæ ſunt ambæ Figuræ 1&2, ubi ſubjectum planum in quo eſt curva projectionis LBC vocabo *horizontale*; planum vero ſtringens curvam quæſitam in elemento bc, nempe bIB, plus ultra continuatum nominabo *verticale*; planum denique tranſiens per tria puncta proxima cbl, hoc eſt, planum trianguli $c\beta b$, dicam, ut prius, *Planum oſculans*. Nunc quia planum oſculans debet eſſe perpendiculare ad planum tangens ſuperficiem curvam, & quia $c\beta$ eſt perpendicularis ad utriuſque plani communem ſectionem $b\beta$, erit lineola $c\beta$ perpendicularis ad ipſum planum tangens ſuperficiem. Quod ſi itaque $c\beta$ continuetur deorſum verſus, donec occurrat

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. Fig. 1, & 2.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 4. plano horizontali in puncto P, a quo ſi ad extremitates ſubtangentium G & M, ducantur rectæ PG & PM, habentur duo triangula PcG & PcM, rectangula in puncto ſublimi c; eſt enim planum McG tangens ſuperficiem, ad quod normalis eſt cP; adeoque ang. PcG = recto = ang. PcM. Hinc $PG^2 - cG^2 = Pc^2 = PM^2 - cM^2$. Eſt vero $cG^2 = CG^2 + cC^2$ & $cM^2 = CM^2 + cC^2$, quibus valoribus ſubſtitutis & deleto communi Cc^2, erit $PG^2 - CG^2 = PM^2 - CM^2$. Ductis nunc PR parallela ipſi MC, ſeu perpendiculari ad GC productam [angulus quippe GCM eſt rectus], & PS parallela ipſi GC, ſeu perpendiculari ad MC productam; eſt utique $PG^2 - CG^2 = PC^2 + 2\,CG \times CR$, & $PM^2 - CM^2 = PC^2 + 2\,CM \times CS$, unde $CG \times CR = CM \times CS$, & $CS : CR = CG : CM$, hoc eſt, latera parallelogrammi rectanguli RS ſunt ipſis ſubtangentibus reciproce proportionalia. Ex quo fluit quod tangens anguli RCP $\left[\frac{RP}{RC} = \frac{CS}{CR}\right] = \frac{CG}{CM} = \frac{T}{\theta}$.

Porro intelligatur in *Fig.* 2, in plano verticali latuſculum $p c$ continuari deorſum in planum horizontale cui occurrat in puncto V [*Fig.* 4]. Erit ductis cV & CV; 1°. cVP triangulum rectangulum in V & ſimile ipſi $cp\beta$, quia utraque PV & $p\beta$ ſunt horizontales in communi plano jacentes, adeoque parallelæ; eſt enim planum cVP nihil aliud quam continuatio plani $cp\beta$. 2°. CV eſt continuatio elementi BC, ſeu tangens curvæ projectionis LBC. Ut itaque inveniatur angulus RCV, hoc eſt [in *Fig.* 1] angulus BCD, cujus tangens $= \frac{BD}{DC} = \frac{dx}{dy}$; ſic procedo. Angulus CVP eſt rectus, quod probe imaginando facile patet, & cum cVP ſit etiam rectus, erit, ob commune latus PV, tangens anguli VcP ad tangentem VCP ut VC ad Vc = [ob triangulum rectangulum cCV ſimile triangulo rectangulo, *Fig.* 2, bec] $ec : bc = dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Quia itaque

itaque tangens anguli VcP ſeu $pc\beta = \frac{p\beta}{pc} =$ [ut ſupra inventum] $-ddy\sqrt{(ds^2+dz^2)} : dxddz$, habemus tangentem anguli $VCP = -ddy(ds^2+dz^2) : dzdxddz$. Jam vero ex cognitis tangentibus duorum angulorum RCP & VCP invenitur, ope Theorematis mei in *Act. Lipſ.* 1722 * exhibiti, tangens anguli ex illis compoſiti RCV, ſeu ejus qui huic ad verticem eſt oppoſitus BCD; quique pro tangente habet $\frac{dx}{dy}$, nempe erit tangens anguli $RCV = \frac{T}{\theta} + \frac{-ddy(ds^2+dz^2)}{dzdxddz} : \left(1 + \frac{Tddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz}\right)$ ſeu $= \frac{Tdzdxddz - \theta ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz + Tddy.(ds^2+dz^2)}$, adeoque $\frac{dx}{dy} = \frac{Tdzdxddz - \theta ddy.(ds^2+dz^2)}{\theta dzdxddz + Tddy(ds^2+dz^2)}$, quæ reducta dat $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{\theta dy + Tdx}{-\theta dx + Tdy} \times \frac{ddy}{dx}$, vel [ob $\frac{ddy}{dx} = -\frac{ddx}{dy}$] $= \frac{\theta ddx - Tddy}{\theta dx - Tdy}$; ut per priorem modum.

COROLL. I.

In caſu Cylindroidum, ubi alterutra ſubtangentium, ex. gr. CM, exiſtit infinita, habebit CR ad RP rationem infinitam, hoc eſt, angulus RCP evaneſcit, unde tantum faciendum eſt $\frac{dx}{dy} =$ tangenti anguli $VCP = \frac{-ddy.(ds^2+dz^2)}{dzdxddz}$; id quod ſtatim dat $\frac{dzddz}{ds^2+dz^2} = \frac{-dyddy}{dx^2}$, ſeu $= \frac{ddx}{dx}$. Quæ eſt eadem æquatio quæ habetur in ſuperiori Corollario, niſi quod hic ſit x quod ibi eſt y. Reliqua perficiuntur ut ibi.

COROLL. II.

In caſu Conoïdum, ubi Cc eſt axi parallela, per quam & per ipſam axem tranſeunt plana cCG, plana autem baſi parallela formant in ſuperficie curva circulos; unde hic iterum ſubtangentes CM evadunt infinitæ. Quare etiam faciendum eſt [vid.

* N°. CXXVII, pag. 527, Tom. II.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

[vid. *Fig.* 5] $\frac{BD}{CD}$ = tangenti anguli VCP. Eſt vero hic [ſumta $-dz$, quia, creſcentibus x & y, ipſa z decreſcere ſupponitur] $ec : bc$ [$= -dz : \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$] = tangens anguli V$c$P : tangent. anguli VCP. Sed tangens anguli VcP, ſeu $pc\beta$, [$= \frac{p\beta}{pc}$] = [ut inferius docebitur] $\frac{(yddx + 2dydx) \times \sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{-dyddz}$. Hinc ergo tangens anguli VCP $= \frac{(yddx + 2dydx) \sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{dydzddz}$ $= \frac{BD}{CD} = \frac{ydx}{dy}$; ex cujus reductione emergit $\frac{dzddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{yddx + 2dydx}{ydx}$. Integrando per logarithmos, indeque tranſeundo ad numeros, prodit $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$. Adeo ut hic pariter non opus ſit operoſa illa inventione anguli plani tangentis ſuperficiem & plani verticalis.

Applicatio ejuſdem methodi ad Superficies Conoidicas, ſeu tales, quæ converſione curvæ cujuſcunque datæ circa axem poſitione datum generantur.

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

Sit vertex Conoidis, a; curva quæſita lbc. A vertice a, & ſingulis curvæ quæſitæ punctis l, b, c, &c. cadere intelligantur in ſubjectum planum ad axem Conoidis aA rectum, perpendiculares aA, lL, bB, cC &c. formantes (*Fig.* 5) projectionem verticis A, & projectionem curvæ quæſitæ LBC. Centro A, radio arbitrario AK = 1, deſcribatur in dicto plano ad axem Conoidis aA recto circulus KEF, & ducantur rectæ ABE, ACF, projectæ LBC occurrentes in punctis infinite propinquis B, C, & peripheriæ KEF in E, F. Concipiatur planum IBb, cujus ſectio communis cum plano BAK, quæ eſt recta IB, tangat projectam LBC in elemento BC; quare planum ipſum IBb curvam quæſitam lbc ſtringet in elemento bc. Concipiatur etiam planum bGI Conoidem tangens in b, & occurrens plano BAK in communi ſectione GI, ac plano IBb in communi ſectione bI, quæ quia utrumque planorum bGI & IBb curvam quæſitam ſtringit in elemento bc, erit pro-

ductio

ductio ejuſdem elementi bc, adeoque curvam in hoc elemento continget. Producatur AE donec ſectioni IG occurrat in G, eritque angulus AGI rectus. A puncto G demittatur ad rectam BI normalis GH, quæ proinde perpendicularis erit ad planum IBb; a puncto H demittatur in rectam bI normalis Hb, & jungatur Gb; tandemque a puncto c demittatur in bB normalis ce. Quibus factis, dicatur arcus KE $= x$, EF $= dx$, AB $= y$, DC $= dy$, BD $= ydx$, BC $= \sqrt{(dy^2 + yydx^2)}$ $= ds$. B$b = z$, $be = - dz$, ſubtangens BG ex natura Conoidis data, $= T$.

Ob ſimilitudinem Triangulorum CDB, BHG, erit CB $[ds]$: BD$[ydx]$ $=$ BG$[T]$: GH; unde GH $= Tydx : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum CDB, IHG, erit CD $[dy]$: BD$[ydx]$ $=$ GH $[\frac{Tydx}{ds}]$: HI, unde HI $= Tyydx^2 : dsdy$.

Ob ſimilitudinem triangulorum bec, HbI, erit bc $[\sqrt{(ds^2 + dz^2)}]$: $be[- dz] =$ HI $[\frac{Tyydx^2}{dsdy}]$: Hb; unde H$b = - Tyydx^2dz : dsdy \sqrt{(ds^2 + dz^2)}$.

Jam quia GH normalis eſt ad planum IBb, & Hb normalis ad rectam bI, quæ eſt ſectio communis planorum IBb & bGI, erit triangulum HbG in plano ad utrumque planorum IBb & bGI recto, adeoque ob angulum GHb rectum, bH : HG $=$ radius : tang. anguli inclinationis HbG. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis HbG $= \frac{HG}{Hb} = \frac{Tydx : ds}{- Tyydx^2 dz : dsdy \sqrt{(ds^2 + dz^2)}} = \frac{- dy\sqrt{(ds^2 + dz^2)}}{ydxdz}$.

Angulus alter, quem planum per tria curvæ quæſitæ lbc puncta infinite propinqua tranſiens facit cum plano IBb, ita inveſtigatur. [Vid. *Fig.* 7 & 6, quæ concipienda eſt inſtar *Fig.* 2 portio infinite parva ſuperficiei cylindroidicæ].

In projecta LBC, ſint tria puncta L, B, C, quorum diſtantiæ LB, BC, ſint æquales & infinite parvæ; ſintque in curva quæſita lbc tria correſpondentia puncta l, b, c, per quæ tranſeat dictum planum. Producantur LB ad $\mathfrak{C}$, & lb ad β, ut

TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 6 & 7.

ut fiant Bϐ = BC, & $b\beta = bc = bp$. Factis reliquis ut in Figura, poſitiſque LB = BC = ds conſtantibus, erit $lg = bm = -dz$, & $me = fc = -ddz$.

Ob ſimilitudinem triangulorum fmb, cpf, eſt $bf\,[\sqrt{(ds^2+dz)}]: fm\,[ds] = fc\,[-ddz] : cp$. Unde $cp = -dsddz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}$.

Ut inveniatur $p\beta$, ſeu quæ ipſi æqualis eſſe cenſeri debet, Cϐ, ſit in *Fig.* 7. curva projecta LBC, centrum A, tangens ad C recta CP, & tangens ad B recta BO, in quas a centro A cadant perpendiculares AP & AO, & in OB productam normalis Cϐ.

Ob ſimilitudinem triangulorum BCD, BAO, eſt CB $[ds]$: BD $[ydx]$ = BA $[y]$: AO; unde AO $= yydx : ds$, ſumtisque differentiis, poſita ds conſtante, dAO, ſeu oP $= (yyddx + 2ydxdy) : ds$.

Ob ſimilitudinem eorundem triangulorum BCD, BAO, eſt BC $[ds]$: CD $[dy]$ = AB $[y]$: BO; unde BO $= ydy : ds$.

Ob ſimilitudinem triangulorum BoP, BCβ, eſt Bo ſeu $\beta o\,[\frac{ydy}{ds}]$: oP $[\frac{yyddx+2ydxdy}{ds}]$ = BC $[ds]$: Cϐ. Eſt itaque Cϐ $= p\beta = (ydsddx + 2dxdyds) : dy$.

Jam quia cp & $c\beta$ [*Fig.* 6] normales ſunt ad bc, quæ eſt communis ſectio plani IBb, ſeu CBb, & plani per tria puncta l, b, c, tranſeuntis, erit triangulum $cp\beta$ in plano ad utrumque iſtorum planorum recto, adeoque, ob angulum $cp\beta$ rectum, erit $cp : p\beta$ = radius: tang. anguli inclinationis $pc\beta$. Sumta itaque unitate pro radio, erit tangens anguli inclinationis $pc\beta = \frac{p\beta}{cp} = \frac{(ydsddx + 2dxdyds) : dy}{-dsddz : \sqrt{(ds^2+dz^2)}} = (yddx + 2dydx)\sqrt{(ds^2+dz^2)} : -dyddz$.

Quoniam itaque angulus $pc\beta$ + angulus HbG = angulo recto, erit productum tangentium = quadrato radii = 1; unde ducta tangente modo inventa anguli $pc\beta$, $(yddx + 2dydx).\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : -dyddz$, in tangentem anguli H$b$G, quæ ſupra inventa erat $-dy\sqrt{(ds^2 + dz^2)} : ydxdz$; habetur æquatio

tio $(yddx + 2dydx) . (ds^2 + dz^2) : ydxdzddz = 1$, vel $\frac{yddx + 2dydx}{ydx} = \frac{dzddz}{ds^2 + dz^2}$, vel $\frac{yyddx + 2ydydx}{yydx} = \frac{1}{2} \times \frac{2dzddz}{ds^2 + dz^2}$. Sumtiſque integralibus per Logarithmos, $lyydx = lb + l\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$; factoque ad numeros tranſitu, $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$; quæ æquatio exprimit naturam projectionis L B C.

Quia z per naturam Conoidis datur in y & conſtantibus, ponatur $dz = pdy$, intelligendo per p quamcunque functionem ipſius y. In æquatione inventa $yydx = b\sqrt{(ds^2 + dz^2)}$, pro dz ſcribatur pdy, & pro ds^2 ſubſtituatur ejus valor $dy^2 + yydx^2$, quo facto habebitur $dx = \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$; in qua æquatione, quia ſeparatæ ſunt indeterminatæ, conſtrui poteſt curva projectionis L B C per quadraturas; quo peracto, ſi e ſingulis punctis L, B, C, &c. erigantur normales, Ll, Bb, Cc, &c, ſuperficiei Conoidicæ datæ occurrentes in punctis l, b, c, &c, ſignabitur in dicta ſuperficie curva quæſita lbc. *Q. E. F.*

Exemplum Primum.

Si Conoides datum fuerit ſuperficies plana, plano projectionis A B K parallela, erit z conſtans, adeoque $dz = pdy = 0$; conſequenter $p = 0$, & æquatio generalis $dx = \frac{bdy}{y} \sqrt{\frac{1 + pp}{yy - bb}}$ mutatur in hanc, $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$, vel [multiplicando per b] $bdx = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$. Membrum poſterius $\frac{bbdy}{y\sqrt{(yy - bb)}}$ eſt elementum arcus circuli, cujus radius $= b$ & ſecans $= y$; qui arcus ſi dicatur A, erit [poſito radio AK (*Fig.* 5.) qui arbitrarius & pro unitate ſumtus eſt, $= b$] $x = A$. Quia igitur y ſemper eſt ſecans anguli x vel A, patet lineam quæſitam eſſe rectam, quæ circulum, cujus radius eſt b, tangit. TAB. LXXIX. N°. CLXVI. *Fig.* 5.

EXEMPLUM II.

Sit Conoides datum Conus, cujus axis ſit ad radium baſeos ut n ad 1, eritque $z = ny$, $dz = pdy = ndy$, adeoque $p = n$, & æquatio ad projectam $dx = \frac{bdy\sqrt{(1+nn)}}{y\sqrt{(yy-bb)}}$, ſeu $\frac{bdx}{\sqrt{(1+nn)}} = \frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$; ſumtiſque integralibus $\frac{bx}{\sqrt{(1+nn)}} = \int\frac{bbdy}{y\sqrt{(yy-bb)}}$ = arcui circuli, cujus radius b, & ſecans y. Qui ſi dicatur A, habetur $bx : \sqrt{(1+nn)} = A$, vel [poſito iterum AK = 1 = b] $x : \sqrt{(1+nn)} = A$. Hæc æquatio ita conſtrui poteſt.

TAB. LXXX. N° CLXVI. *Fig.* 8. Centro A [*Fig.* 8,] radio AL = b deſcribatur circulus LEF, quem tangat in L recta LD. E centro A educta utcunque ſecante AED, quæ circumferentiæ LEF occurrat in E, & tangenti LD in D, capiatur angulus LAF ad angulum LAE ut $\sqrt{(1+nn)}$ ad 1, & producatur AF quantum opus in B. Centro A, radio AD, deſcribatur arcus circuli DB rectæ AFB occurrens in B. His factis, erit punctum B ad projectam quæſitam LBC.

COROLLARIUM.

Si $\sqrt{(1+nn)}$ fuerit numerus rationalis, erit curva projectionis LBC algebraica. Id quod evenit, quoties ſumto pro r numero quocunque, integro vel fracto, fuerit $n = (1-rr) : \pm 2r$ vel $n = \pm 2r : (1-rr)$; quemadmodum patet, ponendo per methodum *Diophanteam* $\sqrt{(1+nn)} = r + n$, & $\sqrt{(1+nn)} = 1 + rn$.

EXEMPLUM III.

Sit Conoides datum Sphæra, cujus radius $= a$, & centrum in A. Per naturam Sphæræ $z = \sqrt{(aa-yy)}$, adeoque $dz = -ydy : \sqrt{(aa-yy)}$ & $p = -y : \sqrt{(aa-yy)}$. Quo valore

lore in æquatione generali ſubſtituto, mutatur illa in hanc, $dx = abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ *.

Ut membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ ad formam ſimpliciorem reducatur, ponatur $y = ab : u$, adeoque $dy = - abdu : uu$, & invenietur, factis ſubſtitutionibus, $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}\sqrt{(aa - yy)} = - udu : \sqrt{(aa - uu)}.\sqrt{(uu - bb)}$. Ponatur porro $uu = cv$, & $2udu = cdv$, quibus ſubſtitutis, habebitur $- udu : \sqrt{(aa - uu)}.\sqrt{(uu - bb)} = - \frac{1}{2} dv : \sqrt{(aa : c - v)}.\sqrt{(v - bb : c)} = - \frac{1}{2} dv : \sqrt{(- aabb : cc + (aa + bb) v : c - vv)}$. Ulterius ſit $- v + (aa + bb) : 2c = t$, & $- dv = dt$, ſubductoque calculo invenietur $- \frac{1}{2} dv : \sqrt{(- aabb : cc + (aa + bb) v : c - vv)} = \frac{1}{2} dt : \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$ Hinc, ex æquo, $dx = \frac{1}{2} dt : \sqrt{((aa - bb^2) : 4cc - tt)}$, & multiplicando utrumque membrum per $(aa - bb) : c$, $(aa - bb) dx : c = (aa - bb) dt : 2c\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, ſumtiſque integralibus $(aa - bb) x : c = \int (\frac{aa - bb}{2c} dt : \sqrt{((\frac{aa - bb}{2c})^2 - tt)}$ = arcui circuli, cujus radius $= (aa - bb) : 2c$ & ſinus rectus $= t$; qui arcus ſi dicatur A, habetur $(aa - bb) x : 2c = A$, vel [ponendo radium arbitrarium AK [1] = radio $(aa - bb) : 2c$] $2x = A$.

* Ex ea æquatione immediate deduci poteſt [inſuper habito intricatiſſimo qui hic ſequitur calculo] curvam quæſitam breviſſimam in ſuperficie ſphærica eſſe circulum maximum. Quia enim membrum poſterius $abdy : y\sqrt{(yy - bb)}.\sqrt{(aa - yy)}$ eſt proportionale differentiali arcus circuli maximi, cujus ſinus eſt $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ [ubi per n intelligo $ab : \sqrt{(aa - bb)}$], ſicuti experiri volenti patebit; ac quia ipſum $n\sqrt{(aa - yy)} : y$ proportionale eſt tangenti arcus meridiani inter punctum b & E [Vid. *Fig.* 5,] intercepti; curva breviſſima cbl in ſuperficie ſphærica debet eſſe ejus naturæ, ut ſinus arcus KE ſit ad tangentem arcus Eb in conſtanti ratione. Liquet autem ex Trigonometria ſphærica hoc competere cuilibet circulo maximo, qui in puncto K oblique ſecat circulum KE pro baſi ſumtum. Eſt enim ubique ut ſinus totus ad tangentem obliquitatis, ita ſinus arcus indeterminati KE ad tangentem arcus correſpondentis Eb. Ergo curva breviſſima in ſuperficie ſphærica eſt arcus circuli maximi. *Q. E. D.*

Digitized by Google

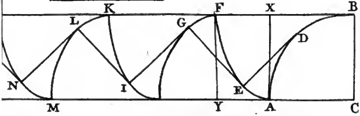
TAB. LXXX. N°. CLXVI. Fig. 9.

Ad ductum hujus calculi curva projectionis quæſita hoc modo conſtrueretur: Centro A, radio $AK = (aa - bb) : 2c$, deſcripto circulo KEF, eductaque utcunque recta AE, fiat arcus $KF = 2KE$, eritque FG a puncto F ad radium AK normaliter ducta $= t$. Hinc ſi in AE, producta ſi opus, capiatur $AB = y =$ [per conſtructionem] $ab : u =$ [conſtr.] $ab : \sqrt{cv}$ $=$ [conſtr.] $ab : \sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)}$, erit punctum B in curva projectionis quæſita. Sed cum curva hæc ſit algebraïca, quemadmodum ex conſtructione patet, convenit æquationem algebraïcam inter coordinatas rectangulas AH, HB, inveſtigare. Dicantur in hunc finem $AH = p$, $HB = q$. Ob angulum FAK biſectum per rectam ANE, eſt $FA + AG$ $[(aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4a - tt)}] : FG\,[t] = AG\,[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN$; unde $GN = t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$. Ob ſimilitudinem triangulorum AGN, AHB, eſt $AG\,[\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}] : GN\,[t\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)} : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})] = AH\,[p] : HB\,[q]$; unde ductis in ſe mediis & extremis, ac dividendo utrumque productum per $\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)}$, habebitur $q = pt : ((aa - bb) : 2c + \sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc - tt)})$; proinde $q\sqrt{((aa - bb)^2 : 4cc + tt)} = pt - aaq : 2c + bbq : 2c$. Si utrumque hujus æquationis membrum ad quadratum evehatur, invenietur, deletis quæ ſe deſtruunt, $ct = (aa - bb)pq : (pp + qq)$. Ob triangulum rectangulum AHB, erit AB^2 $(yy = aabb : (\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - ct)) = AH^2\,[pp] + HB^2\,[qq]$, quod reducendo dat $ct = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$; unde habetur æquatio relationem coordinatarum p & q exprimens: $(aa - bb)pq : (pp + qq) = \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb - aabb : (pp + qq)$, ſeu $pp + qq = 2((aa - bb)pq + aabb) : (aa + bb)$; quæ æquatio pertinet ad Ellipſin DBE, cujus ſemiaxis major $AD = a$, minor $AE = b$, coordinatæ rectangulæ $AH = p$, $HB = q$, exiſtente angulo DAH ſemirecto.

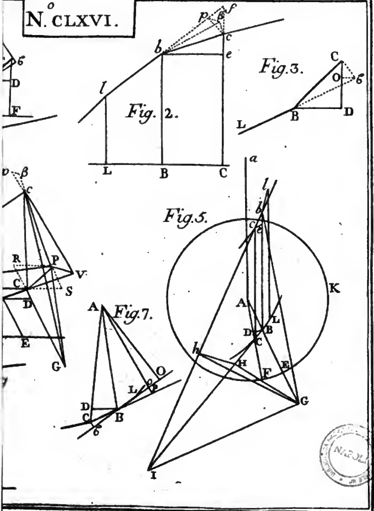
TAB. LXXX. N°. CLXVI. Fig. 10.

Demiſſa enim BC normali ad AD, dictiſque $AC = x$, $BC = y$, erit $x + y = q\sqrt{2}$, & $x - y = p\sqrt{2}$, & exterminando q & p, ex æquatione

N.° CLXV.



N.° CLXVI.



NAPOLI

tione $pp+qq=2((aa-bb)pq+aabb):(aa+bb)$, habetur $aayy+bbxx=aabb$.

SCHOLIUM.

Æquatio generalis $dx=\frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$ probe convenit cum Solutione Cel. *Jac.* BERNOULLI in *Act. Erud. Lipſ.* an. 1698, p. 227 publicata. Si enim in ejus formula $\int(atdx:xx\sqrt{(xx-aa)})$, pro x ſcribatur y, & pro a,b, erit illa $\int btdy:yy\sqrt{(yy-bb)}$, ubi pro t ſcribatur ejus valor $y\sqrt{(dy^2+dz^2)}:dy$, & pro dz, ut ſupra, pdy, habetur $\int\frac{bdy}{y}\sqrt{\frac{1+pp}{yy-bb}}$.

Sed hanc ſolutionem Vir laudatus alio ſine dubio fundamento deduxit. Si enim methodum habuiſſet ad omnis generis ſuperficies curvas ſeſe extendentem, utique generalem ſolutionem Problematis a Fratre provocatus dediſſet. Methodus ſequens ad Problema generaliter conceptum ægre extenditur, quamvis pro Conoidibus ſatis ſit expedita.

Sit Conoides datum ACEBDA, cujus axis AB rectus ſit ad baſin circularem ECD, ſitque linea quæſita KPIG. TAB. LXXX. Superficies ACEA dividatur in ſectores infinitos, ducendo N°. meridianos APN, AIf, AGF, &c. infinite propinquos, & CLXVI. a punctis P, I, G, &c. ubi hi meridiani ſecant curvam KPIG, Fig. 11. & 12. ducantur tangentes PL, IL, GL, &c. occurrentes axi AB in punctis L, L, L, &c. infinite parum a ſe invicem diſtantibus; unde duo puncta quævis L, L, ubi duæ tangentes viciniſſimæ, v. g. GL & IL axi occurrunt, pro uno eodemque haberi poſſunt, & conſequenter figura LGIL pro triangulo haberi, quod ſimiliter de reliquis LIPL, &c. intelligendum eſt.

Planum trianguli GLI concipiatur circa IL tanquam axem aliquantulum elevari, donec cum triangulo ſequente ILP conſtituat unum idemque planum GLP. Planum hoc GLP ſimiliter elevari intelligatur circa rectam PL ut axem, donec cum triangulo ſequente in eodem plano exiſtat, atque hoc

tamdiu continuetur, donec LGIPKL in planum ſit reducta [Vid. *Fig.* 12]. His ita factis, manifeſtum eſt lineam KOPIG in planum reductam fore lineam rectam quippe in plano breviſſimam. Hinc per naturam lineæ rectæ angulus GLI æqualis eſt differentiæ angulorum LIK, LGK; angulus ILP = LPK — LIK, &c. id eſt, angulus quem tangentes proximæ, v. g. GL & IL comprehendunt in puncto axis L, ubi concurrere cenſendæ ſunt, æqualis eſt differentiæ anguli LGI vel LIP, quem tangens LG vel LI facit cum curva KPIG in G vel I.

Ex hoc fundamento natura curvæ KPIG ita inveſtigatur. Per punctum quodcunque in curva aſſumtum G, [*Fig.* 11] ducatur pars circuli paralleli G*g*, meridianis AGF & AI*f* intercepta. A punctis G & *g* ducantur ad axem AB normales GH, *g*H, & a punctis F, *f* ad centrum baſeos B rectæ FB, *f*B. Dicatur radius baſeos BC = BF = 1, applicata GH = x, arcus circumferentiæ baſeos CF = z, cujus elementum *f*F = dz, arculus meridiani I*g* = ds, & tangens GL vel IL = t.

Ob ſimilitudinem ſectorum BF*f*, HG*g*, eſt BF [1] : HG [x] = F*f* [dz] : G*g*. Ergo G*g* = xdz. Hinc angulus GLI = G*g* : GL = $xdz : t$.

Anguli LIG complementum ad ſemicirculum eſt angulus GI*g*, cujus tangens eſt ad radium ut G*g* ad *g*I; quare poſito radio = BC = 1, erit tangens anguli GI*g*, ſeu quod idem eſt, ſigno tantum mutato, tangens anguli LGI = — G*g* : *g*I = — $xdz : ds$. Ergo elementum anguli LGI = — $d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$. Sed per fundamentum ſupra adſtructum, angulus GLI = elemento anguli LGI, ergo habetur æquatio $\frac{xdz}{t} = - d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$ ſeu quia $x : t = dx : ds$, $\frac{dxdz}{ds} = - d(\frac{xdz}{ds}) : (1 + \frac{xxdz^2}{ds^2})$.

Pro integranda hac æquatione, ponatur $xdz : ds = v$, & facta

facta ſubſtitutione habebitur $vdx : x = - dv : (1 + vv)$, ſeu $- dx : x = dv : (v + v^3) = (dv + 3vvdv) : (v + v^3) - 3vdv : (1 + vv)$; ſumtiſque integralibus per Logarithmos $l(a : x) = l(v + v^3) - \frac{1}{2} l(1 + vv) = lv - \frac{1}{2} l(1 + vv)$, unde $a : x = v : \surd(1 + vv)$, & $a : \surd(xx - aa) = v =$ [ſubſtituto ejus valore] $xdz : ds$; tandemque $dz = ads : x\surd(xx - aa)$.

IDEM PROBLEMA.

Ducere lineam breviſſimam in ſuperficie curva quavis data.

Per methodum de maximis & minimis.

Solut. Concipiantur in plano horizontali A E C, ex ſingulis curvæ quæſitæ punctis a, b, c, demitti perpendiculares aA, bB, cC in puncta A, B, C. &c. quæ forment curvam projectionis, cujus duo elementa contigua quævis repreſententur per A B, B C. Per A & B ductæ ſint A E, B D tanquam elementa abſciſſarum, & E B, D C prioribus perpendiculares tanquam elementa applicatarum curvæ projectionis. Porro punctum B in elemento E B prolongato fluere intelligatur in locum proximum $\mathfrak{C}$, cui reſpondeat in ſuperficie curva punctum β; ſecetur autem ipſa ſuperficies per planum verticale tranſiens per rectam E B F, ſectio illa formabit curvam, quæ, ob datam ſuperficiem, & ipſa curva dabitur. Sit itaque ſubtangens puncto B vel E [quod perinde eſt quia B E eſt elementum infinite parvum, ſubtangens vero finita] reſpondens $= T$: Et dicantur A E $= f$, B D $= g$, E B $= m$, D C $= n$, elementum verticalis Bb, hoc eſt, Bb — A$a = c$, elementum verticalis Cc, hoc eſt Cc — B$b = e$; Erit elementum curvæ quæſitæ $ab = \surd(ff + mm + cc)$, & $bc = \surd(gg + nn + ee)$. Debet itaque $\surd(ff + mm + cc) + \surd(gg + nn + ee)$ eſſe minimum: quare differentiando [poſitis A E, & B D ſeu f & g conſtantibus] habetur $\frac{mdm + cdc}{\surd(ff + mm + cc)} + \frac{ndn + ede}{\surd(gg + nn + ee)} = 0$. Unde quia $m + n$, ut & $c + e$ ſunt conſtantes, proinde $dn = - dm$ & $de =$

TAB. LXXX. N°. CLXVI. *Fig.* 13.

—

— dc, erit $\frac{m\,dm + c\,dc}{\surd(ff + mm + cc)} = \frac{n\,dm + e\,dc}{\surd(gg + nn + ee)}$. Ut vero dm & dc eliminari poſſint, quærenda eſt eorum ratio, quod ſic fit: Dicatur B $b = z$, liquet eſſe $T: z =$ B C ſeu dm: C β — Bb ſeu dc; adeoque $dc = z\,dm : T$; quod ſubſtituendo in æquatione inventa, eamque per dm dividendo, & multiplicando per T, prodibit $\frac{mT + cz}{\surd(ff + mm + cc)} = \frac{nT + ez}{\surd(gg + nn + ee)}$, ubi nondum reperitur uniformis progreſſus ab elementis A E, & E B ad elementa B D, D C, quia utrique æquationis membro communia ſunt T & z; quocirca eam diſpono hunc in modum $T \times (\frac{n}{\surd(gg + nn + ee)} - \frac{m}{\surd(ff + mm + cc)}) = z \times (\frac{-e}{\surd(gg + nn + ee)} + \frac{c}{\surd(ff + mm + cc)})$. Hic in factoribus infiniteſimalibus manifeſta obſervatur uniformitas; uterque enim denotat differentiam fractionum uniformium ex ſimilibus elementis compoſitarum ſcribendo itaque pro n, g, e, has, quas repræſentant, dy, dx, dz, habebimus $T \times d(\frac{dy}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)}) = z \times - d(\frac{dz}{\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2)})$, in qua æquatione nihil adhuc conſtans ſuponitur, ideoque liberum eſt aliquod elementum ad lubitum aſſumere tanquam invariabile. Aſſumamus ergo quod in Scripto *Klingenſtierniano* aſſumſi conſtans $\surd(dx^2 + dy^2)$, ſeu ds, ut æquatio exprimatur hoc modo $T \times d(\frac{dy}{\surd(ds^2 + dz^2)}) = z \times - d(\frac{dz}{\surd(ds^2 + dz^2)})$ quæ fractionibus actu differentiatis, in hanc abit $\frac{dz\,ddz}{ds^2 + dz^2} = \frac{T\,ddy + z\,ddz}{T\,dy + z\,dz}$, æquivalentem ei quam dedi in Additionibus ad prædictum ſcriptum, ut calculare volenti patebit. Quod ſi vero pro conſtanti aſſumatur ipſum A B, ſeu elementum curvæ quæſitæ, hoc eſt, $\surd(ds^2 + dz^2)$, æquatio emergit ſimpliciſſima, nempe hæc: $T\,ddy = - z\,ddz$. Sed quæ nihilominus ad differentias primas generaliter reduci nequit.

A N I-

N°. CLXVII.

ANIMADVERSIONES

in. Cl. Georgii CHEYNÆI

Fluxionum Methodum inverſam,

Editam *Londini* 1703.

Pag. 2. P*Rima* [methodus regrediendi ad Fluentes, ubi Fluxiones vinculo adficiuntur] *coincidit cum ea qua* NEWTONUS *utitur.*

Hæc methodus etiam a nobis aliiſque frequenter in uſum vocatur, & cuivis in hiſce leviter verſato obvia eſt, neque adeo NEWTONO peculiaris cenſeri debet.

Ibid. *Sit, v. gr. Fluxio data* $dz^{\theta} \times \dot{z}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$; *pone* $y = (e+fz^{\eta})^{\lambda}$ *&c.* Conferatur cum pag. 12.

Cum palam ſit Fluentem hujus Fluxionis $x^m dx \times (a+bx)^n$ ſemper terminis numero finitis exprimi poſſe, modo m ſit numero integro & poſitivo, vel nihilo æqualis; Auctoris exemplum facile ad noſtram formulam reducitur, ponendo $z^{\eta} = x$, habebitur enim $Dz^{\theta} dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta} x^{(\theta - \eta + 1):\eta} dx \times (e+fx)^{\lambda}$; unde ſtatim patet Fluentem quæſitam fore terminabilem, ſi $(\theta - \eta + 1):\eta$ vel, addita unitate, ſi $(\theta + 1):\eta$ eſt numero integro & affirmativo æqualis. Alio modo quæſita Fluens fiet terminabilis, ſi quantitas ſub vinculo dividatur per z^{η}, & multiplicetur iterum quæ extra vinculum per $z^{\eta\lambda}$; ſic enim erit $Dz^{\theta} dz \times (e+fz^{\eta})^{\lambda} = Dz^{\theta+\eta\lambda} dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda}$, quæ poſterior, tractata ut ante factum, ad noſtram formulam reducitur, ponendo nunc $z^{-\eta} = x$; nam ſic prodibit $Dz^{\theta+\eta\lambda} dz \times (ez^{-\eta}+f)^{\lambda} = -\frac{D}{\eta} x^{(-\theta - 1 - \lambda\eta - \eta):\eta} dx \times (ex+f)^{\lambda}$;

ergo iterum ſi $(\theta+1+\lambda\eta+\eta):-\eta$ vel, addita unitate, ſi $(\theta+1+\lambda\eta):-\eta$ eſt numero integro & poſitivo æqualis; erit Fluens quæſita terminabilis. Atque hæ duæ conditiones a nobis facile negotio erutæ, $(\theta+1):\eta$ & $(\theta+1+\lambda\eta):-\eta$, quibus Fluens quæſita terminis numero finitis exprimitur, ſi nimirum numeri illi, vel alteruter, ſunt integri & affirmativi, ſunt ipſiſſimæ illæ ab Auctore poſt longas ratiocinationes & operationes inventæ. Vid. pag. 12. Quod ſi vero neuter ex numeris iſtis ſit numerus integer & affirmativus, tunc quantitas $(e+fx)^\lambda$ vel $(ex+f)^\lambda$ in Seriem ſolvenda eſt, & poſtea facile obtinebitur Fluens per Seriem infinitam.

Pag. 5. *Ad hoc exemplum procedendum in trinomialibus ..... Sit iterum Fluxio data* $d z^{\theta} \dot{z} \times (e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda}$; *ponatur* $y=(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda}$.

Fluxiones trinomiales facile reducuntur ad binomiales, ponendo primo $z^{\eta}=x$, id quod facit $Dz^{\theta}dz\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})^{\lambda} = \frac{D}{\eta}x^{(\theta+1-\eta):\eta}dx\times(e+fx+gxx)^{\lambda}$; deinde tollendo ſecundum terminum quantitatis ſub vinculo, nempe ponendo $x=y-f:2g$; quo facto erit $\frac{D}{\eta}x^{(\theta+1-\eta):\eta}dx\times(e+fx+gxx)^{\lambda} = \frac{D}{\eta}(y-f:2g)^{(\theta+1-\eta):\eta}dy\times(-ff:4g+e+gyy)^{\lambda}$; nunc ergo ſi $(\theta+1):\eta$ eſt numerus integer & poſitivus, poterit Fluxio diſtribui in tot Fluxiones binomiales quot ſunt unitates in $(\theta+1-\eta):\eta$; quod ſi vero numerus ille non ſit integer vel non poſitivus, quantitates, quæ extra vinculum, & quæ intra illud, in Series conjiciendæ ſunt, ex quibus duabus Seriebus inter ſe multiplicatis Fluentes terminorum elicitæ, dabunt Seriem novam pro Fluente quæſita.

Pag. 6. *Secunda methodus, quæ in hoc conſiſtit, ut conjiciatur in Seriem pars Fluxionis datæ, inque eam ducatur pars vinculo excluſa; indeque... ad Fluentes fiat retrogreſſus* &c.

Hæc methodus etiam mihi dudum fuit familiaris, eamque olim com-

communicavi cum *Marchione* Hospitalio, in *Lectionibus* meis in uſum ejus conſcriptis ſuper Calculo differentialium & integralium.*

Pag. 8. *Prodibit quotus, qui....... dabit Fluentem quæſitam, una cum abrumpendi conditionibus.*

Has abrumpendi conditiones in hac terribili Serie non video; quæcunque Series abrumpitur, oportet ut, termino aliquo in ea exiſtente nullo, ſequentes omnes pariter in nihilum recidant; hoc autem idem in hac Serie accidere nullum apparet indicium.

Pag. 10. *Potuiſſe* [in æquatione aſſumpta cum coefficientibus indeterminatis, cujus Fluxio cum propoſita Fluxione comparatur] *exponentes terminorum extra vinculum aſſumi diverſos ab hic aſſumptis, modo ſemper exponens primi termini non fuiſſet aſſumptus minor quam* $\theta - \eta + 1$.

Fallitur hic Cl. Auctor: poteſt enim exponens primi termini quantumvis minor aſſumi, quam $\theta - \eta + 1$, modo interim exponens vinculi debite augeatur; id quod Auctor non animadvertiſſe videtur. Ita ſi, ex. gr. pro exponente primi termini aſſumatur $\theta - 2\eta + 1$, & pro exponente vinculi $\lambda + 2$, reſultabunt utique [contra quod Auctor putat] termini cum primo termino Fluxionis datæ comparandi. Ut rei veritas pateat; eſto ergo aſſumta æquatio hæc, $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. $\times (e + fz^\eta)^{\lambda + 2} =$ Fluenti quæſitæ. Hujus aſſumtæ æquationis capiatur Fluxio, & ita poſtea exprimatur, ut exponens vinculi ſit λ, quod fit multiplicando Fluxionem ipſius $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} + Cdz^{\theta - 4\eta + 1}$ &c. per quadratum ipſius $e + fz^\eta$, id eſt per $ffz^{2\eta} + 2efz^\eta + ee$, ipſum vero $Adz^{\theta - 2\eta + 1} + Bdz^{\theta - 3\eta + 1} +$ &c. per $fz^\eta + e$; Erit Fluxione æquata cum Fluxione data, eaque reducta

$$\left.\begin{matrix} (\theta - 2\eta + 1) \times Adff \\ (\lambda + 2) \times \eta \times Adff \end{matrix}\right\} z^\theta \left\{\begin{matrix} +(\theta - 3\eta + 1) \times Bdff \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times 2Adef \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Adef \end{matrix}\right\} z^{\theta - \eta} \left\{\begin{matrix} +(\theta - 4\eta + 1) \times Cdff \\ +(\theta - 3\eta + 1) \times 2Bdef \\ +(\theta - 2\eta + 1) \times Adee \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Cdff \\ +(\lambda + 2) \times \eta \times Bdef \end{matrix}\right\} z^{\theta - 2\eta}, \&c.$$

* N°. CXLIX Lect. XLIX. pag. 526. *Tom. III.*

Digitized by Google

$= dz^{\theta}$; comparatis terminis homologis erit $A = 1 : (\theta + \lambda\eta + 1)ff$. $B = (2\theta + \lambda\eta - 2\eta + 2) \times Ae : (-\theta - \lambda\eta + \eta - 1)f$, $C =$ &c.

Pag. 14. *Te minime latet* $\phi(x+1) = \frac{\dot{x}}{x+1}$. *Eſt enim* $l(x+1) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 +$ *&c. adeoque* $\phi\, l(x+1) = \dot{x} - x\dot{x} + x^2\dot{x}$ *&c.* $= \dot{x} \times (1 + x - x^2 -$ *&c.*$) = \dot{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{\dot{x}}{x+1}$.

Hoc non opus habet tanta demonſtratione per Series, immediate enim fluit ex natura Logarithmicæ, ut ego jam olim oſtendi. Vid. *Act. Erud.* 1697, pag. 127 in fine *.

Pag. 15. *Sit Fluxio univerſalis data* $rx^m l^n x \dot{x}$

Hujus Fluxionis Fluentem, jam ante plures annos per varias methodos inveni, quas tum temporis cum Ampl. LEIBNITIO, aliiſque, communicavi. Cæterum pleraque quæ in hac pagina & ſequentibus habentur de exponentialibus, videntur ex meis promanaſſe quæ in *Act. Lipſ.* 1697, m. Martii de hac materia publicavi †. Exempla enim mea fere omnia hic ab Auctore noſtro repetuntur, ut & ipſa hæc Series $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} -$ &c. pro quadratura particularis alicujus ſpatii curvæ hujus $x^x = y$.

Pag. 25 & 26. *Si pars tranſcendentalis Fluxionis datæ fractio fuerit, v. g.* $\frac{p\dot{z}}{qz}$ [*ubi* p *&* q *ſignificant quantitates ex* z *& cognitis quomodocunque, & ſine vinculis aut radicalitatibus, compoſitas;*] *in qua Fluxio indeterminatæ* z *in omnes terminos numeratoris ducitur; res ſemper ad Logarithmos & exponentiales redit: ſemper enim eſt* $F : \frac{p\dot{z}}{qz} = \frac{pz}{qz} lz = lz^{\frac{pz}{qz}}$.

Perfunctorie hæc nimis tractantur; debuiſſet Cl. Auctor oſtendere, quomodo fractiones rationales Fluxionum ad Logarithmos & exponentiales reducuntur; neque ſufficit dicere, quod

* N°. XXXVI. pag. 181, 182. *Tom. I.* † N°. XXXVI. pag 179. *Tom. I.*

Digitized by Google

quod F: $\frac{p\dot{z}}{qz} = \frac{pz}{qz}\, lz$; ſi enim per p & q utrobique eaſdem quantitates intelligat, aſſertum non eſt verum: Si vero p & q in Fluente aliæ ſint intelligendæ quam p & q in Fluxione, dicendum ergo fuiſſet, quomodo illæ ex hiſce datis inveniantur: deinde falſum quoque eſt quod hujuſmodi Fluxiones ſemper ad Logarithmos & exponentiales reducantur; interdum enim ad arcus Circuli redeunt, qui utique ad Logarithmos [reales] reduci non poſſunt, quinimo interdum habent Fluentes finitas determinabiles abſolute. Sed hanc materiam Ampl. LEIBNITIUS & ego jam occupavimus, & methodos noſtras dedimus in *Actis Lipſ.* 1702, m. Maii, & 1703, m. Januar. *

Pag. 34. *Ut vero eorum uſum in exponentialibus ſecundi gradus..... oſtendam, ſit æquatio* $a^y = x^{x^x}$.

De hiſce ego primus egi, quantum ſcio, in citat. Act. 1697, menſ. Mart. †

Pag. ead. *Erit* $y\,l\,a = x^x\,l\,x$. *Item* $l(x^x l x) = l(y\,l\,a)$. *Sed* $l(x^x l x) = x\,l\,x + l\,l\,x$. *Item* $l(y\,l\,a) = l\,y + l : l\,a$. *Quare* $l\,y = \frac{x\,l\,x + l : l\,a}{l : l\,a}$.

Errat hic Cl. Auctor; nam cum ſit $xlx + l:lx = ly + l:la$, erit utique $ly = xlx + l:lx - l:la$, vel, ſi mavis, $ly = xlx + l:\frac{lx}{la}$; non vero $ly = \frac{xlx + l:lx}{l:la}$. Omnia igitur quæ ſequuntur, ad hoc Problema $a^y = x^{x^x}$ pertinentia, ſunt etiam erronea, adeoque corrigi debent.

Pag. 37. *Verba ipſius* NEWTONI *ut pote commodiſſima ex loco citato prius huc transferam.*

Quod revera verba NEWTONI tranſtulerit tantum, ipſas vero operationes non inſpexerit attente, ex eo patet, quod errores, ſive typographicos, ſive calculi, apud WALLISIUM

A a 3 com-

* N°. LXX. pag. 393. *Tom. I* † N°. XXXVI. pag. 179. *Tom. I.*

commiſſos ipſe nunc repetierit, neque eos correxerit, quos ſic corriges: pag. 40, l. 9; pag. 41, l. 5; & pag. 42, l. 1; pro az^{λ} ſcrib. az^{ν}. pag. 42, l. 6; pro $+zr$ ſcrib. $-zr$, & pro $\frac{3zzr}{8d}$ ſcrib. $\frac{3zzr}{4d}$.

Pag. 46. *Altera* NEWTONI *Methodus..... coincidit cum ea publicata a Cl.* LEIBNITIO, Actis Lipſiæ, Aprilis 1693, *hoc eſt, ad minimum* 17 *annis poſtquam erat a* NEWTONO *reperta.*

Non qui primus reperit, ſed qui primus publicavit, laudem a publico primus meretur: interim quaſi vero & ipſe Cl. LEIBNITIUS non diu antea repertam habere potuiſſet hanc Methodum, antequam eam publicaſſet. Nulla eſt igitur conſequentia: *Methodus hæc* 17 *annis reperta eſt a* NEWTONO, *antequam a* LEIBNITIO *publicata; Ergo* NEWTONUS *prior eſt inventor* LEIBNITIO. Quid ſi enim LEIBNITIUS eam inveniſſet 18 annis priuſquam publicaſſet? eſſet utique primus Inventor & primus Publicator.

Pag. 50. *Methodus a Cl. Viro* Joh. BERNOULLIO Actis Lipſiæ 1694 * *prodita, qua Fluxionis data Fluens per Seriem infinitam, generalem quidem, terminis tamen plerumque maxime implicitis, obtinetur.*

Non video terminos per methodum meam multo magis implicitos obtineri quam per alias Methodos ab Auctore recenſitas, quarum tamen nulla tam generalis eſt quam mea; imo in nonnullis caſibus ſimpliciores reddit terminos. Sed quæcunque ſit methodi meæ implicatio, miror quod Auctor noſter non eadem uſus ſit facilitate in excuſanda hac implicatione meæ Methodi per ipſius univerſalitatem, qua uſus eſt circa aliquam Methodum ſui popularis Cl. CRAIGII, quam, cum plerumque in *calculi molem immanem* deducat, laudat tamen, quod *laborem penſet methodi ipſius univerſalitas;* licet in univerſalitate meæ multum cedat. Vid. pag. 123. Sic quod in me extraneo

* N°. XXI. pag. 125. *Tom. I.*

Digitized by Google

neo diſplicet & extenuatur, idem illud in conterraneo placet & extollitur.

Ibid. *Seriem ipſam generalem ſic inveſtigabis; ſit* $\dot{z}y$ *expreſſio generalis pro Fluxionibus primis quibuſcunque &c.*

Alias prӕterea habeo vias ad illam inveſtigandam, quӕ etiam valent pro Fluxionibus ſuperioribus: de his, ante *9* & 10 annos, communicavi cum Ampl. LEIBNITIO.

Pag. 52. *Fietque* $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{rr} + \frac{ax^3}{r^3} + \frac{ax^4}{r^4}$ &c.

Hӕc Series eodem modo expreſſa habetur in *Actis Lipſ.* *1694*, pag. 438. Sed vitiata eſt per typothetam, corrigi itaque debet, ut eam jam correxi in *Actis* anni ſequentis pag. *96* in *Erratis*; nempe ſic $y = \frac{ax}{r} + \frac{axx}{2rr} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4x^4}$ &c. Auctor itaque repetendo eundem errorem, oſtendit ſe exemplum ex *Actis* nude exſcripſiſſe, neque calculum ipſum perfeciſſe.

Pag. ead. *Sit jam* $\dot{z}yv$ *expreſſio generalis pro tranſcendentibus vel exponentialibus primi gradus (ubi* y *eſt quantitas algebraïca ex indeterminatis & conſtantibus quomodocunque compoſita,* v *vero quantitas geometrice irrationalis quӕcunque).*

Non opus eſt pro hoc caſu novum inire calculum ad novam Seriem fabricandam, jam enim continetur in mea quam dedi pro $\int y\,dz$. Nam adeo generalis eſt, ut per y non tantum quantitas algebraïca ex indeterminatis & conſtantibus quomodocunque compoſita, ſed etiam talis intelligi poſſit, quӕ partim ex conſtantibus & indeterminatis algebraïcis, partim ex geometrice irrationalibus utcunque ſit compoſita. Sic itaque pro applicatione univerſalis expreſſionis ydz ad hunc caſum $\int yv\,dz$; aliud nihil faciendum eſt, quam ut in mea Serie univerſali $\int ydz = zy - \frac{z^2 dy}{1.2.dz} + \frac{z^3 ddy}{1.2.3.dz^2} - \frac{z^4 d^3y}{1.2.3.4.dz^3} +$ &c. loco y, dy, d^2y, d^3y, &c. ponantur eorum valores, qui hic ſunt yv, $vdy + ydv$, $vddy + 2dydv + yddv$, $vd^3y + 3dvddy + 3ddvdy + yd^3v$, &c. ex quorum ſubſtitutione provenit ſtatim Series quam Auctor habet; & hoc per ſe adeo manifeſtum eſt, ut mirer

mirer eum, præter omnem neceſſitatem, voluiſſe aliunde quærere quod ante oculos erat jam pene factum.

Pag. 56. *Iiſdem methodis quantitatem quamcunque ad poteſtatem indeterminatam elevabis.*

Ego aliam methodum magis naturalem habeo ad poteſtatem indeterminatam elevandi quantitatem quamcunque & hæc methodus non eget neque Logarithmis neque infiniteſimalibus; ſed illam per Algebram ordinariam ex natura numerorum figuratorum erui, & jam ante 12 annos communicavi cum *Marchione* HOSPITALIO *, antequam adhuc ſcirem tale quid a NEWTONO aliove præſtitum eſſe.

P. 59. *Omnia hæc hactenus tradita ſunt, niſi paucula exempla Methodorum* Newtonianarum. . . . . . *Omnia in hiſce, vel per hanc* [*aut non abſimiles methodos*] *ab aliis* [*intra hoſce, viginti quatuor annos proxime elapſos*] *edita, eſſe ſolum eorundem ab Ipſo diu antea cum amicis vel publico communicatorum repetitiones, aut non difficilia Corollaria.*

Hæc in laudem Ampliſſimi NEWTONI, Magiſtri & popularis ſui, merito dixit; modo id non ſit in extenuationem aliorum & Exterorum imprimis: vereor ne plus NEWTONO tribuat, quam ipſe ſibi arrogaturus ſit NEWTONUS. Alias miſeri nos omnes ſumus, quibus nihil nec inventi, nec poſthac inveniendi, reliquit; aut qui quicquid fecimus, aliud nihil fecimus, quam nectere repetitiones quaſdam, aut ad ſummum non difficilia Corrollaria quædam eorum quæ diu antea NEWTONUS cum amicis ſuis communicaverat. Certe ſi vel maxime hoc feciſſemus, an ideo minus quam NEWTONUS horum inventorum Auctores dicendi eſſemus; quippe qui cum non fuerimus ex numero illorum amicorum, quibuſcum communicavit; nec ipſe niſi ante paucos annos ſua reperta publicaverit; neceſſe habuimus illa noſtro marte & noſtra induſtria eruere; adeo ut hac in parte nihil NEWTONO debeamus: quamvis ceterum de publico eum præclare meritum lubentes confiteamur.

Pag.63.

† N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.*

Digitized by Google

Pag. 63. *Ille enim* [CRAIGIUS] *primus omnium (quod ſciam) publico harum* [Tranſcendentium quadraturarum] *exempla impertivit, in* Phil. Tranſ. Dec. 1697.

Harum Exemplum etiam ego, eodem anno 1697, eodemque menſe Decembri in *Ephemeridibus Gallicis* †, & ex illis poſtea excerptum in *Actis Lipſienſ.* 1698, pag. 54 l. 4, publico impertivi, poſtquam, diu ante, hujuſmodi curvæ tranſcendentales a me aliiſque fuiſſent conſideratæ: adeo ut Cl. CRAIGIUS non primus omnium earum exempla publicaverit.

Pag. 65. *Fluentes... a Fluxionibus per ſectiones præcedentes data, interdum determinata quantitate a vera deficiunt, interdum eandem determinata quantitate excedunt.... Rem ipſam ſic explorabis; pone ipſam Fluentem per methodos ſupra traditas repertam* = o, *& habebis ſignum; iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur* = o, *& obtinebis ipſam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout ſignum innuerit.*

Omnino ſuperfluum eſt ponere Fluentem = o, neque ſignum ullo modo ab iſta poſitione dependet: quid ſi enim ex ea ambo ſigna prodeant, utrum tunc eligendum erit? Sumamus Exemplum ipſum tertium Auctoris, ubi $-\frac{30abx^{3:2}+75bc}{28aa} \times (c-ax^{3:2})^{2:5} = A$ [prout nimirum ab Auctore ſcribitur; ſed male; invenio enim $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c-ax^{2:3})^{2:5}=A$.] Poſito itaque $A=0$, verum quidem eſt, quod tunc diviſo per $(c-ax^{3:2})^{2:5}$ proveniat $x=+(75c:30a)^{2:3}$; ſed etiam non minori jure dividi poteſt per $(-30abx^{3:2}+75bc):28aa$ & tunc provenit $x=+(c:a)^{2:3}$; nam per ſubſtitutionem hujus valoris, æque ac illius, degenerat A in nihilum. Quod ſi nunc hæc duo ſigna diverſa eſſent, ut revera ſunt, ſi ponatur vera æquatio $\frac{-30abx^{2:3}-75bc}{28aa}(c-ax^{2:3})^{2:5}=A=0$;

† N°. XL, pag. 209, *Tom. I.*

nam uno modo obtinebitur $x = -(75c : 30a)^{3:2}$, & altero $x = +(c : a)^{3:2}$. Utrum ergo nunc ſignum +, an — eligetur? Unde patet criterium Auctoris, ad explorandum quid addendum demendumve ſit areæ, ut vera obtineatur, nihil omnino valere, utpote ſæpiſſime ſibi ipſi non conſtans; quod magis ex ipſa concluſione Auctoris pateſcit, quando colligit, *Quare vera quadratura, erit* $A = \frac{-30abx^{3:2} + 75bc}{28aa}(c - ax^{3:2})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$; poſito enim $x = 0$ [in quo caſu area evaneſcere deberet,] provenit tamen $A = +\frac{75bc^{7:5}}{28aa} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod eſt manifeſte abſurdum. Verus autem modus explorandi quid Fluenti inventæ addendum demendumve ſit, ad habendam veram aream, in hoc conſiſtit, ut *ponatur indeterminata quantitas qua Fluens illa exprimitur* $= 0$, *& qua inde provenit quantitas adjiciatur ſub ſigno contrario ad Fluentem repertam.* Secundum hanc Regulam, tertium exemplum Auctoris ita eſt corrigendum: $\frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} = A$; pone indeterminatam $x = 0$, fietque $A = -\frac{75bc^{7:5}}{28aa}$, quod dat quantitatem ſub ſigno [contrario] + addendam Fluenti antea repertæ. Quare vera quadratura erit $A = \frac{-30abx^{2:3} - 75bc}{28aa} \times (c - ax^{2:3})^{2:5} + \frac{75bc^{7:5}}{28aa}$. Eodem modo vera quadratura exempli ſecundi, a variis erroribus Auctoris repurgata, hæc eſt: $A = (\frac{3x^2}{10d^2e^2} + \frac{9ccx}{35a^2e^4} + \frac{27c^4}{140d^2e^6}) \times (e^2x - c^3)^{4:3} - \frac{27c^8}{140d^2e^6}$.

Pag. 67, 68. *Sit Fluxio infiniteſimalis* $z^r \dot{z} \times (e + fz^{\pm n} + gz^{\pm 2n} + hz^{\pm 3n}$ &c.$)^m$.... *Si jam velis ut indices termi-*

norum

norum extra vinculum in Fluente augendo procedant, exiſtentibus terminorum ſub vinculo in Fluxione data indicibus affirmativis, capiendus in æquatione aſſumenda primi termini extra vinculum Index $r+1$, *ſecundi* $r+1+\eta$, *&c. Sin exiſtentibus &c.*

Hæc reſtrictio plane eſt ſuperflua; poteſt enim in quocunque caſu capi in æquatione aſſumenda primi termini extra vinculum index $r+1+$ vel $-$ aliquo multiplo ipſius η, qui ſit etiam multiplus maximi indicis, ſive affirmativi, ſive negativi, indeterminatæ ſub vinculo in Fluxione data; modo interim index ipſius vinculi debite augeatur vel minuatur. Sic in exemplo Cl. Auctoris pro Fluxione Trinomiali $Dz^r dz \times (e+fz^\eta + gz^{2\eta})^m$, poſſum pro indice primi termini extra vinculum in æquatione aſſumenda ponere verb. gr. $r-4\eta+1$, & ita æquatio aſſumenda erit $Az^{r-4\eta+1} + Bz^{r-5\eta+1} + Cz^{r-6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^\eta + gz^{2\eta})^{m+2}$: ita pariter in altero exemplo Auctoris $Dz^r dz \times (e+fz^{-\eta} + gz^{-2\eta})^m$; æquatio aſſumenda poterit v. g. eſſe hæc, $Az^{r+4\eta+1} + Bz^{r+5\eta+1} + Cz^{r+6\eta+1}$, &c. $\times (e+fz^{-\eta} + gz^{-2\eta})^{m+2}$. Confer. cum iis quæ ſupra ad pag. 10, annotavi. †

Pag. 71. *Si neutra dediſſet, concludendum fuiſſet Fluxionem datam finitæ Fluentis non fuiſſe capacem.*

Magna quidem confidentia hic, ut etiam alibi, aſſeritur, hanc Methodum ſemper exhibere Fluentes finitas, ſi Fluxiones earum ſint capaces, ſed ejus demonſtrationem nuſquam adhuc vidi. Auctor videtur ita velle ratiocinari; *Quæcunque Fluxio per hanc Methodum non obtinet Fluentem terminis numero finitis expreſſam, illa Fluxio talem Fluentem habere plane non poteſt.* Sed negatur hoc, uſquedum oſtenſum fuerit hanc Methodum ad omnes Fluentes finitas poſſibiles ſeſe extendere. Contrarium potius in exemplo poteſt oſtendi. Sit enim Fluxio duplex binomialis $(8x^4 - a^4)dx \times (a^2+x^2)^{1:2}$, cujus neutrum membrum neu-

† Supra, pag. 131.

tram habet conditionem, ut ſit $(\theta + 1) : \eta$, vel $(\theta + \eta\lambda + 1) : - \eta$ numerus integer & affirmativus, adeoque ſecundum Auctorem non haberet Fluentem finitam; interim tamen habet, ut aliunde ſcimus. Si vero quod extra vinculum eſt ſub vinculum involveretur, & deinde Canoni generali infinitinomiali §. III applicaretur; immanis adeo calculi moles requireretur, ut neſciam an Auctor per eum mihi facile daturus ſit Fluentem quæſitam, quam ego tamen per aliam viam commodiſſime & ſine magno labore dabo: vel etiamſi quod extra vinculum eſt non involvatur ſub illud, ſed ſtatim ad Canonem generalem applicetur; dubito tamen an Series alicubi abrumpatur, ita ut omnes ſequentes termini evaneſcant: nam contingere quidem poteſt ut aliquis terminus evadat nullus, ſed ſequentes nihilo ſecius aliquid efficiunt; unde Fluens non dabitur ſub terminis numero finitis. Sit v. g. Fluxio $dx(aa + 4xx)(aa + xx)^{1:2}$, cujus Fluentem finitam eſſe certo ſcio; eſt enim $(aax + x^3) \times (aa + xx)^{1:2}$; ſed ſi ad Canonem generalem applicetur, evaneſcet quidem ſecundus terminus, verum tertius & quartus, quos tentavi, & haud dubie ſequentes, aliquid efficiunt; adeo ut nullæ hic habeantur conditiones abrumpendi: niſi aliquis velit dicere, ideo quoniam ſecundus terminus evaneſcat, in primo termino ſubſiſtendum eſſe, & omnes ſequentes negligendos; quemadmodum revera primus terminus ex Canone generali repertus $(aa + xx)^{3:2} x$ jam ipſam dat Fluentem $(aax + x^3) \times (aa + xx)^{1:2}$ aliunde mihi repertam. Sed ſi hoc neſcirem, quis mihi diceret, aut unde poſſem cognoſcere, omnes terminos poſt ſecundum in infinitum ſumtos ſe mutuo deſtruere, id eſt, ſummam affirmativorum æqualem eſſe ſummæ negativorum. Quid etiam dicemus de $x dx (aa + xx)^{1:2}$, cujus Fluens, ut facile patet, eſt $\frac{1}{3} (aa + xx)^{3:2}$; interim ſi applicetur ad Canonem generalem, quod duobus modis fieri poteſt, exprimendo Fluxionem datam, vel ſic $xdx.1.(aa + x^2)^{1:2}$, vel ſic $dx.$

$(0 +$

$(0+1x^1).(aa+0x+x^2)^{1:2}$; priori modo invenitur $\int(xdx.(aa+xx)^{1:2}) = (aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6.}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8.}.\frac{x^8}{a^8}$, &c.), & poſteriori modo $=$ iterum $(aa+xx)^{3:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} +$ &c.); ubi Fluens non tantum non exprimitur terminis numero finitis; ſed etiam hoc inconveniens ſequitur, quod cujuſcunque magnitudinis ſit x, tamen hæc Series $\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{5}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{5.7}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{5.7.9}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8} +$ &c. ſemper ſit $= \frac{1}{7}$, id eſt, indeterminatum ſit $=$ determinato; quod quomodo cum ſana ratione conciliari poſſit, videat Auctor. Eadem difficultas obvenit circa $xdx(aa+xx)^{-1:2}$, cujus Fluentem ſcimus eſſe $(aa+xx)^{1:2}$ ſeu $\surd(aa+xx)$; interim per Canonem generalem ſequeretur illam eſſe $= (aa+xx)^{1:2} \times (\frac{1}{2}.\frac{xx}{aa} - \frac{3}{2.4}.\frac{x^4}{a^4} + \frac{3.5}{2.4.6}.\frac{x^6}{a^6} - \frac{3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{x^8}{a^8} +$ &c.) id eſt, iterum determinatum æquale indeterminato. Si denique Fluxiones ſupra allatæ ita efferantur, ut indices indeterminatarum evadant negativæ, aliæ novæ difficultates oboriuntur; Fluxio v.g. jam ſupra conſiderata $dx(aa+4xx) \times (aa+xx)^{1:2}$, ſi mutetur in hanc formam $x^3dx(aax^{-2}+4) \times (aax^{-2}+1)^{1:2}$; ejuſdem utique valoris cum priore, & ſi applicetur ad Canonem generalem, habebitur pro Fluente $x^4 + 0aaxx + a^4 : 0$ &c. ubi tertius terminus eſt magnitudinis infinitæ, cum tamen ipſa tota Fluens finita tantum ſit: contra ſi ultimum exemplum $xdx \times (aa+xx)^{-1:2}$ transformemus in hanc formam $dx.1.(aax^{-2}+1)^{-1:2}$ habebimus ex Canone generali, pro tota Serie, primum tantum terminum x, reliquis ſingulis in nihilum abeuntibus; unde Fluens foret tantum $= x$, cum tamen ſit $= \surd(aa+xx)$. Alias difficultates, quas movere poſſem, ſilentio prætereo; inte-

rim exemplum ipſum, quod Auctor pag. 70 & 71 proponit, nonrite procedit: dicit enim quod $\int(dx . x^{-5:2} (3a - bxx) . (a + bxx + cx^3)^{-1:2})$ Canoni generali applicata det $-2\sqrt{(a - bxx + cx^3)} : x^3$; ego vero aliam Fluentem inveni: certe, quam Auctor tradit, vera Fluens eſſe non poteſt: nam ſi ejus ſumatur Fluxio per methodum directam, provenit $\frac{3cx^3 - 4bxx + 6a}{x^4\sqrt{(a - bxx + cx^3)}} dx$, quæ utique diſcrepat a propoſita $\frac{3a - bxx}{xx\sqrt{(ax - bx^3 + cx^4)}} dx$; contra intentum Auctoris.

Pag. 73. *Ubi obſervandum quod, ſi* 1 *vel* $\frac{1}{2m - 2}$ *fuerit æqualis numero integro & affirmativo. . . . . Series . . . dabit longitudinem* [Parabolæ cujus æquatio $y = x^m$] *terminis numero finitis exprimendam.*

Hoc & plura alia circa Parabolas jam obſervavi & publicavi in *Act. Lipſ.* 1698, pag. 463 & ſeqq. * ubi oſtendi omnem Parabolam abſolute eſſe rectificabilem, aut per ſe, aut conjunctam cum alia; per ſe, ſi exponens Parabolæ ſit $= (1 + 2p) : 2p$ [ubi per p intelligo numerum integrum quemvis, ſcilicet poſitivum]; cum alia vero, generaliter in omni caſu.

Pag. 81. Caſ. VI. *Sit ratio Radii ad Circumferentiam ab ea deſcriptam* $\frac{a}{b}$; *Eritque* $\frac{b}{a} \times xy\dot{y} = \dot{C}$ [C ſolidum eſt, genitum rotatione plani curvilinei, cujus abſciſſa x, ordinata y] *Ubi Rotationis Axis eſt ſummitatis axis Curvæ tangens, & planum abſciſſæ adjacet.*

Præcipitanter hic agit Auctor, non enim $\frac{b}{a} xydy$, ſed $\frac{b}{a} xydx = dC$; neque hoc tanquam vitium typographicum excuſari poteſt: nam exemplum pag. ſeq. pro Caſu ſexto inſerviens hunc errorem ſupponit, quando habetur $dC = \frac{mb}{a} x^{2m} dx$, & $C =$

* N°. L. pag. 250. *Tom. I.*

$C = \frac{mb}{a} \times \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$; id quod ita corrigi debet; $dC = \frac{b}{a} x^{m+1} dx$ & $C = \frac{b}{a} \times \frac{x^{m+2}}{m+2}$.

Pag. 103. *Sit denique* $S = \frac{2b}{3a} x^{3:2} \times (\frac{1}{4} x^{-1} + 1)^{3:2}$, *ſitque axis rotationis abſciſſa; erit per Caſ. I. Probl. III.* $\dot{S} = \frac{b}{a} x^{1:2} \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)} = \frac{b}{a} y \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \frac{b}{a} y \dot{L}$; *factaque diviſione per* $\dot{L} = \dot{x} \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$ [*data enim* $\dot{S}$, *datur* $\dot{L}$, *eſt quippe* $\dot{L} = \frac{a \dot{S}}{b y}$] *habebitur* $y = x^{1:2}$.

Purus paralogiſmus! miror Cl. Auctorem tam facile deceptum, dum ſupponit quod eſt in quæſtione, quando dicit, factaque diviſione per $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$; unde enim ſcit quod $dL = dx \sqrt{(\frac{1}{4} x^{-1} + 1)}$? Huc nihil confert quod per parentheſin addit [*data enim* dS, *datur* dL, *eſt quippe* $dL = adS : by$], nam falſum eſt quod data dS detur dL, niſi ſimul & ipſa y detur; in noſtro vero caſu non datur y, ſed quæritur. Sane hic caſus non tam facile ſolvitur ut Auctor putat; ſi enim rite ad æquationem reducatur; habebitur $dx \sqrt{(x - y + \frac{1}{4})} = dy \sqrt{y}$, ubi indeterminatæ implicantur; adeoque a ſe invicem ſeparandæ ſunt, antequam ſolutionem aggredi liceat: eſt autem ſeparationis negotium unum ex maxime arduis & indaginis abſtruſiſſimæ: patet itaque Auctorem non arte, ſed caſu, in veram incidiſſe Solutionem; quia haud dubie curvam ipſam quærendam $y = x^{1:2}$ ſibi prius propoſuit, & ex ea per methodum directam quæſivit dS, unde facile pervenit ad ipſum S; ad hoc deinde tanquam datum accommodavit ſuum quæſitum, quod ex ipſa ſua formatione jam præcognitum habebat; adeo ut mirum non ſit per paralogiſmum ad veritatem perveniſſe. Sed ut paralogiſmus magis pateat, ſumamus aliud ſimile exemplum, & in

interim idem ratiocinium Auctoris ſequamur: ſit igitur $S = \int \frac{3b}{2a} x^2 dx \surd (\frac{4}{9} x^{-1} + 1)$; ſitque axis rotationis abſciſſa; erit per Caſum I, Probl. III, $dS = \frac{3b}{2a} xx dx \surd (\frac{4}{9} x^{-1} + 1) = \frac{b}{a} y \surd (dx^2 + dy^2) = \frac{b}{a} y dL$; factaque diviſione per $dL = dx \surd (\frac{4}{9} x^{-1} + 1)$ [data enim dS, datur dL; eſt quippe $dL = adS : by$] habebitur $y = \frac{3}{2} x^2$. Eſſet ergo, ſecundum ratiocinium Auctoris, curva quæſita $y = \frac{3}{2} x^2$; interim tamen veram curvam quæſitam eſſe $y = x^{3:2}$, cuilibet periculum facienti patebit.

Pag. 111. *Data, exempli gratia, Chorda unius Arcus, quæratur Chorda alterius Arcus, qui ſit ad priorem ut* 1 *ad* η.

Hoc jam præſtiti in *Act. Lipſ.* 1701, pag. 170 & ſeqq. * per duas Series univerſales, concinniores quam quæ hic ab Auctore exhibetur, & ni fallor jam olim ab ipſo NEWTONO exhibita fuit; & quidem illas meas Series inveni citra ullum Calculum infiniteſimalem, ex ipſis ſcilicet viſceribus & intima natura arcuum & angulorum.

Pag. 113. Prob. X. *Ex data Serie infinita quantitatibus algebraicis exprimenda, valorem ipſius finitum [ſi modo talem habuerit] invenire.*

Omnia hæc Serierum exempla hic tradita, videntur ab Auctore præformata ex valoribus finitis aſſumtis; adeoque minime mirum eſt, ſi per reverſionem iidem valores ex Seriebus eruuntur. Alias Methodi valde inſufficientes ſunt, innumeras enim Series facile proponam, quarum valores [licet finitos] per eas Methodos non determinabuntur: male igitur pro generalibus venditantur.

Pag. 121. *Curvam invenire, cujus in rectam extenſione Curva data, alias finitis terminis non quadrabilis, quadrabitur.*

Hæc methodus, præterquam quod plerumque immanem requirat calculi molem, etiam in caſibus facillimis, ut jam adverſus

* N°. LXIX. pag. 186. ſeq. *Tom. I.* Videatur etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* nec non Numerus CXXVII. pag. 526. *Tom. II.*

verſus Cl. CRAIGIUM animadverti in *Actis Lipſ.* 1695, pag. 64 *, hoc etiam defectu laborat, quod non ſit generalis, ut Auctor noſter putat. Exempla vero duo quæ affert $y = \sqrt{(xx + aa)}$, & $y = \sqrt{(x^m + a^n)}$, per methodum noſtram in loco citato inſinuatam, & in conſtructione curvæ paracentricæ feliciter adhibitam, ut videre eſt in *Actis Lipſ.* 1694, pag. 396 & 397 †, ſine ullo negotio ſolvuntur. Rem in poſteriori exemplo, quod prius continet, oſtendiſſe ſufficiet. $ydx = dx\sqrt{(x^m + a^n)}$; quadratum ejus $x^m dx^2 + a^n dx^2$ dividatur in duo quadrata, quorum latera habeant Fluentes geometrice rationales; puta in $x^m dx^2$ & $a^n dx^2$, quorum latera ſunt $x^{m:2} dx$ & $a^{n:2} dx$, eorumque Fluentes $\frac{2}{m+2} x^{(m+2):2}$, & $a^{n:2} x$, diviſa utraque per $a^{n:2}$, habebuntur $2 x^{(m+2):2} : (m+2) a^{n:2}$, & x, pro coordinatis curvæ quæſitæ, quæ multiplicata per $a^{n:2}$, producit aream propoſitam $\int dx \sqrt{(x^m + a^n)}$; quæ curva eadem eſt cum ea quam Auctor per longum calculum invenit. Quod autem hæc methodus qua Auctor, poſt acutiſſimum CRAIGIUM, utitur, non ſit univerſalis, patet ex iis quæ inſinuavi in *Actis Lipſ.* 1695, pag. 63 & 376 §; præterea hoc incommodi habet, quod plerumque Linea per eam quæranda non ſola ſit cujus extenſione area data quadratur, ſed recta quædam ipſi fere ſemper addenda vel demenda eſt. Sic pro quadratura Circuli, vel potius ſemiſegmenti circularis $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$, invenit quidem Cl. CRAIGIUS arcum itidem circularem; non autem purum, ſed cum recta quadam permixtum: verum per meam methodum, curva quadratrix ſemper pura & ſola obtinetur. Sit, v. g. idem ſemiſegmentum circulare $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$ quadrandum per extenſionem ſolam ſolius alicujus curvæ algebraicæ: Pro hac fiat curva, cujus coordinatæ ſint $(2a^3 - 3ayy + y^3) : 3aa$

* N°. XXIII. pag. 136. *Tom. I.*
† N°. XIX. pag. 121. *Tom. I.*
§ Nis. XXIII & XXVI. pag. 137 & 144, *Tom. I.*

& $(2ay - yy)\sqrt{(2ay - yy)} : 3aa$; dico longitudinem hujus curvæ, ductam in radium, fore æqualem ſemiſegmento circulari $\int dy \sqrt{(2ay - yy)}$. Notandum etiam me infinitis aliis modis idem poſſe præſtare; habemus ergo infinitas veras Circuli quadraturas tranſcendentes, adeoque errat Cl. CRAIGIUS, quando illam uno tantum modo poſſibilem dicit in ſuo Tractatu *De figurarum curvilinearum quadraturis* pag. 51. Eodem modo pro quadratura Hyperbolæ $\int dx \sqrt{(x^2 + aa)}$, præter Parabolam ejus quadratricem jam ab HEURAETIO detectam, invenio innumeras alias, inter quas hæc eſt, cujus coordinatæ ſunt $(3aax - x^3):3aa$ & $(3aa - xx)\sqrt{(3aa - xx)} : 3aa$, quæ extenſa in rectam & multiplicata per a facit ſpatium $=$ areæ datæ hyperbolicæ $\int dx \sqrt{(xx + aa)}$ †. Cæterum debuiſſet Cl. CHEYNÆUS hac occaſione oſtendere methodum transformandi datam curvam algebraïcam in aliam, vel alias algebraïcas diverſæ naturæ, ſed ejuſdem longitudinis; quod Problema, perutile ſane, generaliſſime ſolvi, aliiſque adhuc ſolvendum propoſui in *Diario Gallico*, 1702, menſ. Februar. §

† Videatur de hoc argumento Nus. CXXXII, pag 582, *Tom. II.*

§ N° LXXII, pag 406. Vid. N°. LXXIV, pag. 408, & LXXVII ... LXXXIII, pag. 437 ... 452. *Tom. I.*

N°. CLXVIII.

OBSERVATIONES

In Clar. MOIVRÆI *Animadverſiones in D.* CHEYNÆI *Tractatum de Fluxionum Methodo inverſa,*

Editas *Londini* 1704.

In Præfationem.

Pag. 1. *SI intento quaſi digito errores commonſtrarem ſimul & emendarem.*

Non tamen omnes commonſtravit.

Pag. 4. *Nec in his quadrandis ad* Logarithmos, *vel ad* Logarithmorum Logarithmos, &c. *vel ad Serierum numerum infinitum… confugiendum eſſe oſtendi.*

Imo commode & eleganter ad Logarithmos confugitur, nec tam bene ad Series.

Pag. 5. *Sed hoc idem Theorema* [*Joh.* BERNOULLI pro Fluxionis alicujus datæ Fluente invenienda] *latius producere conatus, id quidem infinities implicatius, ne minimum vero univerſalius, reddidit.*

Veriſſime hoc mecum obſervavit Cl. MOIVRÆUS; idque jam objeci Cl. CHEYNÆO *, ſed nihil reſpondit.

Pag. 10. *Aut erronea, aut nullius momenti aſſerere non dubito.*

Quæ de Centro Oſcillationis habet CHEYNÆUS, oſtendunt eum eſſe parum in concretis verſatum, nam pleraque ſunt falſa.

In Animadverſiones.

Pag. 2. *Hanc inde concluſionem ſtatim deducit, nempe Logarithmi Fluxionem, Fluxioni numeri per ipſum numerum diviſæ æquari.*

Hæc concluſio eſt ipſa mea Regula, quam Cl. CHEYNÆUS ipſiſſimis fere verbis exſcripſit ex *Act. Lipſ.* 1697, pag. 129, † *Differentiale Logarithmi*, &c. quamque non recte infringere conatur Cel. MOIVRÆUS.

Pag. 3. *Nam pag.* 1. *dicit Fluentem ipſius* $x^m dx$ *eſſe* $x^{m+1}:(m+1) \pm a^{m+1}$, &c.

Hoc intelligendum eſt de Fluente in abſtracto conſiderata, eam ſcil. data qualibet quantitate determinata augeri vel minui poſſe, prout poſtea in certa applicatione res exigit.

Pag. ead. *Hoc ſuppoſito, dico* $x^{m+1}lx:(m+1)—x^{m+1}:(m+1)^2$ *non eſſe ipſius* $x^m dxlx$ *Fluentem abſolutam, nam quamvis* $dx:x$ *ſit Fluxio Logarithmi ipſius* x, *quando* x *eſt ſupra unitatem; tamen* $—dx:x$ *erit Fluxio Logarithmi ejuſdem* x, *quando* x *eſt infra unitatem.*

 Imo

* N°. præced. pag. 134. & 135. † N°. XXXVI, pag. 183. Tom. I.

Imo ego dico eſſe Fluentem abſolutam in abſtracto ſumtam, ſed augendam vel minuendam debite, ſi ad aream exprimendam applicetur, & ſemper $dx:x$ ſumi poteſt pro Fluxione Logarithmi ipſius x, non obſtante quod x poſſit eſſe infra unitatem: in calculo enim perficiendo non reſpicitur utrum x majus minuſve ſit unitate, quemadmodum etiam in Analyſi ordinaria omnes quantitates ſignis affirmativis afficiuntur in abſtracto, ſed Problematis conditio poſtea hæc omnia limitat.

Pag. 4. *Area erit* $x^{m+1}lx:(m+1) - x^{m+1}:(m+1)^2$, *dum* x *eſt infra unitatem; quam primum autem* x *fit* $=1$, *erit Area* $1:(m+1)^2$, *non vero* $-1:(m+1)^2$, *ut ſequitur ex ipſius calculo: quando autem* x *evadit major unitate, erit Area* $x^{m+1}lx:(m+1) - x^{m+1}:(m+1)^2 + 2:(m+1)^2$.

Hæc non procedunt: ſi enim x eſt infra unitatem, patet lx fore concipiendum ut negativum, adeoque tunc MOIVRÆI expreſſionem non differre ab ea CHEYNÆI, niſi quod hujus negativa ſit, illius affirmativa: ſed hoc ideo fit, quia quandiu x eſt infra unitatem, applicata $x^m lx$ eſt negativa; quæ per conſequens Aream negativam faciat, reſpectu ejus quæ oritur per applicatas affirmativas, exiſtente ſcil. x ſupra unitatem.

Quæ ſequuntur ſunt mera logomachia: CHEYNÆUS enim Aream ſumit, quæ oritur ex differentia affirmativæ & negativæ; & MOIVRÆUS earundem ſummam.

Pag. 5. *Igitur* $dq = \frac{1}{2}x\,dx$, *& proinde* $q = \frac{1}{4}xx$.

Hic Cl. MOIVRÆUS approbat, quod modo ante in CHEYNÆO improbabat; ſcil. quod pro Fluente abſoluta ipſius dq ponat $\frac{1}{4}xx$, cum poſſit eſſe $\frac{1}{4}xx \pm aa$. Sed hæc ſunt vitilitigia.

Pag. ead. *Ergo Fluens ipſius* $xv\,\overline{dx}$ *eſt* $\frac{1}{2}xxv - \frac{1}{4}xx$ [poſito ſcil. $dv = dx:x$]

Atqui eadem Fluens, per Theorema meum univerſale a CHEYNÆO pag. 50 citatum, invenitur $\frac{1}{2}xxv - \frac{1}{2}xx + \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \&c.\right)xx$. Oportet igi-

tur

tur ut hæc Series $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6}$ &c. ſit $= \frac{1}{4}$: quod ſatis elegans eſt. Sic tamen poteſt inveniri a priori.

$$\text{Subtr.} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{\&c.} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \text{\&c.} = 1$$

$$\text{Subtr.}\ \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \text{\&c.} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \text{\&c} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ergo}\ \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \text{\&c.} = \frac{1}{4}\quad \textit{Q. E. I.}$$

Haud abſimili modo invenitur $\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6}$ &c. $= \frac{1}{18}$, & ita porro.

Pag. 7. Ex figura quis concluderet MOIVRÆUM ſupponere applicatam $x^m v$ fieri infinitam, quando $x = 0$. Sed hoc non verum eſt, niſi quando $m = 0$, quo caſu curva in ipſam Logarithmicam degenerat, & quando m minor eſt nihilo. Alias enim, quamdiu m eſt aliquid, curva habet eam figuram quæ exhibetur *Fig.* 1. aut 2, & quidem *Fig.* 1, ſi $m > 1$, & *Fig.* 2, ſi $m =$ vel < 1. TAB. LXXX.

Pag. 8. *Sed cum Area NBC incipiat a puncto N, quantitas* N°. CLXVIII. $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *nihil eſſe debet, cum* x *eſt* $= 1$, &c.

Sed cur Area non æque ab A, quam ab N incipere poteſt; ſiquidem ut modo oſtendi, curva habet hanc figuram. Itaque quantitas $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$ nihil eſſe debet, cum x eſt $= 0$. Sed poſita $x = 0$, tota quantitas ſupra dicta evaneſcit, ſeu fit $0 - 0$. Sciendum enim quantitatem $x^{m+1} v : (m+1)$ evadere 0, non obſtante quod v fiat

$= -\infty$, quod ſic probo. Eſt $x^{m+1} v = x^{m+1} lx$, adeoque $x^{m+1} v = l x^{x^{m+1}}$ = [exiſtente $x = o$] $l o^{o^{m+1}} = l o^{o} = l 1 = o$, ſi ſcil. $m+1$ = numero poſitivo; alias, ſi $m+1$ = numero negativo, erit $l o^{o^{m+1}} = l o^{\infty} = l o = -\infty$, vel ſi

TAB. LXXX. N°. CLXVIII. $m+1 = o$, erit $l o^{o^{m+1}} = l o^{o^{o}} = l o^{1} = l o = -\infty$. Notandum porro, ſi m = numero negativo curvam habere figuram ſimilem ei, quæ exhibetur *Fig.* 3.

Pag. ead. *Si jam velis ut Area ab aſymptoto incipiant*, *Area* AbcR *eſt* $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$.

Hic iterum ſupponit AR eſſe ſemper aſymptoton curvæ CN*c*, contra ea quæ modo obſervavi: & ſi AR eſt aſymptotos, & quidem exiſtente m = vel < -1, falſum tunc eſt aream A*bc*R eſſe $x^{m+1} : (m+1)^2 + x^{m+1} v : (m+1)$, poſito enim $x = o$, evaderet Area infinita: quod eſt abſurdum.

Pag. 10. *At Regula hæc*, &c. [Pone Fluentem.... repertam = o, & habebis ſignum. Iterumque pone indeterminatam quantitatem qua Fluens illa exprimitur = o, &c. obtinebis ipſam quantitatem demendam vel addendam Fluenti repertæ, prout ſignum innuerit] *locum hic habere non poteſt.*

Sed Cl. MOIVRÆUS non animadvertit Regulam illam eſſe paralogiſticam. *

Pag. ead. *Scribendo enim* o *pro* x *in terminis* $x^{m+1} v : (m+1) - x^{m+1} : (m+1)^2$, *Fluens tota deſtruetur.*

Sed ſi $m < o$, Fluens non deſtrueretur, ſed potius infinita evaderet.

Pag. 11. *Probabitur.... quod Fluentes cetera per alternantes defectus & exceſſus in infinitum ſunt corrigendæ.*

Quid ſi autem iſti exceſſus & defectus omnes ſe mutuo deſtruant, erit utique Fluens inventa vera Area quæſita; quod autem ſe mutuo deſtruant patet ex eo quod, poſito $x = o$, Fluens

* Vid. N°. præced. pag. 137. animadverſio in pag. 65.

Digitized by Google



Fig. 9.

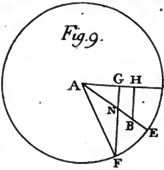


Fig. 10.

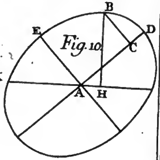


Fig. 12.

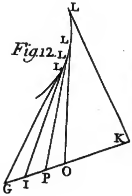
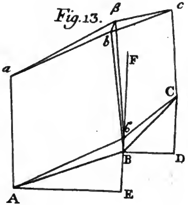


Fig. 13.



N.° CLXVI.

N.° CLXVIII.

Fig. 2.

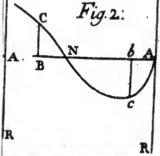
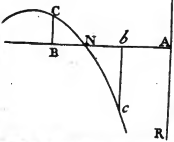


Fig. 3.



NAPOLI

Digitized by Google



Fluens inventa etiam evaneſcat: ergo hic fruſtra caſtigatur CHEYNÆUS.

Pag. 11. & 12. *Fluens hujus quantitatis* $x^x dx\ldots$ *ſi ſit* $x = 1 + z\ldots$ *erit* $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{15}z^4 + \frac{1}{72}z^6$ &c.

Nulla hujus Seriei uniformitas conſpicitur: Neque hinc elicitur illa Series particularis elegantiſſima, pro caſu $x = 1$, quam dedi in *Actis* 1697, pag. 131. †

Pag. 13. *Ubi quantitas* x^x *conſideranda venit*, *Logarithmos vocat* [CHEYNÆUS] *in auxilium*: *ubi* x^{x^x} *Logarithmos Logarithmorum*, *&c. Nos vero ad hæc omnia nihil adhibemus præter numeros vulgares.*

Etiam Series ex Logarithmis conflata poteſt mutari in aliam ex vulgaribus numeris conſtantem, ſi pro Logarithmis ſubſtituatur valor eorum per Seriem infinitam expreſſus.

Pag. 17. *Fluentem quantitatis* $(dy : a) \times \surd((2ady - ydy)^2 : (2ay - yy))$ *quærere ſimulat*, *non quærit*; *jam novit formam futuram eſſe* $byv^2 + cv^2 + (dyv + eav)\surd(2ay + yy) + fy^3 + qay^2 + hay$, *ſed quo pacto hoc ſibi innotuit minime explicat.*

Haud dubie ex inductione.

Pag. *69*. Theorematis mei, quo Fluens *ydz* per Seriem univerſaliſſimam exhibetur, inveſtigationem, quam dare voluit CHEYNÆUS, ſcitiſſime explodit Cél. MOIVRÆUS.

Pag. 71. *Fluens ipſius* $dz : (1 + z)$ *erit* [ponendo $y = 1 + z$] $\frac{z}{y} + \frac{z^2}{2y^2} + \frac{z^3}{3y^3} + \frac{z^4}{4y^4}$ &c. *Quæ Series Logarithmum ipſius* $1 + z$ *exhibet*, *& hoc vulgari Logarithmorum Serie multo commodius*, &c.

Hoc bene obſervatur, quod & ego obſervavi, cum primus hanc Seriem invenirem.

Pag. 72. *Hic iterum (uti ſolet) fruſtra ſedulus eſt*, *nec exiſtimavit Cl.* BERNOULLII *Seriem ſatis generalem eſſe.*

Hanc

† N°. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.*

Digitized by Google

Hinc fruſtraneam ſedulitatem etiam ego exprobravi Cl. CHEYNÆO in Animadverſionibus meis †; ſed nihil reſpondit.

Pag. 81. *Suppoſui* $az + bz^2 + cz^3 + \&c = gy + hy^2 + iy^3 +$ &c; *& valorem ipſius* z *in Serie infinita exhibui, quæ tota ex poteſtatibus ipſius* y, *una cum datis, componitur.*

Valorem z facillime determinare licet, ut oſtendi in litteris ad Cl. HERMANNUM. Sed ſi alterutra, vel utraque Series incipiat a quantitate pura, non video quomodo tunc vel MOIVRÆUS vel CHEYNÆUS valorem z mihi determinare facile queat.

Pag. ead. *In mirabili iſto Theoremate* NEWTONI, ... *quod continet Theoriam integram Sectionum angularium.*

Talia Theoremata etiam ego in *Actis Lipſ.* 1701. pag. 170 *, publicavi.

Pag. ead. *duo a nobis inventa Theoremata.... unum pro extrahenda radice æquationis infinitæ.... alterum pro infinitinomio ad poteſtatem.... indeterminatam elevando*,

Facile hæc duo Theoremata etiam a me ſunt inventa, ut oſtendi in litteris ad D. HERMANNUM.

Pag. 86. *Eo quod* $(a + x)^n = y$, *ſtatim concludit Logarithmum unius Logarithmo alterius æqualem eſſe; quod verum non eſt, niſi utrumque ex eadem Logarithmorum ſcala depromſerit.*

Levis objectio : utrumque enim ex eadem Logarithmorum ſcala depromtum eſſe, per ſe ſupponitur.

Pag. 88. *Cum quantitas* $x + a$ *ad poteſtatem cujus index* n *elevanda ſit, quidni ſumenda fuerit* x^n *pro termino primo Seriei, eodem jure ac* a^n.

Ideo x^n non debet ſumi, quoniam *A* [primus terminus] ponitur quantitas conſtans, & x^n eſt indeterminata ; & proin hæc pro illa ſumi non poteſt, ſed recte ſumitur a^n.

Pag. 89.

† Supra pag. 134. & 135.

* N°. LXIX. pag. 386. ſeq. *Tom. I.* Vid. etiam Nus. LXXXIX. pag. 511. *Tom. I.* & Nus. CXXVII, pag. 526. *Tom. II.*

Pag. 89 & 90. *Ubi ex hac æquatione* $a^2 ddx + xdy^2 = 0$ *radicem* x *invenire ſatagit*, ... *aſſumit æquationem* $x = by + cy^3 + dy^5 + \&c$, ... *& ponit* $b = 1$, ... *Sed* .... *cur non liceat ponere* $b = 2$, *vel* 3, *vel* &c.

Licet utique, etiamſi diverſæ Series exſurgant. Ratio eſt, quoniam hæc æquatio Fluxiones ſecundas involvens admittit diverſas æquationes involventes Fluxiones primas, ſcil. $aaddx + xdy^2 = 0$, multipl. per dx, erit $aadxddx + xdxdy^2 = 0$; ſumtis Fluentibus erit $\frac{1}{2} aadx^2 + \frac{1}{2} xxdy^2 = \pm \frac{1}{2} bbdy^2$, ideoque $dy = adx : \sqrt{(\pm bb - xx)}$.

Pag. 93. *Problematis* [de binomio ad poteſtatem indeterminatam elevando] *libet*.... *inveſtigationem adducere*.... *quam quatuor abhinc annis inveni.*

Aliam ego inveni, duodecim abhinc annis, longe naturaliorem; utpote quæ a Fluxionalibus non petitur; quamque *Marchioni* HOSPITALIO impertivi in *Lectionibus* meis in ipſius uſum conſcriptis. *

Pag. 97. *In Problemate pro Serie infinita ad poteſtatem quamcunque elevanda, poſtulat ut detur Seriei quadratum, cubus, biquadratum*, &c.... *Nonne vero hoc eſt manifeſta petitio principii?*

Minime gentium; niſi omnis perfecta inductio ſit nominanda petitio principii.

Pag. 102. *Theoremata quædam pro comparatione curvarum, quæ* Phil. Tranſ. N°. 278, *exhibui*.... *exiſtimavi*.... *huc* referenda.

Omnia hæc Theoremata jam ante multos annos mihi erant cognita, uti patet ex *Lectionibus* meis cum HOSPITALIO communicatis †; & quidem omnia ſimul demonſtrari poſſunt per ea quæ publicavi de integratione fractionum rationalium in *Actis*, 1703, pag. 26 ſeq. §. Nam omnes iſtæ quantitates binomiales ſub vinculo comprehenſæ, de quibus MOIVRÆUS agit, [ſunt eæ $\sqrt{(dx \pm xx)}$ & $\sqrt{(rr \pm xx)}$,] poſſunt facillime mutari in quantitates rationales, adeoque ſemper dependent earum integralia [niſi ſint finita] a quadratura vel Circuli, vel Hyperbolæ, aut realis, aut imaginariæ.

* N°. CXLIX, Lect. XLVIII, pag. 522, *Tom. III.* † Ibid.
§ N°. LXX, pag. 393, *Tom. I.*

Pag. 111. *Si* m *exponatur per alium quemvis terminum diverſum ab iis quos ſupra memoravimus* [ii ſunt qui continentur in his Seriebus $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ &c. -3, -4, -5, -6, -7, &c. -2, -1, 0, 1, 2, 3, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m \sqrt{(dx+xx)}$ *aut* $x^m \sqrt{(dx-xx)}$, *non quadratur exacte, nec illa ab Hyperbola, aut hæc a Circulo pendet.*

Hoc Corollarium non eſt ſatis verum: exponatur enim, v. g. *m* per $-\frac{7}{2}$, qui caſus in præcedentes limitationes non cadit; dependebit tamen quadratura curvæ $x^{-7:2}\sqrt{(Dx \pm xx)}$ a quadratura Hyperbolæ: id quod patet, ſi ponatur $x = 1:y$; tunc enim $x^{-7:2}dx\sqrt{(Dx \pm xx)}$ mutatur in hanc expreſſionem $-dy\sqrt{(Dyy+y)}$, quæ utique dependet a quadratura Hyperbolæ. Idem valet. ſi *m* exponatur per quemcunque terminum hujus Seriei $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{9}{2}$ &c. Semper enim dependent a quadratura Hyperbolæ, ſive ſit $+$, ſive $-$.

Pag. 117. *Si* m *ponatur æqualis termino cuivis, qui non in limitationes præcedentes cadat* [eæ erant $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$ &c, -1, -2, -3, -4, &c. 0, 1, 2, 3, 4, &c.] *curva cujus ordinata* $x^m:\sqrt{(dx-xx)}$ *aut* $x^m:\sqrt{(dx+xx)}$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hac ab Hyperbola pendet.*

Hoc iterum falſum eſt. Nam ſi *m* ponatur æqualis termino cuivis hujus Seriei $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{2}$ &c, curva cujus ordinata $x^m:\sqrt{(dx \pm xx)}$ ſemper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 120. *Si* m *exponatur per terminum quemvis diverſum ab illis quos ſupra memoravimus* [nempe 1, 3, 5, 7, &c. -4, -6, -8, -10, &c, -2, 0, 2, 4, 6, 8, &c.] *curva, cujus ordinata* $x^m \sqrt{(rr-xx)}$, *aut* $x^m \sqrt{(rr+xx)}$, *neque exacte quadratur, nec illa a Circulo, aut hac ab Hyperbola pendet.*

Etiam hoc minus recte. Nam ſi *m* exponatur æqualis termino cuilibet hujus Seriei, -1, -3, -5, -7, &c: cur-

curva, cujus ordinata $x^m \sqrt{(rr \pm xx)}$ ſemper dependet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. 125. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet a præcedentibus* [1, 3, 5, 7, &c. — 2, — 4, — 6, — 8, &c. 0, 2, 4, 6, 8, &c.], *diverſum, curva cujus ordinata* $x^m : \sqrt{(rr - xx)}$ *aut* $x^m : \sqrt{(rr + xx)}$ *neque quadratur exacte, nec illa a Circulo, aut hæc ab Hyperbola pendet.*

Item & hic, ſi *m* ſumatur æqualis termino cuivis hujus Seriei — 1, — 3, — 5, — 7, &c. curva, cujus ordinata $x^m : \sqrt{(rr \pm xx)}$ pendet a quadratura Hyperbolæ.

Pag. ead. *Sit* A *Area curvæ, cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (d - x)$; *ſit* B *Area curvæ, cujus abſciſſa itidem* x, *ejuſque ordinatim applicata* $x^{m-n} : (d - x)$; *erit Area* $A = d^n B - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, *&c. Sit ordinatim applicata* $x^m : (d + x)$, *tunc Area erit* $A = x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c. $\pm d^n B$.

Hæc Series multis laborat difficultatibus,

1°. *A*, vel ejus complementum jam eſt $= - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1) - ddx^{m-2} : (m-2)$, &c. uti facile oſtenditur dividendo actualiter x^m per $d - x$, facto diviſionis initio a $-x$; ſummato enim quotiente, oritur hæc Series $- x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c.; adeoque ſequeretur, vel $d^n B$ eſſe $= 0$, vel ſemper eſſe $= A -$ compl. *A*; quod utrumque eſt abſurdum.

2°. Si *m* eſt numerus integer & affirmativus, terminus tandem occurret $d^m x^{m-m} : (m-m) = d^m x^0 : 0 = d^m : 0 =$ infinito, ideoque Series nihil pro Area determinabit.

3°. Eſto $n = 0$, quo caſu erit $d^n B = B = A$; adeoque foret $A = A - x^m : m - dx^{m-1} : (m-1)$ &c. quod eſt abſurdum.

4°. Ex eo quod $d > x$, facile demonſtrari poteſt terminum infiniteſimum $d^{\infty} x^{m-\infty} : (m - \infty)$ fore ſemper magnitudinis infinitæ; adeoque Seriem in omni caſu eſſe divergentem, & proin ad determinandam Aream inutilem.

Eædem hæ difficultates [quarta tantum reſtricta ubi $d > x$] contra alteram Seriem pro Area curvæ, cujus applicata $x^m : (d + x)$ moveri poſſunt. Ut igitur alias demus Series his difficultatibus non obnoxias, dividatur actu x^m per $d - x$, incipiendo a d, & quotiens ſummetur; prodibit $A = x^{m+1} : (m+1) d + x^{m+2} : (m+2) dd + x^{m+3} : (m+3) d^3$, &c. & pro altera dividatur actu x^m per $d + x$ [ſi nempe $d > x$], incipiendo a d; & erit, quotiente ſummato, $A = x^{m+1} : (m+1) d - x^{m+2} (m+2) dd + x^{m+3} : (m+3) d^3$ &c. ſi vero $d < x$, incipienda eſt diviſio ab x; tunc enim, quotiente ſummato, erit $A = x^m : m \quad dx^{m-1} : (m-1) + ddx^{m-2} : (m-2)$ &c.

Pag. 126. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet ſequentis Seriei* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (d - x)$ *aut* $x^m : (d + x)$ *pendet a quadratura Hyperbolæ.*

Imo, non tantum per terminum quemlibet hujus Seriei 0, 1, 2, 3, 4, &c. ſed etiam per quemlibet hujus $-1, -2, -3, -4$, &c. poteſt m exponi, & ſemper tamen pendebit quadratura curvæ cujus applicata $x^m : (d \pm x)$, a quadratura Hyperbolæ. Qua methodo reducendi quadraturas uſus ſit Cl. Moivræus neſcio; interim hoc utique non debebat prætervidere; uti nec hoc, quod ſi m exponatur per quemlibet terminum duplicis hujus Seriei $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{7}{2}$ &c, curva cujus applicata $x^m : (d - x)$ dependebit a quadratura Hyperbolæ, altera vero, cujus applicata $x^m : (d + x)$ pendebit a quadratura Circuli. Porro nec hoc prætervidere debuiſſet, quod

quod ſumto m æquali cuilibet termino hujus Seriei duplicis $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, +\frac{5}{4}, \pm\frac{7}{4}$ &c. quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (d - x)$, dependebit a quadratura Circuli & Hyperbolæ ſimul; reliqui caſus omnes ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ; interdum reales, interdum imaginarios; interdum etiam ad quadraturas, partim Circuli, partim Hyperbolæ reducuntur. Qua de re conſulantur quæ in *Actis Lipſ.* 1703, pag. 26, publicavi †, præſertim Corollarium & Compendia, quæ huic rei maximam lucem fœnerantur. Sic ſi m exponatur per quemcunque terminum hujus duplicis Seriei, $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{7}{3}, \pm\frac{8}{3}$ &c. Dico quod tunc quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (D \pm x)$ dependebit a quadratura partim Hyperbolæ, partim Circuli: Quod ſic paucis oſtendo. Ponatur $x = y^3$, erit $x^m dx : (D \pm x) = 3y^{3m+2} dy : (D \pm y^3)$; Exiſtente igitur m æquali alicui termino in hac Serie $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$, &c. patet $3m + 2$ fore terminum aliquem in hac Serie 3, 4, 6, &c. Diviſo igitur actu, quantum fieri poteſt, $y^{3m+2} dy$ per $D \pm y^3$; ſecundum regulam, quam in citato loco præſcripſi; ex quotiente, utpote rationali & integro, ſumetur integrale; reſidua vero fractio habebit neceſſario, vel hanc formam... $dy : (D \pm y^3)$, vel hanc.... $ydy : (D \pm y^3)$. Oſtendendum igitur reſtat, quomodo horum integralia, vel Fluentes, dependeant a quadratura, partim Hyperbolæ, partim Circuli. Eſto $D = n^3$, & invenietur per regulam meam $1 : (n^3 \pm y^3) = (+\frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn} y) : (nn \mp ny + yy) \pm \frac{1}{3nn} : (\pm n + y)$, & $y : (n^3 \pm y^3) = (\pm\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} y) : (nn \mp ny + yy) - \frac{1}{3n} : (\pm n + y)$. Fluentes autem ipſorum $\pm\frac{dy}{3nn} : (\pm n + y)$ & $\frac{dy}{3n} : (\pm n + y)$ exprimunt Aream hyperbolicam. Pro determinandis reliquorum duorum Fluentibus,

 pona-

† N°. LXX. pag. 399 & 400. Videatur etiam Nus. CXIV, pag. 402. & ſeq. *Tom. II.* necnon Nus. CLVIII. ſupra, pag. 52.

ponatur $y = z \pm \frac{1}{2} n$, erit $(+ \frac{2}{3n} \mp \frac{1}{3nn} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (+ \frac{1}{2n} \mp \frac{1}{3nn} z)\, dz : (+\frac{3}{4} nn + zz)$, & $(\pm \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} y)\, dy : (nn \mp ny + yy) = (\pm \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} z)\, dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$; in quibus iterum Fluentes ipſorum $\pm \frac{1}{3nn} z dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\frac{1}{3n} z dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ dependent a quadratura Hyperbolæ; reliquorum autem $+ \frac{1}{2n} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ & $\pm \frac{1}{2} dz : (\frac{3}{4} nn + zz)$ Fluentes pendent a quadratura Circuli, ut MOIVRÆUS ipſe declarat pag. 128.

Ponatur nunc $x = y^{-3}$ & erit $x^m dx : (D \pm x) = -3y^{-3m-1} dy : (Dy^3 \pm 1)$. Exiſtente igitur m aliquo termino in hac Serie $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}$ &c. manifeſtum eſt $-3m-1$ fore terminum aliquem in iſta Serie 0, 1, 3, 4, &c. adeoque reliqua peraguntur ut prius: Unde tandem conſtat quod aſſeruimus; nempe ſi m exponatur æqualis termino cuicunque hujus duplicis Seriei $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{7}{3}$ &c. fore Aream curvæ, cujus applicata $x^m : (D \pm x)$ quadrabilem per quadraturam partim Hyperbolæ, partim Circuli. Reſolvimus enim Aream illam in Circularem unam & Hyperbolicas duas.

Denique, ſi m exponatur per quemvis terminum hujus Seriei duplicis, $\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}, \pm \frac{7}{6}, \pm \frac{11}{6}, \pm \frac{13}{6}$ &c. Area curvæ, cujus applicata $x^m : (D - x)$ eſt pariter quadrabilis per quadraturam partim Circuli, partim Hyperbolæ. Nam ſit $x = y^6$, erit $x^m dx : (D - x) = 6y^{6m+5} dy : (D - y^6)$. Deinde ſit $x = z^{-6}$, erit $x^m dx : (D - x) = -6z^{-6m-1} dz : (Dz^6 - 1)$. Jam manifeſtum eſt quod, per ſubſtitutionem termini alicujus affirmativi illius Seriei $\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}, \pm \frac{7}{6}$ &c, loco m, habeatur $6m + 5$ æquale termino alicui in hac Serie 6, 10, 12, 16, 18, &c.; & per ſubſtitutionem termini alicujus negativi, fiat $-6m - 1 =$ termino alicui Seriei 0, 4, 6, 10, 12, &c.

Diviſo

Digitized by Google

Diviſo igitur, ſecundum tenorem Regulæ meæ, quantum fieri poteſt, y^{6m+5} per $D - y^6$, vel $z^{-6m-1}dz$ per $Dz^6 - 1$, & quotientis, utpote rationalis & integri, ſumta Fluente vel integrali, reſidua fractio habebit neceſſario, vel formam.... $dy : (D - y^6)$, vel hanc.... $y^4 dy : (D - y^6)$ & pro altera expreſſione, vel hanc.... $dz : (Dz^6 - 1)$, vel hanc.... $z^4 dz : (Dz^6 - 1)$. Eſt autem [poſito $D = n^6$] .... $dy : (n^6 - y^6) =$ ....$dy : (n^3 + y^3)$ $+$.... $dy : (n^3 - y^3)$; horum autem Fluentes, vel integralia dependent [ut per modo ſupra dicta clarum eſt] a quadratura, partim Circuli, partim Hyperbolæ; a qua & reliquarum partium [quoniam eodem modo diſpeſci poſſunt] Fluentes dependent. Ergo &c.

Pag. ead. *Etenim ductis.* &c.

Demonſtratio hæc MOIVRÆI huc redit. Quoniam $x^0 dx : (D \pm x)$ eſt integrabile per quadraturam Hyperbolæ, ergo etiam per Hyperbolæ quadraturam integrabile eſt $x^m dx : (D \pm x)$. Quis autem hanc conſequentiam admitteret; ſi rei veritatem aliunde non noſſet. ?

Pag. 127. *Sit* A *Area curvæ cujus abſciſſa* x, *ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$. *Sit* B *Area curva, cujus abſciſſa itidem* x, *ordinatim applicata* $x^{m-2n} : (rr + xx)$; *erit Area* $A = x^{m-1} : (m-1) - rr\,x^{m-3} : (m-3) + r^4 x^{m-5} : (m-5)$ &c.... $\mp r^{2n} B$.

Series hæc ſimilibus premitur difficultatibus, quas ſupra ad Seriem pag. 125, animadvertimus. Miror hic MOIVRÆUM nihil dicere de $x^m : (rr - xx)$.

Pag. 128. *Si* m *exponatur per terminum quemlibet ſequentis Seriei*, 0, 2, 4, 6, 8, &c. *quadratura curvæ, cujus ordinatim applicata* $x^m : (rr + xx)$, *pendet a rectificatione circularis arcus.*

Imo etiam, ſi m exponatur per quemlibet terminum ejus Seriei, -2, -4, -6, -8, &c.

Pag.

Digitized by Google

Pag. ead. *Etenim ſi centro* c, &c.

Demonſtratio ſimilis eſt ſuperiori ad pag. 126. Cæterum, ſi *m* exponatur per quemvis terminum duplicis hujus Seriei, ± 0, ± 2, ± 4, ± 6, &c. Area curvæ, cujus ordinatim applicata $x^m : (rr - xx)$ quadrabitur per quadraturam Hyperbolæ. Et ſi *m* exponatur per quemcunque terminum duplicis hujus Seriei $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{5}{2}$, $\pm \frac{7}{2}$, &c. vel per quemcunque duplicis hujus $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$, $\pm \frac{5}{3}$ &c, quadratura curvæ, cujus applicata $x^m : (rr - xx)$, dependebit a quadratura partim Circuli, partim Hyperbolæ. Sed oportet talia MOIVRÆO ſuam non ſuggeſſiſſe methodum; alioquin non prætermiſiſſet.

N°. CLXIX.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

à l'Auteur du Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits de M. le *Marquis* DE L'HOPITAL.

Imprimé à *Paris*, en 1721.

. . . .

J'ai reçu, Monſieur, votre *Commentaire ſur l'Analyſe*, & votre *Diſcours ſur le Mouvement* : Je vous en rends mille graces. . . . . . . En liſant le Diſcours ſur le Mouvement, j'ai bien remarqué qu'il eſt écrit avec beaucoup d'élegance & de force; mais je n'y ai point trouvé de nouvelles inventions, comme je croiois qu'on avoit exigé de ceux qui voudroient prétendre à remporter quelque prix. Vos penſées, tant ſur le Corps, que ſur le Mouvement, ne ſont pas de nouvelle datte; elles ſont la plûpart priſes des opinions de DESCARTES, qui fait, comme vous, conſiſter l'eſſence des Corps dans la ſeule étendue, & celle du Mouvement dans l'application ſucceſſive de leurs ſurfaces aux ſurfaces des corps contigus. Vous avez auſſi preſque les mê-

mes

mes ſentiments que Mr. DESCARTES, ſur la quantité & ſur la communication du mouvement. Il eſt vrai que vous paraphraſez très bien cet Auteur, & que vous mettez ſon ſyſteme dans un beau jour; quoique vous le refutiez auſſi ſur quelques points, comme, par exemple, ſur les cauſes occaſionelles. Cependant les Anglois ne vous paſſeront pas tout ce que vous dites ſur l'eſſence du Corps & du Mouvement. Pour ce qui eſt de la quantité prétendue permanente du mouvement & de ſa communication, que DESCARTES en déduit; les règles qu'il donne ſont entierement fauſſes: on en peut démontrer géometriquement la fauſſeté.

Je ne ſuis pas aſſez préſomptueux, pour croire que j'aurois pû écrire une auſſi belle pièce que la votre; car je n'ai pas le don de l'éloquence: mais je ſouhaiterois, qu'on propoſât une autre fois quelque queſtion déterminée, priſe de la Phyſique, réſoluble par la Géometrie, où il ne faille que de l'adreſſe à méditer & à inventer; peut être aurois-jé le bonheur d'y réuſſir autant qu'un autre.

L'état de ma ſanté ne me permet pas de lire avec beaucoup d'attachement votre Commentaire ſur *l'Analyſe des infiniment petits*. J'ay pourtant parcourru, avant que de le donner au Relieur, la Dédicace, la Préface & les deux Diſcours préliminaires. Le ſecond de ces Diſcours éclaircit fort bien le calcul des puiſſances; tout y va bien, à quelques fautes près, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion. Il y a auſſi de belles remarques ſur les infiniments petits dans le premier Diſcours: Mais il ſemble qu'en voulant éclaircir la nature de ces infiniments petits avec trop de ſoin, vous la rendez moins intelligible à ceux, qui ne ſont pas accoutumés à de longues explications; ſur tout, ſi ces explications elles mêmes leur paroiſſent plus obſcures que la matiere à expliquer. En effet, c'eſt quelque choſe de choquant que de dire [p. 5.] *Qu'un Solide, un Parallelépipede, par exemple, peut être diviſé & ſubdiviſé dans la hauteur, tellement, qu'on viendra enfin à une ſurface, dont la hauteur ſera infiniment petite.* Car par la diviſion des corps, quelqu'infinie qu'elle ſoit, on ne

parviendra jamais à des ſurfaces. Les parties d'un corps, quoique infiniment petites, ſont toujours corps; celles d'une ſurface, ſont toujours ſurfaces; & les parties d'une ligne ſont toujours lignes: n'étant pas poſſible qu'un genre de quantité puiſſe être changé par la diviſion en un autre genre de quantité. Vous auriez donc mieux fait, à mon avis, de garder le mot de tranches, & de dire *qu'on viendra enfin à une tranche, dont la hauteur ſera infiniment petite, &c.* Vos autres façons de parler, *les ſurfaces ſont, par rapport au Parallelépipede, des infiniments petits,* &c. *le Parallelogramme infiniment petit, par rapport au Parallelépipede, &c.* me paroiſſent très dures pour une oreille géometrique, & peu capables de former un commençant à avoir des idées nettes, ſur le ſujet qu'on veut traiter: elles jettent plûtôt dans l'erreur, & dans le préjugé, où on eſt avant que d'être Géometre; comme ſi le corps étoit compoſé de ſurfaces, la ſurface compoſée de lignes, & la ligne compoſée de points; préjugé fort difficile à détruire dans les jeunes gens, & qui les empêche de comprendre les démonſtrations ſur les figures géometriques. Car qu'eſt-ce qui les trouble d'avantage, que quand ils ne ſavent pas diſtinguer, par exemple, la ſurface, d'avec les lignes qui la terminent? Il ne faudroit donc pas ſe ſervir de ces façons de parler, qui nourriſſent les préjugés, au lieu de les détruire.

Pag. 7. Pour démontrer que la circonference d'un Polygone infinilateral, inſcrit dans le Cercle, eſt égale a la circonference du Cercle; vous dites, que chaque côté du Polygone, étant la corde d'un arc de Cercle, la difference, qu'il y a entre un arc & ſa corde, diminue toujours, à proportion que cette corde devient plus petite; ce qui eſt très-vrai, comme auſſi ce qui ſuit: *Qu'on pourra donc multiplier tellement les cotés d'un Polygone inſcrit ou circonſcrit, qu'il ſera enfin permis de compter pour rien la difference d'un de ſes cotés avec l'arc qui lui répond.* Tout cela eſt vrai; mais la conſéquence, que vous en tirez n'eſt pas légitime, ſavoir que la circonference du Poligone devient égale à celle du Cercle. Car il ne ſuffit pas de faire voir, que la diffe-

difference qu'il y a entre un arc de Cercle & ſa corde diminue à l'infini, pour en conclure que les deux circonferences deviennent égales; autrement, vous pourriez conclure avec le même droit, que la baſe AB d'un triangle rectangle ABC eſt égale à l'hypothenuſe AC; de ce qu'étant diviſées l'une & l'autre par des paralleles *nm*, *nm*, *nm*, &c. je vous fais voir, que plus eſt grand le nombre des parties, & plus petite ſera la difference entre une des parties *mm* & une des parties *nn*; *on pourra donc multiplier tellement les parties de la baſe & de l'hypothenuſe, qu'il ſera enfin permis de compter pour rien la difference d'une des parties* mm *avec une des parties* nn, mais celui, qui en voudroit inferer de-là, que l'hypothenuſe AC deviendra égale à la baſe AB, ſe tromperoit entiérement. Vous voyez, Monſieur, qu'il faut encore autre choſe, pour prouver que la circonference du Polygone infinilateral devient égale à celle du Cercle: c'eſt qu'il faut faire voir, que non ſeulement la difference entre l'arc & la corde s'évanouit; car cela arrive auſſi entre *mm* & *nn*; mais que de plus la raiſon, qu'il y a entre l'arc & la corde, devient infiniment peu differente de la raiſon d'égalité; ce qui n'arrive pas à la raiſon entre *mm* & *nn*, qui demeure conſtamment la même, en quelque grand nombre de parties, que ſoient diviſées les lignes AB & AC. TAB. LXXXI. N°. CLXIX.

Pag. 8. Vous dites *que l'angle eſt ſans aucune épaiſſeur à ſa naiſſance.* Je n'ai jamais ouï parler de l'épaiſſeur de l'angle; je ne ſais non plus ce que c'eſt qu'un *Angle naiſſant.* Les cotés d'un angle peuvent être naiſſants, lorſqu'ils deviennent finis, d'infiniment petits qu'ils étoient; mais l'angle lui-même demeure toujours d'une même grandeur. Vous ne concevez, dites vous, point de lignes ſans largeur; mais moi, au contraire, je ne conçois point de lignes avec largeur; car, je vous prie, dites-moi, qu'eſt-ce que c'eſt qu'une ligne avec largeur? C'eſt une chimère; c'eſt une contradiction; c'eſt comme ſi vous diſiez *c'eſt une ligne qui eſt ſurface*, ou, *c'eſt une ſurface qui eſt corps.* Je comprends bien, que vous voulez inſinuer, qu'il n'y a point de ligne géométrique, qui ſoit ſans largeur; mais la poſſibili-

té, ou l'impoſſibilité de l'exiſtence ne doit pas régler nos idées. Je dois concevoir les choſes ſelon leur définition: or on définit la ligne, que c'eſt une grandeur, qui a une ſeule dimenſion. Je ne me mets pas en peine, ſi une telle grandeur peut exiſter, ou non; ni ſi je la puis imaginer, ou non. Imaginer & concevoir ſont choſes differentes; on doit concevoir une choſe, ſelon ce qu'elle eſt; mais l'imagination ſe la repreſente, ſelon qu'elle frappe les ſens; comme vous ſavez mieux que moi, vous, qui avez fait une ſi excellente Logique.

P. 11. au commencement, & dans la ſuite, vous parlez, Monſieur, *de multiplier AB par BC*, c'eſt-à-dire, un rectangle par une ligne; & vous dites, *qu'on aura le rectangle BD.* Pardon, Monſieur, c'eſt là encore une façon de parler contre l'uſage des Géométres; car vous ſavez que chez eux *multiplier un rectangle par une ligne, c'eſt faire un parallelépipede*, & non pas un autre rectangle. Il ne vous eſt pas inconnu, que dans l'Algébre on augmente les dimenſions par la multiplication, & on les diminue par la diviſion; tellement que le produit eſt la ſomme des dimenſions des deux multiplicateurs, & le quotient la difference des dimenſions du dividende & du diviſeur. Il eſt vrai, que vous vous expliquez, ſur ce que vous entendiez par *multiplier le rectangle AB par la ligne BC*, en diſant, que c'eſt *placer ſucceſſivement AB ſur la ligne BC, autant de fois, que la baſe ſe trouve dans cette ligne*: cela va bien; cependant les commençants & les foibles eſprits, qui ont appris à avoir des idées de ces multiplications & diviſions des dimenſions, ſelon la maniere ordinaire, pourroient ici ſe confondre, au lieu de s'éclaircir ſur les infiniment petits de tous les genres. Vous auriez peut-être mieux fait de vous exprimer ainſi: *Si on multiplie AB, par le nombre de fois que ſa baſe B*m *ſe trouve dans la ligne BC, on aura le rectangle BDE*m: en parlant ainſi, vous ne vous ſeriez pas écarté de la maniere ordinaire de parler des Algébriſtes.

Vers la fin de la même page, vous concluez, ſans aucune reſtriction, que *ſi la hauteur E du rectangle AB étoit infinie, quoique*

que la Baſe B m *fut infiniment petite, ce Rectangle ne laiſſeroit pas d'être une quantité finie.* Pour moi je crois, qu'a parler généralement, cela ne peut pas être ſoutenu; à moins qu'on ne ſuppoſe que la raiſon entre la hauteur E & la ligne BC eſt comparable à la raiſon entre la même ligne BC & la baſe B*m*. Car d'ailleurs, la premiere raiſon pourroit être infiniment, ou plus grande, ou plus petite, que la ſeconde raiſon. Ce que j'ay remarqué ſur la page 11, touchant votre maniere de multiplier, ſe doit auſſi entendre ſur ce que vous dites, page 13, des diviſions; ainſi je n'approuve pas cette façon de parler, *le rectangle BD diviſé par le rectangle AB donne pour quotient la ligne BC;* car la diviſion d'un rectangle par un autre rectangle donne pour quotient, non pas une ligne, mais un nombre. *L'infiniment petit*, dites vous au même endroit, *du premier genre AB, diviſé par l'infiniment petit du même genre* Bm, *donne pour quotient E un infiniment petit du ſecond.* Point du tout. Si les deux infiniment petits du premier genre ſont de grandeur homogéne, comme ligne & ligne, ou ſurface & ſurface, &c. que l'on peut exprimer par dx & dy; alors la diviſion de l'une par l'autre [$\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{dy}{dx}$] donne un nombre fini, bien loin de donner un infiniment petit du ſecond genre. Si l'un des infiniment petits du premier genre marque une ſurface [$z\,dx$], & l'autre une ligne dy; alors la diviſion de celui-là par celui-ci [$\frac{zdx}{dy}$] donnera une ligne finie, & point-du tout un infiniment petit du ſecond genre: ainſi des autres. Je ne ſaurois ſouffrir ce que vous ajoutez (pardonnez moi ma franchiſe) *que E*, qui eſt une ligne, *eſt infiniment petit en comparaiſon de AB*, qui eſt un rectangle. Dites moi, de grace, qui eſt celui de tous les Géometres, qui ait jamais comparé enſemble une ligne & un rectangle, qui ſont des grandeurs hétérogénes? J'aimerois autant une comparaiſon entre le ſon & la couleur, ou entre un tems & un poids. Que diriez vous, Monſieur, ſi quelqu'un vous diſoit, que la longueur d'une aune eſt infiniment petite en-

Digitized by Google

en comparaiſon de la longueur d'un ſiécle ? En vérité, votre comparaiſon ne va guères mieux.

Vous continuez, dans la même page, vos locutions impropres, en prenant la baſe du Parallelépipede pour ſon infiniment petit, comme ſi un Rectangle, qui eſt une ſurface, pouvoit être l'élément d'un Parallelépipede, qui eſt un ſolide. Ce que vous dites, Monſieur, après cela ſur les multiplications & diviſions des infiniment petits de differens genres, n'eſt pas bien conforme aux idées que j'en ai; par exemple, à la page 14, vous voulez, que *ſi on diviſoit un infiniment petit du premier genre par un infiniment petit du troiſiéme, on auroit pour quotient un infiniment petit du ſecond, multiplié par un infiniment petit du premier.* Mais quant à moi, je prétens qu'une telle diviſion produiroit pour quotient une quantité infiniment-infinie, c'eſt-à-dire, infinie du ſecond genre; tant s'en faut que le quotient puiſſe être, comme vous dites, un infiniment petit du ſecond genre multiplié par un infiniment petit du premier. Voici ma preuve, sans tant de façon de Rectangles & de Parallelépipedes. Soit a une ligne finie, adx un infiniment petit du premier genre, $dddy$ un infiniment petit du troiſiéme genre, il faut prouver que $\frac{adx}{dddy}$ eſt un infiniment grand du ſecond genre. Pour cette fin, ſoit $\frac{adx}{dddy}$ nommé z; donc $adx = zdddy$; donc $dx : dddy = z : a$. Or dx eſt infini-infiniment plus grand que $dddy$; donc auſſi z, qui eſt le quotient de la diviſion, ſera infini-infiniment plus grand que a, qui eſt une ligne finie; & partant z ſera un infiniment grand du ſecond genre. Ce qu'il falloit démontrer. C'eſt de cette maniere aiſée, qu'on peut déterminer toutes vos multiplications & diviſions de differens genres d'infiniment petits; enſorte, que je ne conçois pas pourquoi vous marchez par tant de détours, pour mener votre Lecteur à l'intelligence des differentielles, qui n'eſt pas à beaucoup près ſi difficile, que vous voulez faire accroire.

P. 15.

P. 15. au commencement de la page, vous faites derechef une comparaiſon entre des grandeurs hétérogènes, en diſant que *les lignes qui ferment un Triangle infiniment petit, ſont des grandeurs infiniment petites, en comparaiſon de la ſurface de ce Triangle.* Par ces paroles vous entendez ſans doute quelque choſe de different de ce que les termes ſignifient ordinairement; car vous remarqués fort bien vous même, à la page ſuivante, que *toute comparaiſon doit rouler ſur des choſes de même genre.* J'avoue donc que je ne comprens pas le véritable ſens que vous donnez à la ſuſdite comparaiſon, entre les lignes & la ſurface de votre Triangle. Comment voulez-vous donc qu'un Ecolier le comprenne? Outre cela l'aire d'un Triangle peut être infiniment petite, ſans qu'il ſoit beſoin pour cela que tous ſes trois côtés ſoient auſſi infiniment petits; car concevez par exemple un Triangle Iſoſcele, dont l'angle du ſommet ſoit infiniment aigu; vous voyez que l'aire en ſera infiniment petite, quand même les deux jambes ſont d'une grandeur finie.

P. 22. *ligne derniere*, il y a faute de calcul; car à la place de $+dx^2$ il faut écrire $-dx^2$. Cette faute, quoique legère, influe pourtant ſur ce qu'il y a à la page ſuivante, où vous dites, *donc* $dx^2 = dy^2$; *&* $dx = dy$; puiſqu'il faudroit conclure $-dx^2 = dy^2$, donc $dx\sqrt{-1} = dy$; c'eſt-à-dire une grandeur réelle égale à une imaginaire; ce qui jetteroit encore dans de plus grandes erreurs & contradictions, que celles que vous marqués. Cette même faute de calcul fait qu'il eſt faux ce que vous dites peu après; que dans les cas où dx ſeroit $= dy$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$. Il faudroit dire, que dans les cas, où $-dx^2$ ſeroit $= dy^2$, alors $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$: mais puis qu'il eſt impoſſible, que $-dx^2$ ſoit $= dy^2$, il faut conclure que ces cas ne peuvent pas arriver, où $adx - 2xdx$ ſeroit très parfaitement $= 2ydy$; à ſavoir dans le ſens que vous le prenez. Ce que vous dites, dans le paragraphe ſuivant, participe encor de la même faute.

Voila, Monſieur, mes remarques, que je vous ai bien vou-

lu

lu communiquer, puiſque vous avez témoigné envie de les voir. J'eſpére que vous les prendrés en bonne part; d'autant plus que vous pouvez être aſſuré, que je ſouhaitterois de tout mon cœur, que vous m'euſſiez fait voir votre Commentaire en manuſcript, avant que de le faire imprimer, comme vous me l'aviez propoſé il y a quelques années: peut-être que mes Remarques ne vous auroient pas été inutiles. Je croi que mes avis vous feront aſſez connoitre, que vous auriez dû changer pluſieurs de vos manieres de commenter, & leur donner un autre tour; de peur que les ignorants, ou ceux qui haïſſent les nouveaux Calculs, ne prennent vos explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là occaſion de décrier *l'Analyſe des infiniments petits*; ce qui ſeroit bien éloigné du but, que vous vous étes propoſé, en faiſant ce Commentaire.

Quant au reſte, Monſieur, vous me faites bien de l'honneur dans votre derniere lettre de reconnoitre & d'avouer, que cette *Analyſe*, que vous avez commentée, eſt moins l'ouvrage de Mr. le *Marquis* de l'HOPITAL, que le mien. Je veux bien croire, que vous parlés de la ſorte, non point par complaiſance, mais parce que vous en étes entiérement convaincu, par des preuves inconteſtables, qui ſont publiques. Vous en aurez un bon nombre dans les *Actes de Leipſic*, ſur tout dans ceux de l'Année paſſée, au mois de *Juin* ou dans celui de *May* [car je ne m'en ſouviens pas bien], où il y a une piéce d'un nommé Mr. BOURCARD *, dans laquelle on cite pluſieurs Lettres autentiques, qui ne laiſſent aucunement douter de la vérité du compliment que vous me faites dans votre Lettre, &c.

* N°. CXX, pag. 483, *Tom.* II.

REMAR-

N°. CLXX.

REMARQUES

Sur le Livre intitulé

Analyſe des infinimens petits, comprenant le Calcul integral, dans toute ſon étendue, &c.

Par Mr. STONE, de la Societé Royale de *Londres*.

Imprimé à Paris *en* 1735.

Sur le Diſcours Préliminaire.

Pag. 4. MR. LEIBNITZ *promettoit volontiers des Ouvrages... C'eſt dommage qu'il n'ait eu le tems d'en exécuter peut-être aucun, hors ſa* Théodicée &c.

N'a-t-il donc rien donné que ſa *Théodicée*? Toutes les piéces qu'on a de lui, quoique détachées, ne compoſeroient-elles pas un gros volume, ſi on les ramaſſoit? Son *Codex Diplomaticus* eſt bien un gros Livre, ſi Mr. STONE en demande.

Ibid. *On peut douter ſi celui dont il s'agit ici* [l'Ouvrage que *Mr.* LEIBNITZ méditoit ſur la Science de l'infini,] *étoit mûr pour le tems auquel il le promettoit.*

Mais certes il n'eſt pas mûr pour Mr. STONE, qui ne donne, à ce qu'il paroit, que des choſes triviales.

Ibid. *Le Calcul différentiel etoit facile à éclaircir, ou même aſſez éclairci dès ce tems-là.*

Qui eſt-ce donc qui l'a éclairci, avant que je l'aye expliqué à Mr. De l'HOSPITAL? Où eſt-ce qu'on trouvoit ce calcul? Le Calcul exponentiel donné par moi, qui eſt-ce qui en avoit écrit quelque choſe? En trouvoit-on quelque choſe chez FERMAT, qu'on appelle ici *premier calculateur des infiniment petits.*

Pag. 5. *Mrs.* BERNOULLI *avoient ſuffiſamment remanié cette partie.*

Comme ſi quelqu'autre avant nous avoit déja manié cette partie.

Ibid. *Le Calcul intégral.... étoit comme la partie propre de Mr.* NEWTON *& de cette Nation célèbre* &c.

Mr. NEWTON avoit-il alors rien donné ſur le Calcul intégral ? Quel mépris pour les non-Anglois ! Nous les avons trouvé ces methodes, ſans aucun ſecours des Anglois.

Ibid. *Ce n'eſt pas qu'il n'eut tranſpiré quelque lueur de ce Calcul reciproque des Fluxions. Mrs.* LEIBNITZ, BERNOULLI, DE l'HOPITAL *pouvoient bien, ſans le ſecours d'aucun autre, en avoir fait les premieres opérations, & pour le moins la règle inverſe du retour d'une différenticlle à ſon intégrale.*

Le grand NEWTON, ce profond Géométre, ne nous avoit rien communiqué, dans ce tems-là, de ce qu'il peut avoir gardé *in petto*; au-moins je ne lui ſuis redevable de rien.

Pag 6. *Le Calcul intégral ne va pas ſans le ſecours des Séries.... il faut developer* [les Problémes] *en Séries infinies.*

Il y a bien des occaſions, où les Séries ſont inutiles, & où le Probléme ſe reſout mieux ſans elles, que par elles.

Pag. 11. *Il eſt peu d'eſprits novices qui ſans calcul puiſſent franchir.... la* 47e. *Propoſition du* 1er. *Livre* [d'EUCLIDE].

Y a-t-il rien de ſi facile que d'entendre cette Propoſition ? Je ne vois pas ce que le Calcul peut contribuer pour l'entendre.

Pag. 15.... CHEYNE,.... TSCHIRNAUS ne devroient pas être comptés parmi ceux qui ont ſécondé les antéceſſeurs dans les calculs, eux qui ont commis d'horribles paralogiſmes en fait de calculs.

Pag. 21. *A la* 250me. *page* [du Livre des Principes de Mr. NEWTON] *on trouve le fameux Lemme... qui contient le principe immediat du calcul.... des Fluxions.*

Ce fameux Lemme juſtifieroit pourtant la prétenſion de Mr. LEIBNITZ; c'eſt ce qui a fait que l'on a retranché ce Lemme, ou plûtôt ce Scholie, de la troiſieme Edition, comme faiſant trop d'honneur à de Mr. LEIBNITZ.

Ibid. DESCARTES *eſt admirable..... pour l'avoir inventé* [le Calcul algébrique].

Mais

Mais les Anglois l'accuſent de l'avoir pris de HARIOTTE.

Pag. 22 à la fin. NEWTON *étoit ſur le point de ſe voir enlever toute la gloire* [de l'invention du Calcul infiniteſimal] *par Mr.* LEIBNITZ.

Mais Mr. LEIBNITZ avoit inventé par lui-même le Calcul différentiel, ſelon le propre aveu de Mr. NEWTON, qu'il fait dans ſon Scholie. N'étoit-il donc pas juſte que Mr. LEIBNITZ ſe ſoit attribué la gloire de ſon invention.

Pag. 30. *Le Calcul n'eſt qu'une petite partie de la Géométrie.*

Renverſons la Théſe, en diſant que la Géometrie n'eſt qu'une petite partie du Calcul; puiſque le faiſeur de la Préface dit lui-même que les Anciens ont trouvé tous leurs Théorêmes par le Calcul.

Pag. 38. *La méthode .... de former des Corps ..... n'a été dévelopée qu'à demi par le Calcul intégral.*

Ce n'eſt pas la faute du Calcul intégral, mais celle de Mr. STONE, & des autres Héros, que l'on éléve dans cette Préface, qui n'ont pas bien ſû manier le calcul.

Pag. 45. *Le Cylindre, la Sphére & le Cone, ſuivant* ARCHIMEDE, *ſont dans le rapport des nombres* 3, 2, 1.

Cela n'eſt pas; car ils ſont comme *9*, *6*, *4*; c'eſt-à-dire, en raiſon continue de 3 à 2.

Pag. 68. *La forme des Polygones inſcripts & circonſcrits de* Gregoire *de* St. VINCENT; *cette forme d'échelons, qui ne paroit rien, a été déciſive pour la naiſſance des nouveaux Calculs, le différentiel & l'intégral &c.*

Peut-être, tout cela ſeroit-il à naître encor, ſi la méthode en étoit reſtée aux Polygones parallèles d'ARCHIMEDE. Quelle haute idée des échellons du P. GREGOIRE! Dans le tems que nous approfondiſſions les nouveaux Calculs différentiel & intégral, je ne ſavois pas encor qu'il y eut jamais eu un P. *Gregoire* de St. VINCENT, bien loin d'avoir vû ſes échellons. L'Ecrivain de la Préface ſe trompe bien, s'il croit que tout le fondement de nos nouveaux calculs conſiſte uniquement dans la conſidération de ces échellons.

Ff 2 Pag. 80.

Pag. 80. Mr. HUGUENS.... *inférieur en ce point à* DESCARTES.

On a de bonnes raiſons pour l'eſtimer, en ce point, beaucoup ſupérieur à DESCARTES.

Pag. 82. *La circonférence eſt égale à la tangente de la Spirale.*

Ce n'eſt pas à la tangente, mais à la soûtangente de la Spirale que la circonférence eſt égale.

Pag. 83. *Pourquoi ne penſerions-nous pas en effet que la Quadrature du Cercle fut une choſe poſſible à trouver?*

Je répondrois, parce qu'on en peut démontrer l'impoſſibilité.

Pag. 85. DE LA FAILLE... *a fait voir que le centre de gravité d'un arc, ou ſegment circulaire étant donné, le cercle ſeroit quarré. C'eſt... une des belles découvertes particuliéres des derniers ſiécles.*

Il falloit ajouter que ce ſeroit une découverte fort mince dans le préſent ſiécle.

Ibid. *Cette poſſibilité* (de la quadrature du Cercle) *eſt démonſtrative, & l'impoſſibilité ſimplement préſumée.*

C'eſt tout le contraire.

Sur l'Analyſe des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral.

Pag. 1. *On ne peut trouver les Intégrales exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes; qu'en faiſant diſparoitre, dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical; ce qui ſe fait par le moyen d'une Série infinie.*

Notre Géométre ne paroit pas être fort habile dans le Calcul integral; puis qu'il ne ſait pas la pratique d'intégrer grand nombre de quantites différentielles, exprimées par des fractions, ou par des quantités ſourdes, ſans recourir à des Séries infinies. Ainſi, par exemple, $xdx : (aa+xx)^n$, ou $xdx \sqrt[n]{(aa+xx)}$ ſont intégrables ſans Séries, & une infinité d'autres. Pourquoi donc veut-il

veut-il qu'on faſſe auparavant diſparoitre dans les unes leur dénominateur complexe, dans les autres leur ſigne radical ?

Pag. 2. Probléme 1. *Transformer* b : (a + x), *où* a *&* b *ſont des quantités connues*, *&* x *inconnue*, *en une Série infinie &c.*

On a mauvaiſe grace de nommer *a* & *b* connues, & *x* inconnue, au lieu de les nommer ici déterminées & indéterminées.

Ibid. *Juſqu'à-ce que le quotient ait* 4, 5, *ou* 6 *termes. Alors vous en pourrez preſque toujours trouver autant qu'il vous plaira, en conſiderant la ſuite progreſſive de ce quotient &c.*

Au contraire, cela eſt le plus ſouvent impraticable. On n'a qu'à prendre pour exemple celui qu'on donne pag. 4, vers la fin, $(2x^{1:2} - x^{3:2}) : (1 + x^{1:2} - 3x)$, dont la Série ſe trouve $2x^{1:2} - 2x + 7x^{3:2} - 13xx + 34x^{5:2}$ &c. On a ici cinq termes, mais comment peut-on voir la ſuite progreſſive, ſans continuer l'opération de la Diviſion ?

Pag. 7. *Quelques exemples donneront l'uſage de ce merveilleux Théorême* [pour l'élevation d'un binome à une puiſſance quelconque].

Nous avons trouvé ce merveilleux Théorême, auſſi-bien que Mr. NEWTON, d'une maniere plus ſimple que la ſienne. Feu Mr. PASCAL a été le premier qui l'a inventée.

P. 8. & 9. *Exemples* 2. 3. 4. &c.

Tous ces exemples ne contiennent rien de clair, puiſqu'on ne ſauroit continuer les Séries, ſans continuer actuellement l'opération de l'extraction des Racines ; ce qui eſt pénible.

Pag. 9. *Mr. de* MOIVRE *nous a donné dans les* Tranſactions Philoſophiques *le Théorême ſuivant, ſoit pour élever une Série infinie à la puiſſance donnée* m, *ſoit pour en extraire la racine.*

Comment Mr. STONE daigne-t-il citer une Etranger ? Mais il auroit mieux fait de montrer la premiere ſource de l'invention de ce beau Théorême, plûtôt que de releguer ſon Lecteur à la démonſtration de Mr. de MOIVRE, contenue dans les *Tranſactions.* J'en ai trouvé une méthode fort facile, que j'ai communiquée à Mr. HERMAN, il y a bien 40 ans,

Ff 3 ſans

ſans avoir jamais vu ce que Mr. de MOIVRE en a publié dans les *Tranſactions*.

Pag. 18. *L'Intégrale de* dx *eſt* x; *celle de* dx + dy *eſt* x + y: *l'intégrale de* xdy + ydx *eſt* xy; &c.

Les Intégrales ici marquées ne ſont pas exprimées dans toute leur étendue; il faut les augmenter ou diminuer d'une conſtante c; en diſant que l'intégrale de dx eſt $x \pm c$; celle de $dx + dy$ eſt $x + y \pm c$: l'Intégrale de $xdy + ydx$ eſt $xy \pm c$ &c. comme Mr. STONE le dir lui-même dans le *Scholie* p. 19.

Ibid. *D'où il eſt évident que la méthode inverſe des Fluxions, ou la méthode des intégrations, revient à celle de trouver la ſomme d'une Série.*

Il n'eſt pas néceſſaire, en pluſieurs occaſions, de recourir aux Séries; ſavoir toutes les fois que l'on peut trouver l'intégrale en termes finis, ſoit algébriques, ſoit exponentiels. La méthode d'intégrer conſiſte dans un algorithme, contenant des règles certaines pour parvenir à l'intégrale d'une différentielle donnée, ſi la choſe eſt faiſable. Il eſt comme de la méthode de trouver les racines d'une équation algébrique. On pourroit ſans doute auſſi trouver les racines par des Séries; mais ce ſeroit une grande folie, ſi quelqu'un vouloit ſe ſervir des Séries pour les racines, lorſqu'on ſeroit en état de les exprimer en termes finis. En un mot les Séries ne doivent être employées que dans la derniére néceſſité, lorſque les Règles ne ſont pas applicables.

Pag. 19. *Or* p *eſt une quantité donnée quelconque, qui peut répréſenter &c.*

Il falloit dire que p eſt une quantité conſtante, qui, dans les exemples n'eſt pas toûjours donnée, mais ſouvent il faut de l'adreſſe pour la trouver.

Ibid. *Dans les Intégrales nous nous ſervons des Séries infinies, lorſque nous ne pouvons pas les trouver exactement.*

C'eſt ce que j'ai dit; pourquoi donc recourir toûjours aux Séries, avant que de ſavoir ſi les intégrales ne peuvent pas être exprimées en termes finis?

Ibid.

Ibid. *Quand les expreſſions différentielles ne ſont point mêlées de quantités conſtantes*, &c.

Ajoutez, & que les coëfficiens ſont toujours égaux.

Pag. 20. *Par exemple* 2xdy &c.

Il veut écrire, je crois, $2xdx$, car $2xdy$ étant une différentielle incomplette, n'eſt pas intégrable; c'eſt ſans-doute une faute d'impreſſion.

Pag. 21 in fine & 22 in initio. *Enfin l'intégrale de* $\frac{1}{x}dx = 1x^{-1}dx$, *ſera* $\frac{1}{0}x^{0} = \frac{1}{0} = \infty$.

Ainſi, ſelon Mr. STONE, $\int \frac{1}{x}dx$ ſeroit égal à une quantité véritablement infinie, au lieu qu'elle eſt égale au Logarithme de x. Ne ſait-il donc pas que cette infinité apparente marque ſeulement que l'intégrale n'eſt pas algébrique.

Pag. 30. *Je vais... ajouter un mot ſur l'excellente methode de feu Mr.* COTES &c.

Nôtre compilateur n'a garde de dire, que j'ai publié dans les *Actes* de *Leipſic* le plus eſſentiel de cette excellente méthode, trois ans avant que le Livre de Mr. COTES fut rendu public; & cela ſur le defi que Mr. TAYLOR m'adreſſa: Voiez N°. CXIV, pag. 402, *Tom.* II.

Pag. 66. *Quarrer l'éſpace cycloidal.* &c.

Quel abus des Séries! On trouve bien l'aire ſans elles, & même très-ſimplement ſans calcul.

Pag. 68. *Par une autre proprieté de la courbe* [ciſſoïdale]

Mr. STONE ne donne, par cette maniere, que l'eſpace total aſymtotique de la Ciſſoïde; mais nullement de chaque partie APM. Voici comment je le trouve généralement. Soit C le centre du cercle, ſoit auſſi tiré le rayon CN & la corde AN; & je nomme le rayon $CA = r$, & partant le diamétre $AB = 2r$: L'équation de la Ciſſoïde ſera donc $2ryy - xyy = x^3$; par conſéquent $y = \sqrt{x^3} : \sqrt{(2r - x)} = xx : \sqrt{(2rx - xx)}$, & l'élément de l'eſpace cherché PM*m*, ou $ydx = xxdx : \sqrt{(2rx - xx)}$. Pour intégrer cela par la quadrature du cercle, je diſpoſe cette quan-

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

quantité, en y ajoutant & retranchant, pour la rendre dépendante du cercle par parties, où il y en aura une d'abſolument intégrable. Voici le calcul. $\frac{xxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = \frac{(-2rx+xx)dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx\sqrt{(2rx-xx)} + \frac{2rxdx}{\sqrt{(2rx-xx)}} = -dx\sqrt{(2rx-xx)} - \frac{(2rr-2rx)dx}{\sqrt{(2rx-xx)}} + \frac{2rrdx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$. Or il eſt viſible que le premier terme $-dx\sqrt{(2rx-xx)}$ eſt la différentielle du ſegment ANP, le ſecond terme eſt la differentielle de $\sqrt{(2rx-xx)}$, ou de PN, multiplié par $2r$, & le troiſiéme terme eſt la differentielle de l'arc AN multiplié par $2r$. Ainſi j'aurai l'aire APM ou $\int ydx$, ou $\int(xxdx : \sqrt{(2rx-xx)}) =$ ANP $-$ PN $\times 2r +$ l'arc AN $\times 2r$. Mais PN $\times 2r$ fait quatre fois le triangle rectiligne ANC, & l'arc AN $\times 2r$ fait quatre fois le ſecteur circulaire ANC; retranchez donc celui-là de celui-ci, il vous reſtera quatre fois le ſegment ANA Donc APM, ou $\int ydx = 4$ ſegm. ANA $-$ demi-ſegm. ANP. Or le demi-ſegment ANP eſt égal au petit ſegment ANA + le triangle rectiligne ANP. Donc enfin l'aire ciſſoïdale APM eſt égale à 4 ſegm. ANA $-$ 1 ſegm. ANA $-$ triang. rectil. ANP, c'eſt-à-dire $=$ 3 ſegm. ANA $-$ triang. rectil. ANP. Ce qu'il falloit trouver.

Coroll. 1. Prenant x, ou AP $= 2r$, ou AB; le triangle rectiligne ANP s'évanouit; parce que ſa hauteur PN eſt nulle au point B; & le ſegment ANA dégénére en demi-cercle ANBA. Donc l'aire totale de l'eſpace ciſſoïdal eſt triple du demi-cercle générateur ANBA: cas unique, qui ſe trouve dans notre Auteur.

Coroll. 2. Si le point P eſt fort près de A, l'arc AN ſera comme une Parabole naiſſante, & partant le triangle rectiligne ANP ſera juſtement triple du petit ſegment ANA, parce que celui-là fait la moitié du rectangle circonſcrit, & celui-ci en fait la ſixiéme, par la nature de la Parabole. Ainſi donc l'aire naiſſante APM ſera $= 0$, c'eſt-à-dire, infiniment plus petite que le triangle infiniment petit APN, ou que le ſegment

Digitized by Google

ment infiniment petit ANA. D'où il ſuit que la Courbe AM coincide au commencement avec la droite AB, c'eſt-à-dire, qu'elles ſe touchent au point A; tout comme l'équation de la courbe l'indique. Car il s'enſuit, qu'au commencement on a $2ryy = x^3$, & partant $2r : x = xx : yy$. Donc $2r$ ſurpaſſant infiniment x, auſſi xx ſurpaſſera infiniment yy. Donc AB touche la courbe au point A.

Pag. 70. Exemple XX. *Quarrer un eſpace quelconque ACMP de la Quadratrice &c.*

Il y a diverſes fauſſetés dans cette ſolution, car à la page 71, il n'eſt pas vrai que le ſinus em ſoit $= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. Ce qui eſt évident, puiſque ſi x, ou AP, ou Cm. eſt $= 0$, ſon ſinus em ſera auſſi $= 0$. Or dans ce cas la Série deviendroit $= 1$; comment donc peut-elle être $= 0$? Il faut donc ſavoir que $em = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ &c. Le Calcul bâti ſur cette fauſſe poſition ſera donc auſſi faux. Mais dans l'Analogie qu'il fait peu après, il redreſſe, ſans le ſavoir, ſon erreur, par une fauſſe opération; ainſi par une double erreur, il tombe par hazard ſur la véritable valeur de ydx. Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expreſſion finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les Logarithmes y entrent.

Pag. 79. *Trouver la longueur de la Spirale reciproque.*

Ni Mr. COTES, ni Mr. STONE n'ont point ſongé à cette courbe & à ſes proprietés avant moi †.

Pag. 103. *Ainſi* $\frac{p}{r} x dx \sqrt{(ax - xx)}$ *ſera l'élement du ſolide formé par ce mouvement* [de la Ciſſoïde autour de ſa baſe] *qui eſt égal à l'élement du premier ſolide qu'il faloit cuber ou meſurer. Donc le ſolide ciſſoïdal infini, formé ſuivant la révolution qui vient d'être dite, eſt égal au dernier ſolide formé par la révolution du demi-cercle générateur, autour d'une ligne droite parallèle à ſon aſymtote, paſſant par le point* A.

† Voiés N°. XC, pag. 552. ſeqq. *Tom. I.*

Il eſt très-vrai que ces deux ſolides totaux ſont égaux, mais il eſt ridicule de ne pas conclure généralement, que le ſolide ciſſoïdal, formé par la révolution d'une portion quelconque APM autour de l'aſymtote, eſt toûjours égal à l'autre ſolide formé par la révolution du ſegment circulaire APN autour d'une droite paſſant par A, & parallèle à l'aſymtote BH. La raiſon en eſt manifeſte, de ce que, par la nature de la Ciſſoïde, on a toujours $BP \times PM = AP \times PN$.

Pag. 106. $\frac{p}{12ar} \times (4yy + aa)^{3:2} =$ *à l'Intégrale de l'élement de la ſuperficie du Conoide parabolique.*

Mais en faiſant PM, ou $y = 0$, auquel cas la ſuperficie du Conoide devient nulle, l'expreſſion trouvée ſe change en $\frac{p}{12ar} \times (aa)^{3:2}$, ou en $\frac{p}{12r}\ aa$; ainſi la veritable intégrale ſera $\frac{p}{12ar}(4yy + aa)^{3:2} - \frac{p}{12r}aa$.

Pag. 107. *Donnera...* $\frac{pady}{rbb}\sqrt{(b^4 + ccyy)}$, *quand AC ſurpaſſe BC; mais quand AC eſt moindre que BC, elle eſt* $\frac{pady}{rbb}\sqrt{(b^4 - ccyy)}$.

C'eſt-à-dire, que dans un Sphéroïde applati, ſa ſurface dépend de la quadrature de l'Hyperbole; mais pour le Sphéroïde allongé, ſa ſurface dépend de la quadrature du Cercle. Qu'eſt-il donc beſoin de tant conſulter les Tables de Mr. COTES?

Pag. 118. *Quand la Courbe* [la Ciſſoïde] *fait ſa révolution autour de la Baſe AB, Mr.* COTES *dans ſa* Harmonia Menſurarum, *donne la quantité de la ſuperficie formée. Mais l'opération eſt longue & difficile, les différentielles ne pouvant ſe rapporter directement à aucune de ſes Tables.*

Ainſi Mr. STONE avouë ſincèrement, qu'il eſt difficile de trouver la quantité de la ſuperficie en queſtion, puiſque la choſe ne peut ſe rapporter directement aux Tables de COTES. Voici

TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig.* 1.

Voici ce que je trouve par ma méthode d'intégrer. Soit dans la Fig. AMI la Ciſſoïde, le diamétre du Cercle générateur, ou la baſe AB $=a$, une abſciſſe AP $=x$, l'appliquée PM $=y$, l'arc de la Ciſſoïde $=s$; la raiſon du raion à la circonférence, comme r eſt à p. Ainſi l'aire de la ſuperficie que décrit l'arc AM, par ſa révolution autour de AP, ſera $=\frac{p}{r}\int y\,ds$; il s'agit donc de trouver $\int y\,ds$, ou l'intégrale de $y\,ds$, par une expreſſion qui ne contienne que a & x & leurs fonctions. Or je trouve, par ma dite méthode, que $\int y\,ds = \frac{(2aa - ax)\sqrt{(4ax - 3xx)}}{2a - 2x} - \int \frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax - 3xx)}}$. Mais il eſt clair que $\int \frac{2aa\,dx}{\sqrt{(4ax - 3xx)}}$ eſt égal à un ſecteur circulaire, que l'on conſtruit facilement; & le prémier terme eſt une quantité purement algébrique.

Pag. 122. Exemple 6. *Le centre de gravité eſt dans le rayon* AD, *qui coupe l'arc* BE.

Ajoutez, en parties égales.

Pag. 127. r *étant le demi-paramétre.*

Il faut que r ſoit le paramétre entier, pour que $\frac{1}{2}px\,dx$ ſoit la différentielle des poids, & que $\frac{1}{2}pxx\,dx$ ſoit celle des efforts.

Pag. 129. Exemple 13. *D'où il ſuit que* $3a+8b : 4a+12b = a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Il faut renverſer les deux premiers termes, en faiſant $4a+12b : 3a+8b = a : \frac{3aa+8ab}{4a+12b}$.

Ibid. *Exemple* 14.

Beaucoup de confuſion régne dans cette ſolution; il ſeroit bien facile de la redreſſer; mais il ne vaut pas la peine de perdre le tems, en faiſant le calcul de ces choſes ſi triviales.

Ibid. *Exemple* 15. *Alors quand* PC *devient* x, *la différentielle des poids ſera* $\frac{pyydx}{2r}$.

Que veut dire, alors quand PC devient x? La différentielle

tielle des poids ne ſera-t-elle pas également $\frac{pyydx}{2r}$, ſans que PC devienne x.

Pag. 131. Définition. *Le Centre de* percuſſion *ou d'*oſcillation *d'une figure &c.*

La Définition que donne Mr. STONE du *Centre de percuſſion*, donne une fauſſe idée de ce centre ; car d'abord il ſuppoſe, ſans le démontrer, que le Centre de percuſſion & celui d'oſcillation ſont un même point ; c'eſt en quoi il ſuit l'exemple de ſon Compatriote Mr. WALLIS, qui ne pouvant trouver la méthode de déterminer le Centre d'oſcillation, & voyant cependant que la règle de Mr. HUGUENS donnoit, en certains cas, le Centre d'oſcillation, au même point que lui WALLIS avoit aſſigné au Centre de percuſſion ; il conclut d'abord, que ces deux Centres étoient un même point ; & prétendit avoir été le premier Inventeur [par conſéquent avant Mr. HUGUENS] de la Théorie du Centre d'oſcillation. Mais pour faire voir qu'il n'y a aucune connexion néceſſaire, ni eſſentielle, entre ces deux Centres ; il n'y a qu'à conſidérer ces deux choſes : 1°. La nature du Centre d'oſcillation dépend entiérement de la nature & de l'action de la peſanteur ; au lieu que dans la Théorie du Centre de percuſſion, la peſanteur n'entre aucunement en conſidération, mais ſeulement la matiére & la viteſſe, quoique uniforme, de ſes parties : de-là il arrive, qu'un Pendule compoſé de pluſieurs corps de différentes denſités, agité dans l'air, a ſon Centre d'oſcillation différent de celui qu'il auroit, s'il étoit agité dans une liqueur, par exemple dans l'eau. Mais le Centre de percuſſion ſera le même dans l'air & dans l'eau. 2°. Au contraire, ſi les corps ſe meuvent dans un même milieu, le Centre d'oſcillation eſt quelque choſe d'abſolu & indépendant de toute rélation ; au lieu que le Centre de percuſſion varie ſelon la diverſité de ſituation du corps choqué, enſorte qu'il y a une mutuelle dépendance entre les corps choquans & choqués.

P. 136.

Pag. 132. 133. 134. 135. Contenant les ſix premiers Exemples.

Ces ſix prémiers Exemples donnent bien la bonne ſolution, parce qu'ils ſont juſtement dans le cas où la fauſſe méthode de Mr. STONE, ou plutot de WALLIS, s'accorde, par accident, avec la vraye méthode; ce qui arrive toutes les fois que 1°. la figure qui choque eſt plane, 2°. qu'elle ſe meut autour d'un axe ſitué dans ſon plan, & 3°. qu'outre cela, la ligne frappante eſt auſſi dans ce même plan. J'apelle *ligne frappante*, la ligne droite, paſſant par le centre du mouvement, laquelle étant parvenue au point choqué, toute la figure s'arrête ſubitement ſur le point choqué. Ainſi ſi une ſeule de ces trois conditions manque, la prétendue méthode s'en va en fumée, & ne donne que de fauſſes ſolutions.

Pag. 136. 137. 138. Contenant les ſix derniers Exemples.

Ces ſix autres exemples ſont réſolus fauſſement en pluſieurs maniéres. Car 1°. on ne fait point d'attention à la ligne frappante. 2°. On prend tacitement, pag. 137, l. 5, & ſuiv. le côté du Cylindre pour la ligne frappante; auquel cas le Centre de percuſſion ne ſeroit plus le même que le Centre d'oſcillation, car celui-ci eſt toûjours dans l'axe du Cylindre. 3°. Quand même on prendroit l'axe du Cylindre, & des autres figures qu'on conſidére, pour la ligne frappante, le prétendu Centre de percuſſion ne coincideroit pas avec le Centre d'oſcillation; vû que Mr. HUGUENS trouve le Centre d'oſcillation dans toutes ces figures ſolides, choiſies par Mr. STONE pour exemples, plus éloigné du point de ſuſpenſion, que ne le donne Mr. STONE. Cela vient de ce que Mr. STONE ſupoſe fauſſement, que toutes les particules d'une tranche différentielle de la figure ſolide, ont une même viteſſe; ce qui eſt abſolument faux: vû qu'il eſt viſible, que les points plus éloignés du centre d'une tranche, ſont auſſi plus éloignés du point de ſuſpenſion, que les points plus proches du centre; par conſéquent que ces points-là auront auſſi plus de viteſſe.

Comment peut-il donc conſidérer chaque tranche circulaire, comme ayant une viteſſe égale dans toute ſon étendue?

Nôtre Auteur auroit mieux fait de ſupprimer entiérement ſa Section 7ᵉ. dont la matiére paroit être hors de ſa ſphére.

Pag. 139. Probléme 1ᵉʳ. *L'intégrale de chaque membre ſera* $x = y$. *D'où il ſuit que la ligne cherchée eſt l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.*

1°. Non ſeulement $x = y$, mais auſſi $x + a = y$, ſatisfait au Probléme. 2°. Je n'entends pas ce galimatias qu'on ajoûte, *en regardant comme ſon axe la ligne coupant en deux cet angle droit.* Eſt-ce que par ſon axe on veut entendre la ligne où ſont priſes les abſciſſes x? Si cela eſt, cet axe ſera la baſe du triangle rectangle, & par conſéquent ne coupera pas en deux l'angle droit. 3°. La ligne cherchée eſt à la vérité l'hypothénuſe d'un triangle rectangle iſoſcéle, mais non pas d'un triangle rectangle quelconque, comme Mr. STONE s'explique.

Ibid. Probléme 2ᵉ. $adx = 2ydy$, *& trouvant l'intégrale de chaque membre, on aura* $ax = yy$, *ainſi la courbe ſera la Parabole d'*APOLLONIUS.

Cela eſt vrai; mais il falloit intégrer plus généralement, en mettant $ax + ab = yy$; quoique cela donne encore la Parabole, il y a des cas, où ajoutant ou retranchant une quantité conſtante aux intégrales, cela change tout-à-fait la nature de la courbe. Comme, par exemple, $aaxdx = bbydy$; en intégrant à la maniére de Mr. STONE, on trouveroit $aaxx = bbyy$ c'eſt-à-dire, $ax = by$; ce qui donneroit une ligne droite pour la ligne cherchée; mais on ſe tromperoit, ſi on vouloit conclure qu'il n'y auroit point d'autre ligne qui ſatisfit à l'équation différentielle $aaxdx = bbydy$; puiſque la courbe, qui auroit pour équation $aaxx + abcc = bbyy$, & qui ſeroit une Hyperbole, ſatisferoit auſſi à la queſtion.

Pag. 240. Probléme 3ᵉ..... $2ax - xx = yy$.

Au lieu de $2ax - xx = yy$, on devroit écrire, par la raiſon ſuſdite, $2ax - xx = yy + ab$.

Ibid.

Ibid. Probléme 4e. *Ainſi* $dx = \frac{ady}{y}$, &c.

A quoi bon tout ce diſcours? Ne pouvoit-on pas dire tout-court, que la courbe cherchée eſt la Logarithmique ordinaire, dont les x, ou les abſciſſes, ſont priſes ſur l'aſymtote, & les y, ou les ordonnées, ſont les perpendiculaires ſur l'aſymtote.

P. 142. Scholie 2e. *Les nombres* $z - 1$ *&* $z + 1$ *ſeront égaux* &c.

Quelle obſcurité dans ce Scholie! Les nombres $z - 1$ & $z + 1$ ne différent-ils pas de deux unités, comment donc peuvent-ils être égaux?

Ibid. Probléme 6e. *Si un corps deſcend librement du point A, par le ſeul effet de la peſanteur, le long de deux plans inclinés AB, AC, aux points B & C; on demande la proportion des tems qu'il faut pour décrire ces eſpaces?* TAB. LXXXI. No. CLXX. Fig. 2.

Tout le diſcours que fait Mr. STONE pour réſoudre ce chétif Probléme, eſt un tiſſu continu de Paralogiſmes, qui montrent évidemment qu'il n'a pas une idée nette de la Méchanique, Dynamique, Balliſtique, & de ce qui en dépend. Voyons quelques traits de ſes raiſonnemens contradictoires. Il ſupoſe deux plans AB & AC donnés de poſition; il prend AD & AE [en les nommant a & b] pour invariables; cependant il regarde DB & EC [qu'il nomme x & z] comme variables. N'eſt-ce pas une manifeſte contradiction? puiſque ſi AB & AC ſont données de poſition, & AD & AE de grandeur, ſans-doute DB & EC ſeront auſſi données de grandeurs. Il dit que $xdx: \sqrt{(aa+xx)} = Bb$, & $zdz: \sqrt{(bb+zz)} = Cc$; ce qui eſt très-abſurde: car le premier $xdx: \sqrt{(aa+xx)}$ marque la différentielle de la ſécante de l'angle BAD, prenant AD pour le rayon; & l'autre $zdz: \sqrt{(bb+zz)}$ n'eſt autre choſe que la différentielle de la ſécante de l'angle CAE, prenant AE pour le rayon.

A la fin de la page 142, & au commencement de la p. 143, il dit, *les viteſſes décrivant les petites parties* Bb, Cc, *étant regardées comme égales, qui ſont proportionnelles aux* $\sqrt{AD}$ [$\sqrt{a}$] &

& a $\sqrt{AE}$ [$\sqrt{b}$]. Quelle étrange façon de parler ! Les viteſſes décrivant &c. Ce ſont les mobiles qui décrivent avec les viteſſes ; les viteſſes ne décrivent pas ; & ces viteſſes, comment peuvent-elles être égales, puiſqu'elles ſont proportionnelles aux $\sqrt{AD}$ & $\sqrt{AE}$, qui ſont inégales. Tout ce qui ſuit dans ce diſcours eſt un jargon inintelligible : Les Tables de Mr. COTES y entrent ſans néceſſité. Les Règles de GALILÉE montrent immédiatement que le tems par AB eſt au tems par AC, comme la racine quarrée de la troiſiéme proportionelle de AE à AC. A quoi ſert-il donc, le long & pénible raiſonnement de notre Auteur ?

Pag. 143. Probléme 7e. *Trouver la nature de la courbe BC, telle qu'un corps tombant.... parcourra en deſcendant en tems égaux des eſpaces égaux.*

Au lieu de dire des eſpaces égaux, il veut dire ſans-doute des hauteurs verticales égales : car les eſpaces à parcourir ſont les arcs de la courbe : or ces arcs parcourus en tems égaux, ne peuvent pas être égaux eux-mêmes, à cauſe de l'accéleration ; étant viſible que plus le mobile eſt deſcendu, plus il aura de viteſſe, & parcourra par conſéquent un plus grand arc dans un tems donné. Ce Probléme au-reſte fut propoſé par Mr. LEIBNITZ ſous le nom de la Courbe Iſochrone, & il fut réſolu par pluſieurs perſonnes, il y a bien 50 ans. Si Mr. STONE a voulu montrer ſon habileté, il devoit donner la ſolution du Probléme de l'Iſochrone paracentrique, que j'ai réſolu & publié l'an 1694. *

P. 145. Probléme 8e. *Trouver la Loi de réfraction, en admettant ce principe que la nature ſuit dans ſes opérations les voies les plus ſimples & les plus courtes.*

Ce Probléme apartient purement & ſimplement au Calcul Différentiel ; auſſi ſe trouve-t-il dans l'*Analyſe des infiniment petits*, qu'on attribue à Mr. de l'HOPITAL, où il ne s'agit que du Calcul Différentiel : Que fait-il donc ici, où on prétend traiter du Calcul Intégral ? Mais au-reſte, ſuivant le Principe qu'on adopte ici, il faudroit que le rayon de lumiére allât

* N°. XIX, pag. 119. Tom. I.

lât plus vite dans les milieux moins denſes : cependant on montre, par des vrais principes phyſiques, que c'eſt tout le contraire ; & ſelon Mr. NEWTON même.

Pag. 146. Probléme 9e. *Trouver l'angle &c.*

Ce Probléme auſſi, [à-peine digne d'être propoſé aux commençants] qu'a-t-il à faire dans un traité du Calcul Intégral ?

Ibid. Probléme 10e. *Si un fluide* &c.

Ce Probléme, quoique un peu plus difficile, n'apartient pas non plus au Calcul Intégral.

Pag. 147, vers la fin. *Donc* $xx + \frac{bb}{aa} x = bb$. *Ainſi* $x = \frac{b}{a} \sqrt{(bb + xx)} - \frac{bb}{2a}$.

Que veut dire cela, que dans la valeur de x on faſſe entrer ſon quarré xx? On devroit écrire $x = \frac{b}{2a} \sqrt{(bb + 4aa)} - \frac{bb}{2a}$.

Pag. 148. *Coupés* BC [b] *en* G, &c.

Il veut dire qu'on doit couper BC en deux parties égales. Pourquoi parler ſi inexactement ?

Ibid. ſur la fin. *Par conſéquent* $dx = \frac{2\sqrt{a}.\, Nn}{2b}$. *Maintenant quand l'intégrale de* dx, *ſavoir* x, &c.

Tout ce qui ſuit, juſques-à la fin de la ſolution, eſt tout-à-fait ſuperflu. Car après avoir trouvé $dx = 2\sqrt{a}.\, Nn : 2b$, ne pouvoit-il pas conclure d'abord, donc $x = 2\sqrt{a}.\, HNB : 2b = 2\sqrt{a}.\, HNB : 2HB = ASB : 2\sqrt{AB}$ = quantité conſtante. Donc &c.

Pag. 149. Probléme 12e. *La ligne Loxodromique & la différence de Latitude de deux endroits étant données, trouver la différence de Longitude.*

On propoſe ce Probléme en général pour deux endroits quelconques : cependant la ſolution qu'on donne ne ſert que pour un cas particulier. Car on ſupoſe qu'un des deux endroits eſt dans l'équateur. Ainſi la ſolution ne ſatisfait point, lorſque les deux lieux donnés ſont hors de l'équateur.

Digitized by Google

Pag. 150. *Il viendra* $dx = \frac{madr}{zz} = \frac{madr}{aa - rr}$; *& prenant les integrales, on aura* $BA[x] = m \times (\frac{r}{a} + \frac{r^3}{3a^3} + \frac{r^5}{5a^5} + \frac{r^7}{7a^7} + \&c.)$ $=$ *à la différence des Longitudes des lieux A & C.*

Qu'eſt-il beſoin de recourir à des Séries infinies, lorſqu'on peut donner l'intégrale par une expreſſion finie, claire, & élégante, que l'on peut conſtruire facilement par les Logarithmes, ou moyennant la Logarithmique. Voici comment. $\frac{madr}{aa - rr} = \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Donc $\int \frac{madr}{aa-rr} = \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} + \int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r}$. Or $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a+r} = \frac{1}{2}ml(a+r)$, & $\int \frac{\frac{1}{2}mdr}{a-r} = -\frac{1}{2}ml(a-r)$: par conſéquent $\int \frac{madr}{aa-rr} = \frac{1}{2}ml\frac{a+r}{a-r}$, ſuivant le calcul exponentiel. Nous n'avons donc que faire, ni de Séries, ni de la méthode de Mr. COTES. Voici maintenant ma ſolution générale, pour deux lieux donnés quelconques, que j'ai écrite, il y a plus de 30 ans, derriere mes Tables des Sinus & des Logarithmes, en ces termes latins. *Eſto radius ſphæræ* $= a$, *ſinus totus* $= c = 10000000$; *differentia Longitudinum duorum locorum, ſecundum æquatorem ſumta* $= b$, *tangens ſemi-diſtantiæ loci unius a polo proximo* $= m$, *tangens ſemi-diſtantiæ alterius loci ab eodem polo* $= n$, *& tangens inclinationis rhumbi ad quemlibet meridianum* $= p$: *ſubtangens Logarithmicæ ad Tabulas uſitatas Logarithmorum accommodatæ, ut calculus docet,* $= 4342945$. *Dico fore* $p = \frac{4342945bc}{(lm - ln)a}$.

Pag. 151. Corollaire. *D'où on tire PB*(a): Cc = cd (dy): Cc (du) *Donc &c.*

Quel plaiſant calcul fait-on ici; pour trouver une choſe qui ſaute aux yeux, ſans calcul. On compare dans cette prétendue analogie PB, qui eſt une ligne finie, à C*c*, qui eſt infiniment petite, & on fait cette raiſon égale à la raiſon de *cd* à C*c*, qui eſt une raiſon finie. Comment dont peut elle

être

être égale à la premiere raiſon, qui eſt infinie? Ne pouvoit-on pas dire tout-court: Puiſque *c*d eſt à C*c* en raiſon conſtante donnée, donc auſſi l'intégrale de *c*d, c'eſt-à-dire AD, différence de Latitude, eſt à l'intégrale de C*c*, qui eſt AC, longueur de la Loxodromique, comme *c*d eſt à *c*C, ou comme le rayon eſt à la ſécante de la ligne Loxodromique?

Ibid. Probléme 13, à la fin du ſecond paragraphe, $AF[a]: Ff[\frac{adz}{y}] = AQ[\frac{ab}{z} - a] : Qs = \frac{abdz}{zy} - adz$; *de la même maniere* $Pn = \frac{abdz}{zy} + adz$.

Il faloit dire, en vertu de cette analogie, que $Qs = \frac{abdz}{zy} - \frac{adz}{y}$, & que $Pn = \frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y}$.

Pag. 152. lign. 6. $(\frac{bv}{z} + y) \times (\frac{bv}{z} + y)$.

Au lieu de cela il faut écrire $(\frac{by}{z} + y) \times (\frac{abdz}{zy} + \frac{adz}{y})$.

Ibid. lign. 7 & 8, *& l'élement de ces deux différentielles ſera* $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz) =$ *à la différence de la ſomme des deux ſolides produits par les eſpaces* cQGB, BGPC.

Il n'eſt pas vrai que l'élement de ces differentielles ſoit $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$; car il eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aab^3dz}{z^3} + \frac{2aabdz}{z})$; mais on veut dire que la différence de ces deux differentielles eſt $= \frac{p}{r} \times (\frac{2aabbdz}{zz} + \frac{2}{3}aadz)$.

Ibid. lign. 11. *eſt la differentielle de la $\frac{1}{2}$ de la ſomme, dont l'intégrale ſera* &c.

Je ne vois pas pourquoi Mr. STONE veut ſeulement la moitié de l'intégrale, pour avoir le ſolide; il me ſemble qu'il faut l'intégrale entiere $\frac{p}{r} \times (\frac{2aabb}{z} - \frac{2}{3}aaz)$; ou plutôt [car il

 n'ob-

n'obſerve pas les ſignes] $\frac{p}{r} \times \left(-\frac{2aabb}{z} + \frac{2}{3}azz\right)$: Par cette raiſon, il faudroit changer les nombres dans tout le reſte qui ſuit, & écrire finalement $\frac{p}{r} \times \frac{-2aabbx - \frac{2}{3}a^3x + \frac{2}{3}aaxx}{a - x}$. Pour ce qui eſt des ſignes; il faut peut-être les laiſſer, comme ils ſont dans le Livre, mais c'eſt de plus haut qu'il faut commencer à examiner le calcul.

Pag. 153. 154. Juſqu'à la fin.

On ne ſauroit prendre la peine d'examiner tout ce long raiſonnement, après que nous en avons aſſez pris pour examiner tout ce qui précéde: quoiqu'il en ſoit, on feroit le calcul beaucoup plus aiſément, en ſuivant nôtre route.

Pag. 155. Probléme 14. *Trouver la nature d'une courbe AMC, telle que ſi on conçoit une vaſe formé par ſa révolution.... rempli d'eau, qu'on ſuppoſera couler par un petit trou rond, percé dans le fond..... la ſurface de l'eau deſcende par des eſpaces égaux en tems égaux; ſuppoſant que la viteſſe de l'eau qui ſort par le trou, ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou.*

Ce Problême eſt purement algébrique, ne demandant ni à différentier, ni à integrer; car pour que la ſurface deſcende par des eſpaces égaux en temps égaux, il faut que ſa viteſſe ſoit uniforme. Or la ſurface de l'eau eſt à la ſurface du trou, reciproquement comme la viteſſe par le trou eſt à la viteſſe de la deſcente de la ſurface, c'eſt-à-dire $yy : b = \sqrt{ax} : \frac{b\sqrt{ax}}{yy}$. Ainſi $b\sqrt{ax} : yy$ ſera la viteſſe de la ſurface; laquelle devra être uniforme, & partant conſtante: faiſant donc $b\sqrt{ax} : yy = c$, cela nous donnera $abbx = ccy^4$, ou $abbx : cc = y^4$; qui eſt pour la Parabole quarrée-quarrée.

Mais la ſuppoſition que l'on fait, ſavoir que la viteſſe de l'eau par le trou ſoit comme la racine quarrée de la hauteur de l'eau au deſſus du trou, eſt fauſſe; n'ayant lieu que quand le trou ſeroit infiniment petit: ce qu'on ne peut pas ſuppoſer ici: autrement la ſurface de l'eau ne deſcendroit ſenſiblement

qu'en

Digitized by Google

qu'en un tems infini. La véritable ſolution de ce Probléme, & de tous les autres ſur le mouvement des eaux, n'a encore été publiée par perſonne, ni même par Mr. NEWTON; & tout ce que l'on en a ſont de purs paralogiſmes: Nous en donnerons avec le tems la véritable Théorie. *

Pag. 155. Probléme 15. *Si A C eſt une ligne horizontale, ſur le point C de laquelle eſt elevé un Parallelépipede C D, dont une des ſurfaces ſoit perpendiculaire à la ligne A C: il s'agit de trouver l'angle C A B ſur le point A, duquel angle ſuppoſant poſée l'extrémité A d'un long ſolide A B; de maniere qu'avec ſon autre extremité B, il vienne preſſer le Parallelépipede C D, ce ſolide comprimera perpendiculairement C D avec plus de force au point A, qu'en tout autre point.* TAB. LXXXI. N°. CLXX. *Fig* 1.

Si l'énoncé de ce Probléme, qui appartient ſeulement au Calcul direct Différentiel eſt obſcur, la Solution ne l'eſt pas moins. Si je le conjecture bien, je crois qu'on demande la poſition du corps peſant AB, entre la verticale CD & l'horizontale CA, qui ſoit telle que la verticale CD ſouffre le plus de force, pour être preſſée en arriére dans la direction horizontale.

SOLUTION.

Soit le poids du corps, ramaſſé au centre de gravité F, nommé p; AF, b; AB, a; BC, x. Ce poids p agiſſant ſuivant la direction verticale FE, il faut décompoſer la force en FI & IE. Celle de FI eſt ſoutenuë par l'obſtacle mis en A, & l'autre ſuivant IE fait effort pour tourner le levier AB autour de A, mais elle eſt empêchée par l'oppoſition du plan CD. Ainſi cet effort appliqué en F eſt $= \frac{FI}{EF} p = \frac{AC}{AB} p = \frac{p\sqrt{(aa-xx)}}{a}$. Et le moment de cet effort en F $= p.\, AF.\, \sqrt{(aa-xx)} : a = pb\sqrt{(aa-xx)} : a$. Faiſant maintenant AB : AF $= \frac{pb\sqrt{(aa-xx)}}{a} : \frac{pbb\sqrt{(aa-xx)}}{aa}$ $=$ à la force avec laquelle le plan CD eſt pouſſé ſuivant HB:

* Voiez N°. CLXXXVI.

il faut la decompoſer en HG & GB: celle-ci pouſſe CD de haut en bas, mais l'autre ſuivant HG, ſera perpendiculaire à CD, & ſera $= pbbx\sqrt{(aa - xx)} : a^3$; c'eſt donc de celle-ci, ou ſimplement de $x\sqrt{(aa - xx)}$, qu'il faut faire le ***maximum***, & non pas de $xx\sqrt{(aa - xx)}$; comme le pretend Mr. STONE. Si on fait le calcul, on trouvera que $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, & partant que l'angle CAB ſera demi-droit, ou de 45°.

Pag. 156. Probléme 16. *Trouver &c.* [la courbe de la plus vite deſcente].

Notre Auteur ne dit pas que je ſuis le premier qui ait réſolu & propoſé ce Probléme, & moins encore dit-il que la Solution qu'il a donnée eſt priſe de mon Frere. Pour cacher ſon plagiat, il croit être à couvert & deguiſer la méthode de mon Frére, en employant d'autres lettres, & en ſe ſervant d'autres façons d'exprimer la choſe; comme, par exemple, lorſqu'il dit (pag. 157, vers la fin) *la difference de la courbe eſt toûjours comme* $dx : y^{\frac{1}{2}}$, *c'eſt-à-dire en raiſon directe de la difference de l'abſciſſe AH* [x], *& en raiſon reciproque & ſouſdoublée de l'ordonnée HE* [y]. Au lieu que mon Frére avoit dit ſimplement, que la nature de la courbe conſiſte en ce que $dx : \sqrt{y}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ doit être conſtant, ou $= 1 : \sqrt{a}$.

Pag. 157. *On trouvera, que la courbe qui a cette proprieté* [de la plus vite deſcente] *eſt la Cycloïde, paſſant &c.*

Il ne ſuffit point de dire, *On trouvera*; il faloit faire voir en effet comme on le trouvera, & cela par une analyſe, & non pas *a poſteriori* par une demonſtration; parce que cela ſuppoſe qu'on ſait deja que c'eſt une Cycloïde. Il ne ſuffit pas non plus de dire que la Cycloïde paſſe par les deux points; il faloit de plus montrer par l'analyſe, que le point ſuperieur eſt néceſſairement au commencement de la Cycloïde renverſée.

Ibid. vers la fin, *On ſuppoſe* [les points] *A & B, poſés de façon, que ACD ſoit une demi-Cycloïde.*

Cette ſupoſition eſt puerile, en ce qu'elle reſtreint la Propoſition generale à un cas particulier; comme ſi le point inférieur donné B devoit néceſſairement être au ſommet de la Cycloïde

de renverſée: au lieu qu'il peut être dans un endroit quelconque de la Cycloïde, tantôt au delà du ſommet, tantôt en deça, ſelon que le hazard l'a placé.

Pag. 158. *PQ* [$\sqrt{(ay - yy)}$]: *BP* [$\sqrt{(aa - yy)}$] $=$ *CL* [dx], *CE* $= \frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx.\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}}. = \frac{dx.\sqrt{a}}{\sqrt{y}}$, *laquelle expreſſion eſt comme* $\frac{dx}{y^{1:2}}$; $\sqrt{}$ a *étant donnée. Donc la Cycloïde &c.*

Quel honteux paralogiſme, pour un Géometre tel que le nôtre! Car il eſt faux que $\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}}$ ſoit $= \frac{dx\sqrt{a}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}}$ Nous autres Géometres du commun, aurions fait $\frac{dx\sqrt{(aa-yy)}}{\sqrt{(ay-yy)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}.\sqrt{(a-y)}}{\sqrt{y}.\sqrt{(a-y)}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{\sqrt{y}} = \frac{dx\sqrt{(a+y)}}{y^{1:2}}$. Cependant il ſemble que Mr. STONE trouve, nonobſtant ſon paralogiſme, ce qu'il veut trouver, ſavoir $\frac{dx}{y^{1:2}}$ proportionel à la differentielle de la courbe: mais loin de-là, ce n'eſt que par accident qu'il le trouve, par une autre faute qu'il commet, & qui redreſſe la premiere. C'eſt qu'il fait BP $= \sqrt{(aa - yy)}$, au-lieu de faire BP $= \sqrt{(aa - ay)}$, étant moyenne proportionelle entre KB [a] & BA [$a - y$]. Ainſi pour corriger la double erreur de Mr. STONE; il n'y-a qu'à écrire $\sqrt{(aa - ay)}$, en place de $\sqrt{(aa - yy)}$, qui ſe trouve deux fois dans la même ligne de la page 158.

Pag. 158. Probléme 17. *Trouver la nature &c.* [du Solide de moindre reſiſtance].

Il examine ici le Solide rond de la moindre reſiſtance. Mais, à la premiere inſpection, je vois que tout ce qu'il y a de bon eſt qu'il a emprunté de moi la méthode. On le voit en confrontant ſa Figure 81 avec la Figure apartenant à la piéce que j'ai publiée dans les *Actes de Leipſik*, *1699* * au mois de *Novembre*, où j'ai expoſé la méthode & le fondement ſervant à réſoudre le Pro-

* N°. LIV. pag 307, & N°. LVI. pag. 313, *Tom. I.*

Problême en queſtion. Et pour ce qui eſt du calcul même, que Mr. STONE employe; il paroit entiérement copié de celui de feu Mr. *le Marquis de* L'HOSPITAL. Pour en être convaincu; il n'y-a qu'a lire la piéce de Mr. de L'HOSPITAL, qu'il donna dans la même année au mois d'*Août*. †

Pag. 161. Problême 18. *Trouver l'angle ABC, que forme le plan d'une aile de moulin à vent*, &c.

Ce Problême eſt un de ceux qui ne dépendent nullement du Calcul Intégral. Mr. STONE ne cite que Mr. MARIOTTE, qui l'a mal reſolû, & Mr. PARENT, dont, à ce qu'il dit, il n'a point vû la Solution. Mais ne pouvoit-il pas auſſi citer Monſieur HUGUENS qui l'a très bien réſolu. De plus, ne pouvoit-il pas citer ma *Manœuvre des Vaiſſeaux* *. Car pag. 51, je donne une règle, pour déterminer l'angle que doit faire le gouvernail avec la quille, pour que le Vaiſſeau tourne le plus promptement qu'il eſt poſſible, qui eſt le même que celui que doit former l'aile du moulin à vent avec l'axe, pour faire tourner le moulin avec le plus de force qu'il ſoit poſſible.

† N° LV. pag. 311, *Tom. I.*
* N°. XCI. pag. 40, 41, *Tom. II.*

OPTICA

N°. CLXXI.

OPTICA.

****

I.

PROBLEMA OPTICUM.

Datis tribus objectis AB, CD, EF, inæqualium longitudinum, in eadem recta RS ſitis, datiſque intervallis BC, DE a ſe invicem ſejunctis; invenire locum oculi O, ex quo tria iſta objecta videat ejuſdem magnitudinis apparentis.

SOLUTIO.

Ex puncto O intelligatur demiſſa perpendicularis OR, & dicantur $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$: Item intervallum BC, quo diſtat objectum primum a ſecundo $=m$, & intervallum BE, quo diſtat objectum primum a tertio $=n$. Sintque $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$. Quia tres anguli AOB, COD, EOF debent eſſe æquales; erunt areæ triangulorum, ut $AO\times BO$, $CO\times DO$, $EO\times FO$. Sunt quoque, ob communem verticem O, ut baſes AB, CD, EF. Attendamus primo ad duo priora triangula AOB, COD, ubi habebimus $AB\,[a]$: TAB. LXXXI. N°. CLXXI Fig. 1.
$CD\,[b]=AO\times BO\,[xy]:CO\times DO=\frac{bxy}{a}=z\times OD$; quare $OD=bxy:az$. Porro quia, addito communi angulo BOC, habetur $AOC=BOD$, erit etiam $AC\,[a+m]$: $BD\,[b+m]=AO\times CO\,[xz]:BO\times DO=\frac{b+m}{a+m}xz$; cum itaque BO ſit $=y$, erit etiam $OD=(b+m)\,xz$: (a+

$(a+m)y$; adeoque $(b+m)xz:(a+m)y = bxy:az$; unde elicitur z, vel $OC = y\surd((ab+bm):(ab+am))$. Et valore hoc ſubſtituto in $bxy:az = OD$, erit $OD = x\surd((bb+bm):(aa+am))$.

Simili modo inveniuntur OE & OF, ſcribendo tantum c pro b, & n pro m; prodibitque $OE = y\surd((ac+cn):(ac+an)$ & $OF = x\surd((cc+cn):(aa+an)$.

Ut nunc habeantur duæ æquationes inter x & y, ad eorum valores determinandos; obſervo, quod $AR = (BO^2 - AO^2 - BA^2):2BA = (yy-xx-aa):2a$; adeoque $BR = (yy-xx-aa):2a+a = (yy-xx+aa):2a$. Sed & idem $BR = (CO^2 - BO^2 - CB^2):2CB = (byy-ayy):(2ab+2am) - \frac{1}{2}m$; unde emergit hæc prima æquatio $(yy-xx+aa):2a = (byy-ayy):(2ab+2am) - \frac{1}{2}m$.

Pari ratione $BR = (EO^2 - BO^2 - EB^2):2EB = (cyy-ayy):(2ac+2an) - \frac{1}{2}n$; unde hæc altera æquatio $(yy-xx+aa):2a = (cyy-ayy):(2ac+2an) - \frac{1}{2}n$. Æquatio prior dat $yy = (xx-aa-am)\times(b+m):(a+m)$. Poſterior vero dat $yy = (xx-aa-an)\times(c+n):(a+n)$. Hinc igitur $(xx-aa-am)\times(b+m):(a+m) = (xx-aa-an)\times(c+n):(a+n)$. Brevitatis gratia ponatur $a+m = d$, $b+m = e$, $a+n = f$, $c+n = g$; Erit $(xx-ad)e:d = (xx-af)g:f$, hoc eſt $(exx-ade):d = (gxx-afg):f$; multiplicando per crucem $efxx - adef = dgxx - adfg$; ex cujus reductione invenitur $xx = (adfg-adef):(dg-ef)$; hocque ſubſtituendo in alterutro valore ipſius yy [eſt enim perinde] provenit $yy = (aefg-adeg):(dg-ef)$. Ergo tandem $x = \surd((adfg-adef):(dg-ef))$, & $y = \surd((aefg-adeg):(dg-ef))$. *Q. E. I.*

Coroll. I.

Hinc etiam reliquæ CO, DO, EO, FO determinantur. Eſt enim (ut ſupra inventum) $OC = y\surd((ab+bm):(ab+am) = y\surd(bd:ae) = \surd((bdfg-bddg):(dg-ef))$; $OD = x\surd$.

$x\surd((bb+bm):(aa+am)) = x\surd(be:ad) = \surd((befg - becf):(dg - ef))$; OE $= y\surd((ac+cn):(ac+an)) = y\surd(cf:ag) = \surd((ceff - cdef):(dg - ef))$; OF $= x\surd((cc+cn):(aa+an)) = x\surd(cg:af) = \surd((cdgg - cdeg):(dg - ef))$.

COROLL. II.

Sub hac generali Solutione continentur ſinguli caſus particulares. Ex. gr. ſi duo ex objectis, vel omnia tria eſſent contigua; nihil aliud agendum eſſet, quam ſupponere tantum BC ſeu $m = 0$, & BE, ſeu $n =$ CD $= b$. Atqui ita foret $d = a$, $e = b$, $f = a+b$, $g = c+b$. Quibus igitur ſubſtitutis, in generalibus linearum valoribus, prodiret x ſeu OA $= \surd((adfg - adef):(dg - ef) = a\surd((ac+bc):(ac - bb)$; y, ſeu BO, ſeu [quia cum ea in hoc caſu congruit] CO $= \surd((aefg - adeg):(dg - ef)) = b\surd((ac+ab):(ac - bb))$; DC, ſeu [quæ hic eadem eſt] EO $= \surd((ceff - cdef):(dg - ef)) = b\surd((ac+bc):(ac - bb))$; FO $= \surd((cdgg - cdeg):(dg - ef)) = c\surd((ac+ab):(ac - bb))$. Quæ omnia rite conſentiunt cum Solutione hujus caſus, per methodum particularem inventa.

****

II.

PROBLEMA DIOPTRICUM GENERALE,

Quod comprehendit omnia Huygeniana *circa lentes.*

DAta lente ABCD, cujus axis EBDF, & puncto radiante M; invenire ejus focum, ſeu punctum G, in quo radii MH incidentes, poſt duplicem refractionem in H & I perpeſſam, concurrunt. TAB. LXXXI. N°. LXXI. Fig. 2.

Solutio.

TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 2.

Eſto ſinus anguli incidentiæ ex aëre in vitrum ad ſinum anguli refractionis, ut m ad n; F centrum ſuperficiei ſuperioris ABC; E centrum ſuperficiei inferioris ADC. Pro conceſſo aſſumatur angulos infinite parvos, ſeu valde acutos, eſſe ut eorum ſinus.

Vocetur angulus incidentiæ $MHO = m$, & angulus refractionis primæ $FHI = n$; angulus radiationis $HMB = a$; diſtantia puncti radiantis M a lente, hoc eſt, $MB = d$. Erit, producta IH donec axi occurrat in N, ang. $N = a - m + n$, ang. $F = m - a$. Dicatur porro ang. $E = b$, erit ang. $EIN = E - N = b - a + m - n$. Eſt vero $EIN : LIG = n : m$; hinc $LIG = (mb - ma + mm - mn) : n$; ang. $G = LIG - E = (mb - nb - ma + mm - mn) : n$. Sit radius ſuperficiei inferioris ADC, hoc eſt $ED = p$; radius ſuperioris, hoc eſt $FB = q$; erit $HF : HM$ ſeu $BM = a : m - a$, hoc eſt, $q : d = a : m - a$; unde $da = mq - aq$, ideoque $a = mq : (d + q)$. Præterea, quia craſſities lentis BD, multoque magis HI, infinities minor ſupponitur amplitudine arcus ID, qui & ipſe infinities minor habetur diſtantia finita ME, punctum I cenſeri poteſt in H, adeoque EIM tanquam triangulum; hinc ergo $b : a = MI$, vel MH, vel $MB : EI = d : p$; hinc $b = ad : p =$ [ſubſtituto valore ipſius a] $mqd : (pd + pq)$. Surrogatis itaque valoribus ipſarum a & b in valore anguli G, qui inventus eſt $= (mb - nb - ma + mm - mn) : n$, obtinebitur $G = (mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq) : (npd + npq)$. Tandem $G : E = EI : GI = ED : GD$, hoc eſt $\frac{mmqd - mnqd + mmpd - mnpd - mnpq}{npd + npq} : \frac{mqd}{pd + pq} = p : GD$. Reperitur itaque

$$GD = \frac{npqd}{mqd - nqd + mpd - npd - npq}.$$

ORDRE.

Digitized by Google

III.

ORDRE DU CALCUL

Pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Claſſes.

SOit AMRTV le grand cercle d'une boule de matiere tranſparente, repréſentant un de ces globules aqueux, qui rempliſſent l'air, dans le tems qu'on y voit un Iris. BA, BM, B*m* ſont des rayons ſolaires, conſiderés comme venant d'une diſtance infinie, par conſéquent comme paralleles; dont celui BA, qui prolongé paſſe par le centre B, ſera nommé *l'axe des rayons*. Les autres BM, B*m*, prolongés en S, *s*, ſont les rayons incidents obliquement, qui à l'entrée dans la boule ſe rompant vers les perpendiculaires CM, C*m*, donnent les rayons rompus MR, *mr*, leſquels ſont réflechis, autant de fois que l'on voudra, ſavoir MR en RT, RT en TV &c. Et *mr* en *rt*, *rt* en *tu* &c. pendant qu'une partie de chacun de ces rayons ſort de la boule à la rencontre du point de réflexion. TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 3.

Il faut remarquer, que pour qu'un Iris d'une certaine claſſe s'engendre, il y a un certain point M ſur lequel le rayon BM tombant, & tous les autres infiniment proches B*m* entrant enſuite dans la boule, dont, après autant de réflexions qu'il en faut pour l'Iris de cette claſſe, ils ſortent parallelement VP,*vp*, comme ils y étoient entrés parallelement BM, B*m*. Tous les autres rayons ſolaires qui tombent ſur des point différents de M, *m*, en deça ou en delà, ſortiront après le même nombre de reflexions non parallelement, & ſe diſperſeront. Ce qui fait que l'œil placé dans la direction VP, *vp*, on verra ſur V*v* l'image du Soleil ſous une certaine couleur convenable à la nature de la réfraction du rayon BM en MR, & de B*m* en *mr*. C'eſt en quoi conſiſte l'apparition d'un Arc-en-ciel; ſuppoſé

Digitized by Google

que l'œil en ſoit aſſés ſenſiblement frappé ; quoique, en vérité, les yeux des hommes ne ſoient pas aſſés ébranlables, pour s'appercevoir des Iris, qui ſont au de-là de la ſeconde Claſſe : peut-être que les Aigles, les Linx, ont les yeux plus vifs, plus perçants pour les voir. Quoiqu'il en ſoit, voici la méthode générale pour déterminer le point M, pour telle ſorte d'Iris que l'on voudra ; ce point trouvé, il eſt aiſé de déterminer la demi-largeur de l'Iris, c'eſt-à-dire, l'angle que fait PV prolongé avec l'axe AC, ou le rayon BM, prolongés.

D'abord, il eſt clair que toutes les cordes MR, RT, TV &c. ſont égales entr'elles ; comme le ſont auſſi les cordes mr, rt, tu, &c. à cauſe de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion. Soit CA le ſinus total $= 1$, CE perpendiculaire ſur MS, prolongement de BM, ou le ſinus de l'arc AM $= x$, l'arc $MmR = RrT = TvV = A$, l'arc $mRr = rt = tTv = B$; le nombre de réflexions en R, T, &c. ou le nombre quantiéme de l'Iris qu'on veut déterminer $= N$: on aura l'arc total $MRTV = (1+N) \times A$, & l'arc total $mrtu = (1+N) \times B$. Donc la différence de ces arcs totaux, c'eſt-à-dire, $Mm + Vv = (1+N) \times A - (1+N) \times B = (1+N) \times (A - B) = (1+N) \times (Mm - Rr)$. Or, parce que les rayons RM, rm [s'ils rebrouſſoient] ſortiroient parallelement en MB, mB, comme leurs égaux TV, tv doivent ſortir parallelement en VP, vp ; il faut que la figure $MmRr$ ſoit parfaitement égale & ſemblable en tout à la figure $VvTt$; donc $Mm = Vv$, & $Rr = Tt$. Ainſi nous aurons $2Mm = Mm + Vv = (1+N) \times (Mm - Rr) = (1+N) \times Mm - (1+N) \times Rr$; ce qui nous donne $Mm \times (N-1) = (1+N) \times Rr$, & partant $N+1 : N-1 = Mm : Rr =$ [par la nature du cercle] MF : Fr ou FR ; donc *componendo* $2N : N+1 =$ MR : MF ; donc $MF = \frac{N+1}{2N} MR$; cela veut dire, que le point cherché M doit être là, où MF, partie du rayon rompu compriſe entre le point de réfraction M & la cauſtique, ſoit $= \frac{N+1}{2N} MR$. Or dans l'*Analyſe des infin. petits* pag. 122, on

a

a generalement MF $= \frac{bbmy}{bmy - any - aan} =$ [ſi y, ou le rayon incident eſt infini, comme ici] $\frac{bbm}{bm - an}$. Et a eſt ici [en nommant CE $= x$] ME $= \sqrt{(1 - xx)}$, b ou MG $=$ $\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$, MR $= 2$ MG $= 2\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$; d'où on aura cette équation $\frac{N+1}{2N}$ MR ou $\frac{N+1}{N}\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$

$$= \frac{bbm}{bm - an} \text{ ou } \frac{m(1 - \frac{nn}{mm}xx)}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}.$$

La diviſion par $\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}$ donnera

$$\frac{N+1}{N} = \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= \frac{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= 1 + \frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}};$$

Donc $\frac{1}{N} =$

$$\frac{n\sqrt{(1 - xx)}}{m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)}};$$

multiplié en croix, il vient $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} - n\sqrt{(1 - xx)} = Nn\sqrt{(1 - xx)}$; ou $m\sqrt{(1 - \frac{nn}{mm}xx)} = (Nn + n)\sqrt{(1 - xx)}$; ou en quarrant les deux membres, $mm - nnxx = (Nn + n)^2 - N^2n^2xx - 2Nn^2xx - nnxx$. Par la réduction, on obtiendra $xx = \frac{(Nn + n)^2 - mm}{NNnn + 2Nnn}$ & partant $x = \frac{\sqrt{((Nn+n)^2 - mm)}}{n\sqrt{(NN + 2N)}}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

Pour le Principal Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 1$, x devient $= \frac{\sqrt{(4nn - mm)}}{n\sqrt{3}}$

COROL-

Digitized by Google

COROLLAIRE II.

Pour le ſecond Iris, où N, le nombre de réflexions, eſt $= 2$, il vient $x = \frac{\sqrt{(9mm - mm)}}{n\sqrt{8}}$.

COROLLAIRE III.

Pour le troiſiéme Iris, où $N = 3$, on a $x = \frac{\sqrt{(16mm - mm)}}{n\sqrt{15}}$. Et ainſi des autres à l'infini.

COROLLAIRE IV.

Pour l'infinitiéme Iris, où $N = \infty$, x ſera $= 1$; c'eſt-à-dire, le rayon incident BM doit friſer la boule, & ſera le plus éloigné de l'axe BAC qu'il eſt poſſible.

COROLLAIRE V.

Si la réfraction eſt ſuppoſée bien grande; il pourroit arriver que quelques-uns des premiers Iris devinſſent imaginaires; par conſéquent inviſibles: par exemple, ſi $m : n = 5 : 2$, on auroit pour le premier Iris, où $N = 1$, $x = \frac{\sqrt{(16 - 25)}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{-9}}{2\sqrt{3}}$, imaginaire. Mais le ſecond Iris, où $N = 2$, donneroit $x = \frac{\sqrt{(36 - 25)}}{2\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{8}}$, poſſible.

Pour la détermination des demi-largeurs des Iris de toutes les Claſſes.

Le rayon dernier ſortant VP, qui entre dans l'œil, doit être continué en arriére VQ, juſqu'à-ce qu'il rencontre le rayon incident BM prolongé, ces deux rayons feront un angle,

gle, dont la meſure donne la demi-largeur de l'Iris. Pour trouver cet angle, on obſervera ce qui ſuit : CE, ou x, eſt le ſinus de l'arc AM, en prenant CA pour le ſinus total, & il eſt en même tems le ſinus de l'angle d'incidence : or x étant trouvé, on trouvera par les Tables l'arc AM qui ſera la meſure de l'angle d'incidence ; on aura donc auſſi $\frac{n}{m}x$, ou CG, ſinus de l'angle de réfraction ; cet angle ſera donc auſſi connu par les Tables. La différence de ces deux angles d'incidence & de réfraction, qui eſt l'angle RMS, ſoit nommée D. On aura de même, en prolongeant TV en π, $PV\pi = D =$ RMS.

De plus, je nomme R l'angle de réfraction CMG ou CRG. Il eſt viſible, que chacun des Angles MRT, RTV, &c. $= 2R$. Que l'on prolonge le rayon incident BMS à l'indéfini, lequel rencontre le rayon réflechi prolongé après la premiere réflexion au point α, celui prolongé d'après la ſeconde réflexion, au point β, celui prolongé d'après la troiſiéme réflexion au point γ, &c. Enfin le dernier rayon ſortant VP, continué en arriére rencontre le rayon incident au point nommé ω. Qu'on nomme enfin l'angle droit P. On conçoit qu'en chaque point de rencontre il y a deux angles, l'un intérieur qui regarde le Soleil, & l'autre extérieur qui eſt ſon angle de ſuite. Le premier intérieur $\alpha = MRT - RMS = 2R - D$; le premier extérieur $\alpha = 2P - 2R + D$: Le ſecond intérieur $\beta = 2R - (2P - 2R + D) = 4R - 2P - D$; le ſecond extérieur $\beta = 2P - (4R - 2P - D) = 4P - 4R + D$. Le troiſiéme intérieur $\gamma = 2R - (4P - 4R + D) = 6R - 4P - D$; le troiſiéme extérieur $\gamma = 2P - (6R - 4P - D) = 6P - 6R + D$ &c. Maintenant, ſi chacun des intérieurs eſt diminué encore d'un D, on aura la demi-largeur du premier Iris $= 2R - 2D$; celle du ſecond Iris $= 4R - 2P - 2D$; celle du troiſiéme $= 6R - 4P - 2D$; En general, celle de la N^e Claſſe ; c'eſt-à-dire, la demi-largeur de l'Iris, qui ſe forme après N réflexions entre deux réfractions, ſera $= 2N \times R - 2(N - 1) \times P - 2D$.

 Quel-

Quelques exemples ſerviront d'éclairciſſement. Suppoſons la loi de réfraction $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$, qui eſt celle qui ſe fait en entrant de l'air dans l'eau. Pour le premier ou principal Iris, où $x = \frac{\sqrt{(4mm - mm)}}{n\sqrt{3}}$, on aura $x = \sqrt{\frac{20}{27}} =$ [en prenant pour le ſinus total 10000] $\frac{\sqrt{2000000000}}{\sqrt{27}} = \sqrt{74074074\frac{2}{27}} = 8607$ à fort peu près. En conſultant les Tables des ſinus, on trouvera que ce ſinus 8607 répond à l'arc AM de 59°. 24′ = à l'angle d'incidence. Faites donc 4 : 3 = 8607 : 6455 = au ſinus de l'angle de réfraction, qui répondra dans les Tables à 40°. 12′ $\frac{1}{2}$ = à l'angle de réfraction = R : la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction ſera donc 19°. 11′ $\frac{1}{2}$ = D. Ainſi on aura $2R - 2D = 42°.\,2'$ = à la demi-largeur de l'Iris principal ; conformément aux obſervations.

On fera, *mutatis mutandis*, une ſemblable opération pour le ſecond Iris. On trouvera $x = 9501\frac{1}{2}$, qui donne l'arc AM de 71°. 50′ = à l'angle d'incidence : faiſant $4 : 3 = 9501\frac{1}{2}$: 7126 = au ſinus de l'angle de réfraction, qui répond à l'arc de 45°. 27′ = à l'angle de réfraction = R : la différence des angles d'incidence & de réfraction = 26°. 23′ = D : on aura donc $4R - 2P - 2D = -(54°.\,34')$ = à la demi-largeur de l'Iris Secondaire.

Le ſigne négatif — marque que le concours des lignes prolongées PV & BMS ſe fait entre le Soleil & la boule, & non pas derriere la boule, comme la Figure le repréſente.

S c h o l i e.

Sans ſe donner tant de peine, & ſans paſſer graduellement par toutes les claſſes inférieures des Iris, pour parvenir à la connoiſſance de la demi-largeur ω de l'Iris de la claſſe N conſiderée généralement ; on y peut arriver immédiatement par la propriété du Polygone, qui eſt que la ſomme de tous ſes angles eſt égale à deux fois autant d'angles droits qu'il a de cotés ou d'angles

d'angles moins quatre. Ainſi dans nôtre cas, il y a une eſpèce de Polygone, comme dans cette Figure $D\omega D\,2R\,2R\,D$, qui a toujours trois angles ſaillants ω, D & D, & autant d'angles rentrants $2R$, qu'il y a d'unités dans le nombre N; enſorte qu'il y a en tout $N+3$ angles, & autant de cotés; où il faut noter, que l'angle ω eſt celui que l'on cherche, chacun des deux angles D eſt la différence de l'angle d'incidence & de celui de réfraction; chacun des angles marqués $2R$ eſt le double de l'angle de réfraction R; tous les cotés $D\,2R$, $2R\,2R$, $2R\,2R$ &c. ſont égaux, repréſentés dans la précédente Figure, par les cordes égales MR, RT, TV, &c. Quant au reſte, il eſt à obſerver que chacun des angles rentrants $2R$, entant qu'ils concourent à former les angles du Polygone, qui doivent regarder l'intérieur de la Figure, a pour meſure, non pas $2R$, mais le complément à 4 droits; ainſi chaque $2R$ doit être eſtimé par $4P - 2R$: Donc la ſomme de tous les angles du Polygone ſera $= \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$. Or, par la propriété générale des Polygones, cette ſomme doit être $= 2(N+3) \times P - 4P$, c'eſt-à-dire $= 2(N+1)P$; ce qui nous fournit cette équation $2(N+1)P = \omega + 2D + N \times (4P - 2R)$, ou $2N \times P + 2P = \omega + 2D + 4N \times P - 2N \times R$. D'où on tire $\omega = 2N \times R - 2(N-1)P - 2D$; ce qui eſt conforme à ce que nous venons de trouver par une beaucoup plus longue déduction. TAB. LXXXI. N°. CLXXI. *Fig.* 4.

Digitized by Google

N.° CLXX.

Fig. 2.

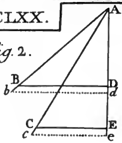
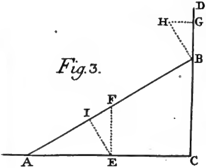


Fig. 3.



N.° CLXXI.

Fig. 2.

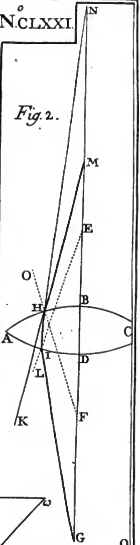


Fig. 4.

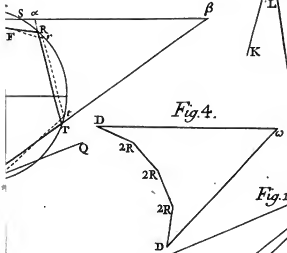
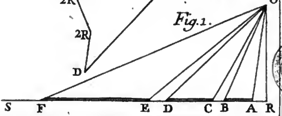


Fig. 1.



NAPOLI

Digitized by Google

MECHANICA.

****

N°. CLXXII.

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à ſon uſage ſur Mer.

DISCOURS

Compoſé à l'occaſion de la Queſtion propoſée par Meſſieurs de l'Académie Roiale des Sciences de Paris,

Pour l'Année 1739.

Digitized by Google

LE CABESTAN

Délivré des inconvéniens ordinaires, par rapport à ſon uſage ſur Mer.

I.

DE toutes les Sciences, celles qui apportent le plus d'utilité au public, ce ſont ſans contredit les Mathematiques & en particulier la Méchanique. L'Hiſtoire ancienne nous apprend combien ARCHIMEDE [pour n'alléguer que ce ſeul exemple] a produit & exécuté de prodigieux effets, par le moyen des machines, duës à ſon génie & à ſes profondes connoiſſances de la Méchanique ; quoiqu'on en raconte auſſi pluſieurs faits fabuleux, forgés par des gens qui n'entendoient pas les principes de cette Science ; mais par cela même ces faits inventés ſont faciles à diſtinguer des véritables.

I I.

Digitized by Google

I I.

L'Illuſtre *Académie Royale des Sciences* de *France*, toujours attentive à favoriſer le progrés des Sciences, a propoſé, pour le prix de l'année 1739, un ſujet qui regarde la Navigation & le Commerce, conformément à l'intention du généreux Fondateur. Le ſujet en queſtion conſiſte dans la demande, *De donner la meilleure conſtruction du* Cabeſtan, *ou telle autre Machine équivalente.*

I I I.

Il n'eſt pas néceſſaire de donner une ample deſcription du Cabeſtan; étant une machine fort connuë, qui ſert en toutes ſortes d'occaſions ſur Terre & ſur Mer. Cependant le mot de Cabeſtan eſt employé particuliérement dans la Marine: Il ſignifie une machine aſſés ſimple, que VITRUVE appelloit *Ergata*. On ſait, que c'eſt un cylindre, ou un arbre en forme de rouleau vertical, ou érigé à plomb; en quoi il différe d'une autre machine ſemblable nommée *Vireveau* chés les Mariniers, & *Sucula* chés VITRUVE; c'eſt auſſi un cylindre, ou rouleau, mais poſé horizontalement. On place le Vireveau ſur le Tillac des Vaiſſeaux Marchands, où il fait le même effet que le Cabeſtan ſur les Vaiſſeaux de guerre. Dans les grands Vaiſſeaux, on a plus d'une ſorte de Cabeſtan, le grand & le petit. Le grand Cabeſtan, planté ſur le premier pont, & élevé juſqu'à 4 ou 5 pieds de hauteur au deſſus du ſecond, eſt nommé double, à cauſe qu'il ſert à deux étages. Le petit Cabeſtan, ou le Cabeſtan ſimple, eſt poſé ſur le ſecond pont. Leur uſage, & celui du Vireveau, conſiſte à lever les ancres, à tirer, à trainer, ou à élever des fardeaux. Je ne parlerai dans la ſuite que du *Cabeſtan* pris en général, qui fait le ſujet de la queſtion; quoiqu'il ſoit aiſé d'appliquer mes raiſonnemens auſſi au Vireveau, par rapport aux inconvéniens auxquels je tâcherai de rémédier, entant qu'ils ſont communs à ces deux ſortes de machines.

I V.

Digitized by Google

I V.

Quand on veut ſe ſervir du Cabeſtan, pour lever, par exemple, l'ancre; cela ſe fait lorſque le cordage, ou le cable, attaché par un bout à l'ancre & arrêté par l'autre bout en quelque endroit du cylindre, s'entortille ſur lui en faiſant tourner ou virer le Cabeſtan, par le moyen de deux ou pluſieurs léviers, ou barres, que l'on a fait paſſer par des ouvertures qui percent diamétralement l'arbre du Cabeſtan. Si la réſiſtance eſt bien grande, on y applique quelques fois Six léviers, ſavoir quatre par le haut & deux par le bas.

V.

Avant que de commencer à faire tourner le Cabeſtan, on tortille dabord le cable un tour ou deux ſur l'arbre, afin que le cable ne puiſſe pas gliſſer, quand on le retient un peu ferme par ſon extrémité. C'eſt le frottement qui l'empéche de gliſſer lorſque l'ancre, ou un autre fardeau à élever, commence à réſiſter; & plus la réſiſtance eſt grande, plus auſſi le frottement du cable, s'il gliſſoit, deviendroit grand.

V I.

Si dans cet étât le Cabeſtan tourne en rond, par la force des Hommes qui conduiſent les leviers; il eſt viſible, que le cable s'entortillant ſucceſſivement ſur le cylindre, & ſe raccourciſſant ainſi, il doit attirer ou élever ce qui lui eſt attaché & qui réſiſte, ſuppoſé que la réſiſtance puiſſe être vaincue; ou bien il faut que le Vaiſſeau s'approche de l'obſtacle où le cable eſt attaché, en cas que cet obſtacle ſoit immobile.

V I I.

C'eſt ainſi que l'ancre, quand elle eſt encore bien éloignée du Vaiſſeau, attire d'abord le Vaiſſeau, par le raccourciſſement

du cable ; juſqu'à ce qu'il réponde preſque à plomb ſur l'ancre : ce n'eſt qu'alors, que la verge de l'ancre ſe redreſſe, ou s'érige en ſituation verticale, & qu'avec elle celui des bras de la croiſée, qui étoit enfoncé en terre, s'en débaraſſe, & tournant la pointe de ſa patte vers en haut, toute l'ancre ſe trouve dans un état convenable, pour être tirée hors du fond de la mer; n'y ayant plus d'autre réſiſtance à vaincre que celle de ſa peſanteur dans l'eau.

V I I I.

On voit bien, que quand le cable eſt fort long, par exemple, de 100 braſſes ou de 600 pieds, il eſt impoſſible de le faire rouler ſur le Cabeſtan, tout d'une ſuite & ſans interruption, par les Conducteurs des leviers ; parce que tous les tours, qui peuvent être contenus ſur l'arbre, s'ils étoient étendus en long, il s'en faudroit beaucoup que leur longueur priſe enſemble n'égalât celle du cable entier. Ainſi quand le cable, par les tours réïterés, eſt parvenu au bout du Cabeſtan ; les Hommes appliqués aux leviers doivent s'arrêter ; il faut relever le cable, & faire pluſieurs autres petites manœuvres, avant que de pouvoir faire une ſeconde opération; laquelle finie, il en faut revenir à une troiſiéme, après les mêmes manœuvres, enſuite à une quatriéme, cinquiéme &c. juſques à ce qu'on ait achevé d'attirer toute la longueur du cable, ou une telle grande partie, que l'on voudra. Or toutes ces pauſes, ces intervalles d'inaction des leviers, ces interruptions, cauſent une perte conſidérable du tems, qu'on pourroit employer utilement, & qui eſt quelquefois néceſſaire pour éviter un danger.

I X.

C'eſt ce qui a occaſionné la Propoſition où on demande *la meilleure conſtruction du* Cabeſtan, *ou telle autre Machine équivalente.* Pour avoir devant les yeux tous les inconvéniens auxquels

auxquels eſt ſujet le Cabeſtan ordinaire, & auxquels on doit trouver des remédes, il eſt bon de raporter ici les propres termes de la Propoſition. „L'Académie, dit-on, ayant eu avis „ par des Perſonnes habiles & expérimentées dans la Navigation, que dans les fréquentes manœuvres, où l'on ſe ſert du „ Cabeſtan, le cordage attaché au poids qu'on veut lever ou „ trainer, ſe dévide ſur l'eſſieu de cette machine, de maniere „ qu'à chaque tour ce cordage deſcend de toute ſa groſſeur, & „ qu'il arrive qu'après pluſieurs tours, il parvient au bout du „ Cabeſtan, & qu'il faut le rehauſſer [ou choquer], pour éviter qu'il ne s'embarraſſe; que par là on ne ſauroit ſe ſervir „ du Cabeſtan, qu'on ne ſoit obligé de choquer pluſieurs fois, „ & qu'à chaque fois qu'on choque il faut arrêter le mouvement „ de la machine, prendre des boſſes [ou treſſes &c.] ſur le „ cordage, dévirer le Cabeſtan, pour mollir [ou lâcher] la „ partie du cordage qui eſt ſur l'eſſieu, relever le cordage, le „ roidir de nouveau, & enfin ôter les boſſes, pour remettre le „ Cabeſtan en état; que cette opération ſouvent repétée emporte beaucoup de tems, & dans pluſieurs rencontres un tems „ précieux, & qu'elle fait toûjours perdre une partie de l'effort „ déja fait: Conſiderant d'ailleurs la liaiſon de la manœuvre du „ Cabeſtan avec celle des ancres, qu'on ne jette ou qu'on ne „ léve que par ſon moyen, l'Académie a réſolu &c.

X.

Ainſi les inconvénients conſiſtent dans les articles ſuivans; 1°. le cordage ou le cable ſe devidant ſur l'eſſieu, ou l'arbre de cette machine, & parvenant, après pluſieurs tours, au bout du Cabeſtan, il doit être *rehauſſé* ou *choqué*, pour éviter qu'il ne s'embarraſſe. 2°. Il faut *choquer* pluſieurs fois, ſelon que le demande la longueur du cable. 3°. A chaque fois qu'on *choque*, il faut arrêter le mouvement de la machine. 4°. Il faut prendre des *boſſes* ou *treſſes*, ſur le cordage. 5°. Il faut dévirer le Cabeſtan, pour *mollir* ou *lâcher* la partie du cordage qui eſt ſur

 l'arbre.

Digitized by Google

l'arbre. 6°. Il faut *relever* le cordage. 7°. Le *roidir* de nouveau. 8°. Il faut enfin *ôter* les *boſſes*, pour remettre le Cabeſtan en état: enſorte qu'il y a en tout huit operations; chacune deſquelles ne demandant qu'une minute de tems, il y auroit plus d'un demi-quart d'heure de perdu, pour toutes les huit opérations enſemble: or il faut repéter ces huit opérations chaque fois que les Conducteurs des leviers ſont obligés de diſcontinuer leur travail.

X I.

Le plus grand inconvénient, qui réſulte de ces inconvénients particuliers pris enſemble, c'eſt la perte du tems, & en certaines rencontres la perte d'un tems précieux, que cauſent toutes ces opérations ſouvent réïtérées; outre qu'elles font perdre une partie de l'effort déja fait.

X I I.

Je remarque d'abord, que du premier des inconvénients mentionnés dépendent tous les autres, enſorte que ſi on trouvoit quelque remède, ou quelque moyen pour empêcher que le cable ne parvienne jamais au bout du Cabeſtan, on voit bien qu'on éviteroit en même tems tout le reſte des inconvéniens; puiſqu'on ſeroit en état de faire tourner le Cabeſtan ſans diſcontinuer, quelque long que fut le cable.

X I I I.

Mais le moyen de prévenir la deſcente du cable ne paroit-il pas impoſſible? D'autant plus qu'à chaque tour qu'il fait ſur l'arbre, il eſt obligé de deſcendre de toute ſa groſſeur en forme d'hélice autour du cylindre; ſi bien que plus le cable a de groſſeur, plus vite il deſcendra juſqu'au bout du Cabeſtan; & par conſéquent il faut plus ſouvent interrompre le virement du Cabeſtan, pour faire les opérations fâcheuſes qui emportent du tems; ce qu'on voudroit éviter.

XIV.

X I V.

Suppoſons, par exemple, que par chaque dix pieds de la longueur du Vaiſſeau, on donne deux pouces & demi d'épaiſſeur au grand Cabeſtan par le haut, ſuivant la pratique ordinaire; enſorte que pour un Vaiſſeau long de 140 pieds, il faudroit que le diamétre de la tête du Cabeſtan, où le cable ſe doit rouler, fût à peu près de 3 pieds & la circonférence de $9\frac{1}{2}$ pieds. Donc à chaque tour il ſe dévide ſur ſon arbre une longueur de $9\frac{1}{2}$ pieds du cable. Or le Maître-cable des grands Vaiſſeaux a en longueur juſqu'à 120 braſſes, ou 720 pieds, ainſi diviſant 720 par $9\frac{1}{2}$, on trouve à fort peu près 76, c'eſt-à-dire, que ſi on vouloit devider ſans interruption toute la longueur de 720 pieds, il faudroit, que la partie cylindrique du Cabeſtan, ſur laquelle ſe dévide le cable, fût ſuffiſamment longue ou haute pour y admettre 76 tours. Par conſéquent cette hauteur devroit être pour le moins égale à l'épaiſſeur du cable priſe 76 fois. Mais un cable, médiocrement gros, peut avoir ſon épaiſſeur ou diamétre de 6 pouces, ou d'un demi pied. Ainſi prennant le demi pied 76 fois, on auroit 38 pieds pour la hauteur de la partie cylindrique du Cabeſtan autour de laquelle s'applique le cable. Si le diamétre du cable étoit de 10 pouces, cette hauteur ſe trouveroit devoir être de plus de 63 pieds; hauteur énorme & partant impoſſible à mettre en pratique.

X V.

Mais comme on ne donne ordinairement à la hauteur de la tête du grand Cabeſtan que $5\frac{1}{2}$ pieds; on trouveroit, en diviſant 38 par $5\frac{1}{2}$, environ 7, qui marqueroient le nombre de fois qu'il faudroit arrêter la machine, pour répéter à chaque fois toutes les opérations mentionnées dans le Programme. Or puiſque [art. 10] ces opérations conſument un demi quart d'heure & plus, en répétant cette perte 7 fois, on voit, qu'il y auroit bien une heure de tems employé, ſeulement aux in-

Digitized by Google

termiſſions du mouvement de la machine ; & cela pour un cable de *6* pouces de diamétre. En faiſant le même calcul pour un cable, dont l'épaiſſeur ou le diamétre eſt de 10 pouces, le reſultat montrera, que le Cabeſtan eſt obligé de demeurer dans l'inaction, près d'une heure & demie en tout.

X V I.

Il eſt aiſé de concevoir, que les durées totales de l'inaction augmentent en raiſon des diamétres croiſſants des cables, ſupposée leur longueur toujours la même. Et réciproquement, plus les diamétres des cables ſont petits, moins auſſi ſeront grandes les pertes du tems conſumé pendant l'inaction totale de la machine. En effet, il eſt évident, ſans que je le diſe, que ſi le cable étoit aſſés menu, pour que toute la longueur de 720 pieds pût être dévidée ſur la hauteur de $5\frac{1}{2}$ pieds de la tête du Cabeſtan, c'eſt-à-dire, que ſi le cable n'étoit quaſi que comme une ficelle de petite épaiſſeur, le mouvement du Cabeſtan pourroit être continué ſans intermiſſion, depuis le commencement du cable juſqu'à ſon bout par ou il eſt amarré à l'ancre, ou à quelque fardeau qu'on veut tirer; parce que la hauteur de la tête du Cabeſtan ſeroit aſſés grande pour y dévider tant de tours du cable, qui étant étendus en long égaleroient toute ſa longueur.

X V I I.

Mais ce ſeroit une fiction faite en l'air, de ſuppoſer des cordes ſi déliées ; puiſqu'il n'eſt pas dans nôtre pouvoir de procurer aux cables telles forces qu'on voudra, pour réſiſter à la rupture, à moins qu'on ne les faſſe d'une juſte groſſeur, que l'expérience ſeule a enſeignée, ſelon les différents uſages qui demandent plus ou moins de force de ténacité dans les cables. Je m'imagine que le moins gros de ceux que l'on employe pour le Cabeſtan, peut avoir deux ou trois pouces de diamétre : encore ceux-là ne ſeroient-ils que pour tirer des fardeaux d'une médio-

Digitized by Google

médiocre réſiſtance, où la rupture d'un tel cable n'eſt pas à craindre. Cependant un cable de 3 pouces d'épaiſſeur, ſuppoſant toujours ſa longueur de 720 pieds, exigeroit déja, ſuivant les art. 15 & 16 une bonne demi-heure, que dureroient les interruptions priſes enſemble, pour faire les opérations, à chaque fois que le Cabeſtan eſt dans l'inaction.

XVIII.

Par toutes ces conſidérations, je me ſuis mis à méditer, s'il n'y auroit pas quelque moyen de remédier aux inconvéniens marqués dans la Propoſition, en faiſant enſorte que les Hommes, qui conduiſent les leviers, n'ayent jamais beſoin de s'arrêter, juſqu'à ce que le cable ſoit entiérement attiré & ramené dans le Vaiſſeau, quelque long qu'il ſoit. C'eſt une entrepriſe, qui paroit d'abord impoſſible; j'ai néanmoins imaginé quelques expédients, qui ſeront ſûrement praticables, pourvû qu'on ne néglige rien dans l'exécution. Je n'expoſerai ici que celui de ces expédiens qui eſt le plus ſimple, & par conſéquent le plus facile à mettre en pratique; d'autant plus, que je me ſervirai du Cabeſtan fait à l'ordinaire, ſans y rien changer; ſinon qu'on y doit faire une petite préparation utile à mon deſſein, & que hors du Cabeſtan, à une diſtance convenable, on doit placer une piéce, ou une machine, que je nommerai le *Preſſoir*, qui tiendra ferme à une poutre, à une parois, ou à quelque autre partie ſolide & inébranlable du Vaiſſeau. Voici en quoi conſiſte cette invention.

XIX.

Deſcription de la maniere d'accommoder le Cabeſtan à pouvoir être tourné continuellement & ſans relache, juſqu'à l'entiére attraction du cable.

Comme les frottemens dans les machines ſont ce qu'il y a de plus nuiſible à l'uſage qu'on en veut faire, puiſque ſouvent la

la plus grande partie de la force eſt conſumée à ſurmonter les frottements; on a cherché les moyens de les éviter, ou au moins de les diminuer, autant que la nature de la machine le permettoit. Ici je ferai le contraire; je tâcherai, pour obtenir mon deſſein de trouver un frottement, qui ſoit inſurmontable par la réſiſtance du fardeau que le cable doit tirer, trainer, ou élever. C'eſt ainſi qu'on tire un profit de ce qui eſt d'ailleurs un grand inconvénient: c'eſt convertir le mal en bien, le poiſon en remède.

X X.

Une corde étant vers ſon milieu roulée autour d'un cylindre, & tirée par deux puiſſances égales appliquées à ſes extrémités; ces puiſſances reſteront ſans doute en équilibre, n'y ayant aucune raiſon pourquoi l'une prévaudra plûtôt que l'autre. Mais l'expérience montre, que ſi l'une de ces deux puiſſances reçoit une petite augmentation, elle ne fera pas d'abord venir l'autre à elle, parce que cela ne ſe peut faire, ſans mouvoir la corde ſur le cylindre & vaincre ainſi le frottement: il faut donc, que cette augmentation de puiſſance ſoit aſſés grande pour ſurmonter le frottement. Or le frottement lui même prend des accroiſſements, à meſure que la corde fait plus de tours ſur le cylindre. C'eſt de-là que nous voyons la raiſon, pourquoi peu d'hommes ſuffiſent pour tenir le bout du cable qui ſe dévide de deſſus le Cabeſtan, pendant qu'une grande partie du cable, qui tire le fardeau de grande réſiſtance vient s'y entortiller.

X X I.

On ſait que, tout le reſte demeurant le même, la réſiſtance du frottement d'une corde roulée autour d'un cylindre, eſt proportionelle au nombre des tours: ainſi trois tours cauſeront un frottement dont la réſiſtance ſera triple de celle cauſée par le frottement d'un ſeul tour. Ceci doit être auſſi entendu des par-

parties d'un tour entier; en ſorte que ſi la corde embraſſe ſeulement, par exemple, la moitié, ou le tiers, ou le quart de la circonférence du cylindre; la réſiſtance, qu'oppoſe le frottement à la force qui tire la corde d'un côté plus que de l'autre, ſera auſſi la moitié, ou le tiers, ou le quart de la réſiſtance, qui réſulte du frottement que produiroit un tour entier de la corde ſur le cylindre.

X X I I.

En donnant d'abord à la corde un tour, ou plus d'un tour; ou même ſeulement plus de la moitié d'un tour; on conçoit bien que les trois parties de la corde, ſavoir celle qui eſt pliée ſur le cylindre, & les deux autres qui ſont hors du cylindre & étendues en lignes droites, ces trois parties, dis-je, ne peuvent plus ſe trouver ſur un même plan; Car l'épaiſſeur de la corde fait que ſa partie pliée ſur le cylindre doit ſe détourner du plan perpendiculaire à l'axe, dès que cette partie devient plus grande que la demi-circonférence du cylindre; étant viſible, qu'en ce cas, les deux autres parties hors du cylindre, étendues en lignes droites, ſe rencontreront & ſe croiſeront; ce qui ne ſauroit ſe faire, ſans que ces deux portions de la corde ſortent du plan ſur lequel elles étoient, en s'écartant l'une de l'autre de toute l'épaiſſeur de la corde [voyés *Fig.* 1]. A plus forte raiſon la corde pliée ſur le cylindre doit s'écarter d'avantage du plan perpendiculaire à l'axe, quand on la roule pluſieurs fois autour du cylindre. C'eſt là préciſément en quoi conſiſte l'inconvénient, qui fait deſcendre le cable juſqu'au bout du Cabeſtan, & qui entraine après cela tant d'autres incommodités, cauſées par les différentes opérations, qui remettent le Cabeſtan dans l'inaction, autant de fois qu'on les repéte.

TAB. LXXXII.

X X I I I.

Mais ſi la corde n'embraſſe que la moitié de la circonférence du cylindre, ou une moindre partie que la moitié [voyés *Fig.* 2

& 3], il eſt clair que, dans ces deux cas, les deux portions de la corde ne ſe croiſeront jamais, quelques longues qu'elles ſoient. Ainſi rien n'empêche que la corde ne puiſſe demeurer conſtamment dans le plan du cercle horizontal, dont elle embraſſe un arc, égal ou plus petit que la demi-circonférence; pendant que le cylindre, tournant ſur ſon axe vertical, feroit avancer la partie poſtérieure de la corde, pour ſuppléer ſucceſſivement à la partie pliée ſur l'arc, à meſure qu'elle le quitteroit par devant, ou s'en détacheroit pour s'étendre en ligne droite avec la partie antérieure. De cette maniere, on conçoit aiſément que le cylindre peut tourner continûment, ou ſans interruption, & faire paſſer toute la corde d'une extrémité à l'autre par deſſus l'arc qu'elle embraſſe.

X X I V.

Il s'agit donc de trouver quelque moyen, qui faſſe enſorte; que quand le cercle tourne ſur ſon centre, il entraine avec lui la corde; afin que toujours une nouvelle portion de la tangente ſoit obligée de ſe plier & de s'appliquer ſur un arc égal, & cela nonobſtant la grande réſiſtance d'un fardeau, qui ſeroit attaché à l'extrémité poſtérieure de la corde, quand même cette réſiſtance ſeroit égale à celle d'un poids à lever de 1000, ou de 2000 livres, ou plus grand. Or c'eſt là la grande difficulté, de rendre la preſſion de la corde, pliée ſur l'arc qu'elle embraſſe, aſſés forte, pour que la circonférence du cercle ne puiſſe couler ou gliſſer de deſſous la corde, & laiſſer ainſi le fardeau en arriére, ſans l'avancer la moindre choſe.

X X V.

Vouloir ici imaginer quelque ciment, colle, ou glu, dont on enduiroit toute la corde, afin que chacune de ſes parties, pliée ſucceſſivement ſur l'arc qui lui répond, lui adhère par ſa ténacité, ſi fermement qu'elle ne puiſſe quitter dans ſes points ceux de l'arc qu'elle touche, pendant le tems que chaque point de

de la corde eſt à parcourir l'arc de la courbure ; vouloir, dis-je, imaginer un tel moyen, ce ſeroit trop donner dans le chimérique : on en voit bien la raiſon ; ainſi je n'y fais point de réflexion. Mais j'ai d'abord penſé, que l'on réuſſiroit peut-être mieux pour la pratique, en faiſant faire une roue aſſés épaiſſe, mobile autour de ſon centre : on feroit, ſur l'épaiſſeur de la circonférence de cette roue, une entaille tout autour, en forme de canelure ou de ſillon, aſſés large & profonde pour y recevoir ou contenir la corde, juſqu'à environ la moitié de ſa groſſeur, ou un peu plus. On garniroit toute la cavité de ce ſillon de pointes de fer, bien courtes, mais très fortes, toutes perpendiculaires à la circonférence ; enſuite on feroit embraſſer à la corde un arc, non plus grand que la demi-circonférence de ce ſillon hériſſé de pointes ; on tiendroit le bout antérieur un peu ferme, quand on commenceroit à tourner la roue.

XXVI.

Il eſt aiſé de concevoir, que dès que la corde attachée à quelque corps qu'on veut attirer, ſe bande par l'oppoſition de la réſiſtance, ſa partie courbée, & appliquée ſur l'arc circulaire du ſillon, commence à preſſer cet arc ; & la preſſion ſera d'autant plus grande, que le corps à mouvoir fait plus de réſiſtance, ou que la corde eſt plus fortement tendue. De-là il arrive, que les pointes de fer du ſillon, ſur leſquelles eſt preſſée la partie pliée de la corde, s'enfoncent dans les petits interſtices de la corde ; ce qui fait que, pendant la circulation du ſillon, chaque pointe enfoncée aide à tranſporter la corde de la partie poſtérieure vers l'antérieure ; & comme par le mouvement circulaire de la roue, il y aura toujours de nouvelles pointes, qui ſe préſentent ſucceſſivement à s'inſinuer dans la corde qui va être preſſée ſur le ſillon, pendant que du côté antérieur tout autant de pointes ſe dégageant permettent à la corde de reprendre ſa ſituation rectiligne, que la force d'un homme, qui la recueilleroit en tirant, affecteroit de lui donner ; il eſt clair, que de cette maniere, la rotation de la roue autour de ſon axe immo-

 bile,

bile, pourroit être perpétuée ſans aucune interruption, & attirer cependant un corps attaché à l'extrémité d'une corde, qui auroit telle longueur que l'on voudroit.

XXVII.

J'ai dit que la preſſion de la corde pliée ſur un arc donné augmente avec l'augmentation de la réſiſtance. Il faut ſavoir, que cette augmentation ſe fait de part & d'autre en même proportion. Car c'eſt une vérité déja démontrée par pluſieurs Perſonnes, que la réſiſtance R eſt à la preſſion P comme le rayon de la roue r eſt à la longeur a de l'arc que la corde embraſſe, c'eſt-à-dire, que $P = \frac{aR}{r}$. D'où l'on voit, que la preſſion deviendra plus grande que la réſiſtance, pourvû qu'on prenne un arc plus long que ſon rayon: ainſi un quart de la circonférence que la corde embraſſeroit, ſeroit plus que ſuffiſant, pour faire que la force de la preſſion ſurmontât celle de la réſiſtance. Je fais cette remarque, ſeulement pour faire ſentir qu'on pourroit fortifier l'engrainement des pointes de fer dans les interſtices des fibres de la corde, juſqu'à tel dégré, que la réſiſtance ne ſeroit peut-être pas capable de rompre les ténacités jointes enſemble de toutes les fibres embrochées par les pointes.

XXVIII.

C'eſt ſur une pareille idée, que feu M. HUGUENS, dans la conſtruction de la premiére Horloge à Pendule de ſon invention, employa une telle roulette en forme de poulie, dont la cavité d'alentour étoit garnie de pointes, deſtinée à porter la corde chargée par un bout d'un poids de 6 livres; lequel poids, ayant un effort continuel pour deſcendre, ne deſcend pas en faiſant gliſſer ou couler précipitamment la corde par deſſus la roulette, comme il le feroit ſans les pointes qui s'engrainent dans la corde; ſi bien que le poids, & avec lui

la

la corde, ne deſcend qu'en faiſant tourner la roulette, qui ménant avec elle la grande roue dentée ſur un axe commun, communique le mouvement à tout le rouage de l'Horloge, juſqu'au balancier réglé par les oſcillations du Pendule; ce qui rend la deſcente du poids fort lente, les pointes enfoncées dans la corde empêchant le poids de ſe précipiter. Voyés ſon *Horologium oſcillatorium* premiere édit. p. 4. Fig. 1. où la roulette garnie de pointes, eſt repréſentée en profil, & marquée par les lettres D D.

X X I X.

On a depuis abandonné cette maniere de former la roulette avec des pointes, & on y a ſubſtitué une autre piéce circulaire, qui fait un effêt équivalent: c'eſt une platine compoſée de deux plaques rondes, jointes enſemble centralement, & qui laiſſent autour de la circonférence un interſtice entr'elles, pour recevoir la corde ſelon ſon épaiſſeur. Cet interſtice va en ſe retréciſſant vers le centre, afin que quand la corde y eſt une fois admiſe dedans, elle ſoit ſerrée & pincée d'avantage par les flancs des deux plaques, lorſque le poids tire la corde. On voit bien, que plus le poids eſt peſant, & mieux la corde s'engagera dans l'interſtice, & en ſera comprimée; ce qui ſert à empêcher qu'elle ne gliſſe par deſſus la demi-circonférence ſupérieure. Mais pour mieux empêcher le gliſſement, les Ouvriers ont ſoin de rendre raboteux les deux flancs de la fente ou de l'interſtice, par des inciſions faites en ſautoir, qui élévent de petites éminences tournées obliquement & à contreſens de la tenſion de la corde; a peu près, comme on rend raboteuſes les ſurfaces des limes. Il n'eſt pas difficile de comprendre la raiſon, pourquoi on a préferé cette façon de roulette à celle de M. HUGUENS: C'a été, ſans doute, pour mieux ménager la corde, laquelle, ſuivant la ſtructure de la roulette à la HUGUENS, ne peut que ſouffrir beaucoup à chaque fois qu'on remonte l'Horloge: car il eſt clair, que c'eſt alors que la corde reçoit bruſquement quantité de piqures de

la part des pointes qui s'y enfoncent, & que bruſquement auſſi les pointes s'en retirent; par où il arrive néceſſairement, que pluſieurs des fibres de la corde ſe déchirent, ne pouvant pas ſe prêter ſubitement à ces actions violentes des pointes. Ainſi la corde s'uſera bien vite; au lieu qu'elle doit ſe conſerver beaucoup plus longtems, la roulette qui porte la corde étant fabriquée à la maniere d'aujourdhui.

XXX.

Cependant je me ſuis d'abord imaginé, que de l'idée de Mr. HUGUENS on pourroit tirer plus d'utilité pour nôtre ſujet en queſtion: Voici comment. Autour du cylindre, ou de l'arbre du Cabeſtan, vertical comme il eſt, on entaillera une cavité, un ſillon, dont le plan ſoit parfaitement horizontal; par conſéquent perpendiculaire à l'axe du cylindre: la profondeur & la largeur du ſillon répondront à la groſſeur du cable, dont on veut ſe ſervir; c'eſt pourquoi ſi on veut en différentes occaſions ſe ſervir de cables de différente groſſeur, on pourra faire différens ſillons tous parallèles les uns aux autres, pour en choiſir celui qui convient au cable dont on veut faire uſage. On revêtira la ſurface de chacune de ſes cavités d'une lame épaiſſe de fer, courbée en telle façon, qu'elle s'ajuſte exactement à la figure concave du ſillon, & qu'elle ſoit garnie de pointes, un peu longues & ſerrées les unes auprès des autres; enſorte que le ſillon en paroiſſe hériſſé en toute ſa circonférence.

XXXI.

Le Cabeſtan étant préparé ainſi, on conçoit que ſi on applique ſur le ſillon une partie du cable priſe vers le bout antérieur, laquelle embraſſe un arc moindre que la demi-circonférence, ou tout au plus égal à la demi-circonférence; on conçoit, dis-je, que dès qu'on fait tourner le Cabeſtan, moyennant les leviers, pendant que quelques hommes tiennent un

peu

peu ferme le bout antérieur ; le cable amarré au fardeau ne ſera pas plûtôt bandé par ſa réſiſtance, que la preſſion fera entrer les pointes dans la partie du cable pliée ſur cet arc, leſquelles par conſéquent entrainent le cable & font ſuivre le fardeau : ce mouvement pourra durer ſans diſcontinuer, juſqu'à ce que le fardeau ſoit entiérement attiré ; pourvû que, pendant cette manœuvre, les hommes, qui doivent recevoir le cable à meſure qu'il ſe remet en ligne droite après avoir paſſé par les pointes, ayent ſoin de lui aider à s'en dégager, en le tirant un peu ; quoique le changement de direction des pointes, cauſé par le tournoyement du Cabeſtan, faſſe que les pointes ſe retirent d'elles-mêmes, ſi elles ne ſont pas trop longues, comme on le voit dans les cordes des Horloges décrites par Mr. HUGUENS, où elles s'engrainent & déſengrainent d'elles mêmes, à chaque fois qu'elles font le demi-tour ſupérieur de leur roulette.

XXXII.

Cette maniére de ſe ſervir du Cabeſtan ſeroit exemte de tous les inconvéniens expoſés dans le Programme ; ſi elle n'étoit pas accompagnée d'un autre inconvénient, dont on ne fait pas mention. C'eſt qu'il ſeroit à craindre que la ſtructure du cable ne ſe corrompit trop vite, en paſſant ſi ſouvent, & avec tant de force, par les pointes ; à peu près comme il arrive au lin qu'on fait paſſer par le Seran, dont l'uſage eſt de diviſer les fibres du lin en pluſieurs filamens ſubtils. Je crois cependant que, vû la différence de l'action du ſillon hériſſé de pointes, qui ne feroient qu'entrainer le cable, & celle des pointes d'un Seran, qui doit fendre par force les fibres, le cable ne laiſſeroit pas de durer & de faire d'aſſés longs ſervices, pourvû que les ficelles, dont il eſt cablé, fuſſent bien tortillées. Outre qu'une longue durée du cable n'eſt pas ce qui devroit le plus être tiré en conſidération ; ſi d'ailleurs il faiſoit l'office ſouhaitté d'éviter les inconvénients marqués, ſur-tout pour les Vaiſſeaux qui appartiennent à un grand Prince, ou à un riche & puiſſant

puiſſant Etat, où on ne regarde pas de ſi près à l'épargne des agrais.

XXXIII.

Quoiqu'il en ſoit, ſi on ne juge pas cette maniere aſſès commode pour être miſe en pratique, à cauſe de la facilité avec laquelle le cable ſe rongeroit & ſeroit mis hors d'uſage; je veux qu'on omette les pointes, & qu'au lieu d'elles on rende la lame de fer, qui recouvre le ſillon, fort raboteuſe en forme de lime, comme je l'ai inſinué ci-deſſus (§. 29.). Il eſt bien évident, que ſi l'âpreté ſeule que rencontre le cable plié & appliqué ſur un arc du ſillon, étoit ſuffiſante pour entrainer le cable chargé d'un fardeau, on auroit l'effet qu'on deſireroit, & le cable ſeroit beaucoup moins ſujet à s'uſer que par la maniere précédente du ſillon garni de pointes. Il faut donc examiner ſi de ce côté là on peut eſpérer un bon ſuccès. On ſait que deux ſurfaces raboteuſes de deux corps, étant appliquées & preſſées l'une ſur l'autre, il faut une certaine force, dans la direction de la ſurface commune où les corps ſe touchent, pour faire mouvoir l'un, qui ſeroit mobile, ſur l'autre, qui ſeroit ſuppoſé immobile: c'eſt le frottement qui cauſe cette difficulté, en réſiſtant au mouvement. On ſait de plus, par les raiſonnemens & les expériences de M. AMONTONS, que la force, requiſe pour ſurmonter le frottement, eſt proportionnelle à la preſſion avec laquelle le corps mobile eſt preſſé contre l'immobile: enſorte, qu'en augmentant aſſès la preſſion, on pourra augmenter le frottement, à tel dégré qu'on voudra; ſuppoſé que tout le reſte demeure le même.

XXXIV.

Or pour appliquer cette Théorie à nôtre ſujet; voyons juſqu'où ira la preſſion que ſouffrira le cable, lorſqu'il embraſſe le plus grand arc du ſillon qu'il peut embraſſer, pour que tout le cable demeure toujours dans un même plan; c'eſt-à-dire, lorſqu'il embraſſe la demi-circonférence du ſillon. Nous avons vû

(§. 27.)

(§. 27.) que la preſſion étant nommée P, la réſiſtance du fardeau à tirer R, la longueur de l'arc du ſillon embraſſé par le cable a, le rayon de la circonférence r; on aura $P = \frac{aR}{r}$. Suppoſé donc que a ſignifie la demi-circonférence, qui eſt au rayon r, ſelon la proportion d'ARCHIMEDE, comme 22 à 7, il en viendra $P = \frac{22}{7} R$; ce qui fait voir que la preſſion de la portion du cable courbée ſur la moitié du ſillon, ſeroit $3\frac{1}{7}$ fois plus grande que la réſiſtance du fardeau qui bande le cable. Donnons, par exemple, à cette réſiſtance une force équivalente à un poids de 2100 livres, comme ſi c'étoit une ancre à tirer du fond de la mer, peſant vingt-un quintaux, ou plus, parce qu'elle perd dans l'eau une partie de ſa peſanteur; nous aurons $\frac{22}{7} R = \frac{22.2100}{7}$ liv. $= 6600$ livres. Ainſi la preſſion du cable, exercée ſur la demi-circonférence, ſeroit équivalente à un poids de *66* quintaux. Cela veut dire, que ſi la portion du cable, qui embraſſe la demi-circonférence, venoit à être étendue en ligne droite horizontale ſur un ſillon pareillement horizontal, & que ce morceau du cable fût chargé d'un poids de *66* quintaux, il en réſulteroit un frottement, pour ſurmonter lequel, il faudroit préciſément la même force, qu'il faudroit à l'ancre, pour reſiſter & pour n'être pas entrainée par le mouvement circulaire du Cabeſtan.

XXXV.

Ce calcul ſuppoſe, que la preſſion du cable ſur le ſillon eſt uniforme dans toute la longueur de l'arc embraſſé par le cable; cependant il eſt clair, qu'elle eſt plus grande du côté du fardeau; qu'elle va enſuite en diminuant juſques à la fin de la courbure, où le cable commence à quitter le ſillon pour reprendre la direction rectiligne; c'eſt là où ſont les Hommes, qui tiennent en tirant le garant, ou le bout du cable qui ſe dévide de deſſus le Cabeſtan. Or ces Hommes n'employent pour tirer qu'une force fort médiocre, par exemple, une force de 300 livres.

vres. Ainſi en appliquant nôtre règle $P = \frac{22}{7} R$, où R ſignifie préſentement la tenſion du cable, ou la force de 300 livres; on trouvera $\frac{22}{7} R = \frac{22 \cdot 300}{7} = 943$ livres, pour la plus petite preſſion, ſi elle étoit uniforme par toute la longueur de l'arc embraſſé par le cable; prenons donc la moyenne arithmétique entre la plus grande preſſion 6600℔ & la plus petite 943℔, nous aurons 3771℔, ou à peu près 38 quintaux. C'eſt le poids eſtimé raiſonnablement, dont on doit ſuppoſer chargée la portion du cable qui embraſſe la demi-circonférence du ſillon, comme étendue en ligne droite horizontale, & couchée ſur un pareil ſillon horizontal, pour que cette charge produiſe à peu près la même force de frottement, que produiroit la preſſion cauſée par la réſiſtance du fardeau ſur le demi-circuit du ſillon.

XXXVI.

C'eſt pourquoi, il eſt à ſavoir, ſi la charge, ou la preſſion de 38 quintaux ſeroit ſuffiſante, pour faire enforte qu'une force de 21 quintaux de réſiſtance du fardeau, moins celle de 3 quintaux, qu'employent les Hommes qui tiennent en tirant le garant en ſens contraire; c'eſt-à-dire, qu'une force de 18 quintaux ne puiſſe pas ſurmonter la force du frottement; car ſi elle la ſurmontoit, on auroit beau virer le Cabeſtan, ſon ſillon ne feroit que couler ſous le cable & laiſſeroit le fardeau en arrière ſans l'entrainer. On penſera, ſans doute, qu'on peut augmenter la *ſcabroſité* du ſillon ou le rendre plus raboteux; puiſque le ſuccès dépend entièrement de cette circonſtance; juſqu'à ce qu'il le ſoit aſſés pour rendre le frottement inſurmontable par la réſiſtance du fardeau. Mais ne retomberions-nous pas dans cet autre inconvénient, que nous voudrions éviter auſſi; qui eſt que par une trop grande âpreté du ſillon, il ſeroit à craindre, que le cable ne fut pas de longue durée; parce qu'il ſeroit rongé trop vite en paſſant ſouvent ſur un ſillon ſi rude, comme nous l'avons remarqué par rapport au ſillon garni de pointes.

XXXVII.

XXXVII.

Pour prévenir donc la promte corruption du cable, je vois bien qu'il eſt abſolument néceſſaire de ne pas rendre le ſillon trop mordant, en le rendant extrêmement raboteux & très rude: mais d'un autre côté, je vois auſſi que, s'il n'eſt que médiocrement rude, il pourra arriver que la ſimple preſſion $\frac{aR}{r}$, qui réſulte par la ſeule courbure du cable, ne ſoit pas aſſez forte pour cauſer ſur le ſillon un frottement, ou plûtôt une diſpoſition au frottement, inſurmontable par la réſiſtance du fardeau; car autrement le Cabeſtan mis en mouvement feroit gliſſer le ſillon ſous le cable, ſans l'entrainer, ſans avancer le fardeau.

XXXVIII.

Le remède à cela ſeroit, ſans doute, de faire enſorte que, quelque douce que ſoit l'âpreté du ſillon, il fut pourtant rendu diſpoſé à un frottement aſſés conſidérable, pour n'être pas ſurmonté par la réſiſtance du fardeau. On obtiendra ce remède en augmentant ſuffiſamment la preſſion $\frac{aR}{r}$ [produite naturellement par la courbure du cable] d'une autre preſſion extérieurement appliquée par quelque artifice. Car M. AMONTONS ayant démontré que la force du frottement eſt proportionnelle à la grandeur de la preſſion; il eſt inconteſtable que la moindre *ſcalroſité* des ſurfaces de deux corps qui ſe touchent, eſt capable de produire une diſpoſition au frottement, qui réſiſtera à une très grande force; pourvû que la preſſion de l'un des corps contre l'autre ſoit auſſi grande qu'il le faut. Mais le moyen d'inventer & d'exécuter une nouvelle preſſion paroit difficile, pour ne pas dire impoſſible; d'autant plus qu'il faudra employer hors du cable quelque corps, quelque machine, qui preſſe fortement l'arc extérieur du cable courbé. Cette machine doit demeurer toujours immobile au même endroit,

par rapport au Vaiſſeau, pendant que le Cabeſtan tourne: ainſi, ſi le cable doit être entrainé, à méſure que le ſillon circule, il eſt viſible que la machine elle même demeurant immobile, cauſera un grand frottement contre le cable; mais un frottement en ſens contraire à celui que l'on veut procurer ſur le ſillon dans la concavité du cable. La force de ce frottement extérieur contraire, provenant de la machine, détruiroit donc une partie de l'effet que devroit produire l'effort augmenté du frottement intérieur du ſillon: On perdroit d'un côté, ce qu'on auroit gagné de l'autre.

XXXIX.

Le ſeul moyen, qui reſte, d'éviter cette incommodité, ſera d'inventer quelque artifice, avec lequel on conſtruira cette machine, que je nommerai *Preſſoir*, qui ne fera que preſſer le cable par dehors, avec tant d'effort que l'on voudra, ſans aucun frottement ſenſible, pendant que le cable coule ſous le Preſſoir, avec le ſillon qui circule. Et c'eſt ce que je me flatte d'avoir trouvé; il ne tient qu'à le mettre en exécution: étant fort ſimple, il plaira par ſa ſimplicité. Voici en quoi il conſiſte.

XL.

TAB. LXXXII. Soit [*Fig. IV.* *] ABC l'arc extérieur du cable plié, & couché juſqu'à la moitié de ſon épaiſſeur dans le creux du ſillon. On fera faire trois ou pluſieurs roulettes bien ſolides, dont les eſſieux D, E, F ſoient ſur un arc DEF concentrique à l'arc ABC, & enchaſſés dans leurs chappes DG, EH, FI, qui tiennent ferme & fixe à une piece de fer LM ſolidement fabriquée:

* La planche qui porte les Figures IV & V, doit être conſiderée comme ſur un plan horizontal, parce que le cercle ABCKYZ repréſente la ſection horizontale & perpendiculaire à l'arbre du Cabeſtan vertical. On a donné à cette ſection une épaiſſeur, pour y repréſenter le ſillon, qui doit admettre dans ſon creux la moitié de la groſſeur du cable.

quée en arc pareillement concentrique avec ABC. On aura la machine appellée le *Preſſoir*, qui venant à être preſſée, avec un effort, autour de l'arc LM, vers le centre, enſorte que l'arc extérieur du cable ABC reçoive cette preſſion, qui ſera communiquée & tranſmiſe juſques ſur le ſillon; il eſt évident, que quand le cable ſe meut avec le ſillon, qui tourne de A en B, de B en C, il ſera tourner auſſi les roulettes autour de leurs eſſieux, en ſens contraire, ſuivant l'ordre des nombres 1, 2, 3, 4. De cette maniere, les roulettes preſſeront le cable ſans aucun frottement; nonobſtant que le corps du Preſſoir demeure toujours au même endroit, & que le cable preſſé aille ſon chemin, ſuivant l'ordre des lettres A, B, C, entrainé, comme il eſt, par le mouvement circulaire du Cabeſtan, que je ſuppoſe ſe faire en ce même ſens de A en B, de B en C, &c. Ainſi, voilà augmentée la preſſion du cable ſur le ſillon, autant qu'il ſuffira, pour rendre le frottement de l'un contre l'autre inſurmontable par la réſiſtance du fardeau, quelque grande que ſoit celle-ci. Car puiſque les accroiſſemens du frottement ſont proportionés à ceux des forces avec leſquelles les corps s'entrefrottans ſont preſſés l'un ſur l'autre; on conçoit aiſément que le frottement, que nous ſouhaittons avoir, peut-être augmenté à l'infini; ſuppoſé que la matiere, ſur laquelle s'applique la preſſion, ſoit aſſés ſolide pour n'être pas ſujette à la rupture.

X L I.

Mais voyons de quelle maniére on peut obtenir & effectuer une telle preſſion appliquée par déhors ſur la piece LM, que j'appelle le *joug* du preſſoir. Je m'imagine, que le plus commode ſeroit d'employer pour cela des vis, un cric, ou une autre machine de cette nature, qui moyennant une force motrice médiocre, qui la fait agir, peut produire une preſſion énorme. Prenons, par exemple, que ce ſoit un cric, fait à l'ordinaire, NP (*Fig. V.*), dont la baſe VP de l'étui;

Nn 3 qui

qui renferme la tige dentée, ſoit appuyée & attachée fortement à une poutre, à une parois, ou à une autre partie ſolide & inébranlable du Vaiſſeau. La tête de la tige T ſoit étendue en arc *lm*, dont la cavité puiſſe être appliquée ſur la convexité du joug LM lorſqu'on fait ſortir la tige en tournant la manivelle X, juſqu'à ce que *lm* vienne ſe joindre ſur LM. Il vaudra peut-être mieux, que d'abord tout le preſſoir tienne ferme à la tête de la tige, en faiſant ſouder l'arc *lm* ſur le joug LM, de ſorte que la tige du cric & le joug ne ſoit que d'une ſeule piece; à laquelle ſi on pratique enſuite les roulettes de la maniére ſuſdite, on aura toute la machine prète à ſervir dans le béſoin.

XLII.

Car ſuppoſé, que le cric ſoit bien appuyé & affermi à ſon lieu fixe & ſolide, où il pourra demeurer pour toûjours; quand on veut le mettre en uſage, il n'y a qu'à faire ſortir la tige de ſon étui, moyennant la manivelle, juſqu'à ce que les roulettes viennent à toucher la convexité du cable plié ſur le ſillon. Enſuite on continuera de tourner la manivelle avec force, plus ou moins, juſqu'à ce qu'il en reſulte une preſſion ſuffiſante ſur le cable, & de celui-ci ſur le ſillon raboteux, qui produiſe entr'eux une diſpoſition à un frottement ſi grand, qu'il devienne invincible par la réſiſtance du fardeau. Le preſſoir parvenu à ce dégré de preſſion, on arrétera la manivelle en la liant ſur l'étui, pour l'empêcher de rebrouſſer, & les Hommes deſtinés à conduire les leviers, commenceront à faire virer le Cabeſtan. Que ſi on s'aperçoit que le cable ne ſe tient pas comme collé ſur le ſillon, depuis A juſqu'en C, pendant que le Cabeſtan tourne en ce ſens; mais qu'il reſte en arriére, ou qu'il ne ſuit pas le mouvement du Cabeſtan avec la même viteſſe; ce ſera une marque que la preſſion n'eſt pas encore aſſés forte, ou qu'elle s'eſt relâchée de ſon intenſité: c'eſt à quoi on remédiera ſur le champ, en avançant un peu la manivelle; car il ne faudra que très peu pour ſerrer beaucoup d'avantage le cable, entre les

les roulettes & le ſil'on. Et de ce ſerrement augmenté dépend l'augmentation néceſſaire de la preſſion, pour procurer au cable la diſpoſition requiſe au frottement, afin de le rendre inſurmontable par l'éffort oppoſé du fardeau. C'eſt dans cette conſidération, que je l'appelle *diſpoſition au frottement*, plûtôt que *frottement* lui même; puiſqu'en effet le frottement ne doit pas ſe faire actuellement: ſans cela, on n'obtiendroit pas le but que nous ſouhaittons; le fardeau reſteroit en arriére, & le Cabeſtan tourneroit en gliſſant ſous le cable ſans l'attirer.

X L I I I.

Suivant cette Théorie l'arc ABC, que l'on veut que le cable embraſſe, pourroit être, à ce qu'il ſemble, une auſſi petite portion que l'on voudra, de toute la circonférence du ſillon; en rendant par récompenſe la preſſion extérieure d'autant plus grande que l'arc ABC eſt pris plus petit. Mais dans la pratique, on rencontre ordinairement des circonſtances, qui exigent des limites à ce que la théorie paroit permettre généralement & dans toute ſon étendue. Ainſi, ici, on pourroit prendre l'arc ABC ſi petit, qu'on ſeroit neceſſité d'employer une preſſion ſi violente, ſi énorme, qu'on ne trouveroit nulle matiere, ni pour le Cabeſtan, ni pour le Preſſoir, ni pour le cric aſſés ferme, ou aſſés ſolide, pour ſoutenir cette grande preſſion, ſans ſe rompre ou ſans ſe deranger. C'eſt donc l'expérience, qui doit aprendre les juſtes bornes. Ce ſont les habiles Ouvriers, qui mettront en exécution ce que l'expérience leur aura enſeigné de plus convenable. Je me contente d'en avoir donné l'idée générale.

X L I V.

Avant que de finir ce petit Diſcours, il eſt bon de répondre à une difficulté qu'on pourroit faire; mais qui n'eſt qu'apparente. C'eſt qu'on penſera peut-être, que cette nouvelle preſſion

preſſion extérieure provenant de la force du cric, que l'on ajoute à celle qui ſe fait naturellement par le cable, quand il eſt plié ſur l'arc du ſillon, augmentera de beaucoup la peine & le travail de ceux qui conduiſent les leviers. Mais ſi on fait attention au point où ces preſſions tendent, on verra que la difficulté ceſſera dans le moment. Car il eſt viſible, que l'une & l'autre de ces preſſions donnent dans tous les points de l'arc ABC du ſillon, perpendiculairement à la circonférence; & partant, que par toute l'étendue de l'arc ABC elles ſont dirigées vers le centre du mouvement circulaire: elles ne reſiſteront donc en rien à l'action des leviers, ſi ce n'eſt en-tant, que le pivot d'en bas & la cheville d'en haut du Cabeſtan en ſouffrent quelque frottement de plus contre la circonférence des trous dans leſquels ils tournent: mais il en influe ſi peu contre la force avec laquelle on conduit les leviers, qu'il ne mérite point de conſidération; ſur-tout ſi les leviers ont une juſte longueur, & que la cheville, auſſi bien que le pivot & la crapaudine ſoient de fer ou de cuivre bien poli & huilé: outre qu'on a aujourd'hui différens moyens, comme on ſait, de diminuer ces petits frottemens. En tout cas, un ou deux Hommes de plus, qu'on appliquera aux leviers, ſeront plus que ſuffiſants pour reparer la perte de force, s'il y en avoit.

X L V.

Une autre difficulté plus eſſentielle, ſeroit la crainte qu'on pourroit avoir, que toute la grande preſſion du cric, venant d'un ſeul côté, & réunie toute entiére ſur le pivot & la cheville, ces deux parties ne fuſſent jamais aſſés ſolides, pour pouvoir ſoutenir un effort ſi énorme, ſans être expoſées au danger de rompre. Cependant je crois qu'on trouvera le moyen de leur procurer toute la ſolidité requiſe. Quoiqu'il en ſoit, on pourra prévenir ce danger, en faiſant faire un autre Preſſoir, muni de ſon cric, ſemblable en tout au premier, & en appliquant ce ſecond Preſſoir ſur les bords du ſillon KYZ, vis à vis &

à

à l'oppoſite du premier Preſſoir ; enſorte que ces deux Preſſoirs antagoniſtes s'oppoſent mutuellement à leurs efforts , pendant que le premier ne laiſſe pas de preſſer le cable de toute ſa force ; il eſt évident que le pivot & la cheville n'en ſouffriront aucune atteinte , & n'auront par conſéquent beſoin d'autre ſolidité , que de celle qui eſt requiſe pour l'uſage ordinaire du Cabeſtan.

XLVI.

Enfin , ce que j'ai dit ſur le frottement du pivot & de la cheville du Cabeſtan , doit être auſſi entendu de celui que ſouffrent les eſſieux , ou goujons des roulettes D , E , F ; puiſqu'il eſt clair , que ces eſſieux ſont preſſés vers le joug LM par l'action du cric , avec autant de force qu'elle preſſe le cable vers le centre du ſillon , la preſſion & la contrepreſſion étant toujours égales , comme le ſont l'action & la réaction , ſuivant le principe général de la méchanique. Il en eſt de même des eſſieux des roulettes du Preſſoir antagoniſte , ſi on trouve à propos d'y en mettre un. C'eſt pour cela , que je n'en dis plus rien , non plus que de cette partie de la force qui eſt employée à plier à tout moment le cable , à meſure qu'il s'en préſente une nouvelle portion prête à ſubir le Preſſoir ; la partie de force employée à cela eſt ſans doute employée en pure perte , par rapport au fardeau à tirer. Or c'eſt un mal général & néceſſaire , auquel eſt ſujet l'uſage du Cabeſtan fait à l'ordinaire , auſſi bien que le nôtre. Ce n'eſt pas à ce mal qu'on demande du remede : il faudroit trouver l'art de faire des cables parfaitement flexibles ; mais on ne trouvera jamais cet art.

FIN.

Digitized by Google

N°. CLXXIII.

S O L U T I O
PROBLEMATIS CATENARII GENERALITER CONCEPTI,

Per Methodum HERMANNI † *ab errore repurgatam.*

PROBLEMA PRÆLIMINARE LEMMATICUM.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. Fig. 1.

Tres potentiæ in A, C, H *ſuſtinent punctum* B *in æquilibrio, agentes ſecundum directiones* BA, BC, BH *poſitione datas: datur potentia in* H; *quæruntur potentiæ in* A & C, *& earum differentia; ſeu, quod tantundem eſt, quæruntur tenſiones filorum, earumque differentiæ?*

SOLUTIO.

Producantur CB & HB, & aſſumtis BA & BD æqualibus, agantur AG & DF perpendiculares in HG, ut & AE perpendicularis in DF. Sit potentia in $H = f$, tenſio fili $BC = t$, tenſio fili $BA = T$. Ex Mechanicis patet $f : t =$ ſinus anguli ABD [qui ſit $= c$] : $\frac{AG}{AB}$. Hinc $t = \frac{f.AG}{c.AB}$. Item $f : T = c : \frac{DF}{AB}$, unde $T = \frac{f.DF}{c.AB}$; adeoque $T - t = \frac{f.(DF - AG)}{c.AB} = \frac{f.DE}{c.AB}$. *Q. E. I.*

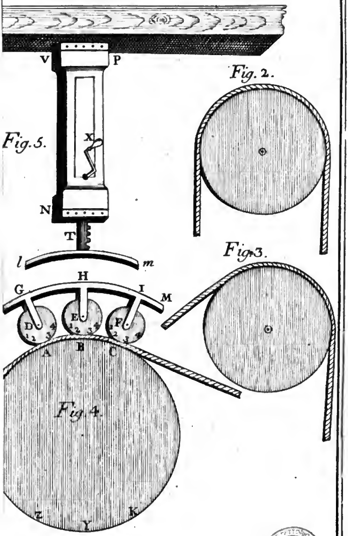
COROLLARIUM.

Si angulus ABD infinite parvus, ita ut arcus AD, centro B deſcriptus, pro recta perpendiculari ad BA & BD haberi poſ-

† *Phoronomia*, Lib. I. Cap. III. & *Append.* §. V.

Digitized by Google

N.° CLXXII.



NAPOLI

Digitized by Google

poſſit; erit [ob BD: BF = AD: DE] $DE = \frac{BF \times AD}{BD}$, quo ſubſtituto in $\frac{f. DE}{c. AB}$, provenit $T - t$ [$= \frac{f. DE}{c. AB}$] $= \frac{f. BF. AD}{c. AB. BD} =$ [ob $c = \frac{AD}{BD}$] $\frac{f. BF}{AB}$.

Applicatio hujus ad figuram Catenariæ.

Quod hic eſt BF, vel BG, ibi eſt Nm, vel dx; AB eſt MN, vel ds; DF vel AG eſt Mm, vel dv; f eſt gds, T repræſentat tenſionem Catenæ in M, t tenſionem in N; adeoque $T - t$ hoc eſt $dt = \frac{gds. dx}{ds} = gdx$; & quia T [$\frac{f DF}{c. AB}$] jam eſt $\frac{gds. dv}{c. ds} = \frac{gdv}{c}$, oportet ut $\int gdx$, ſeu T, vel t, ſit $= \frac{gdv}{c}$, unde $\frac{gdv}{\int gdx} = c =$ [per naturam anguli contactus ut in Prop. ſeqq. oſtendetur] $\frac{-d((a+x). \frac{dv}{ds})}{(a+x). \frac{dx}{ds}}$; multiplicando per dx, & dividendo per dv, erit $\frac{gdx}{\int gdx} = \frac{-d((a+x). \frac{dv}{ds})}{(a+x). \frac{dv}{ds}}$. TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. Fig. 2.

Hic jam utrobique habetur differentiale diviſum per ſuum integrale; adeoque ambo integrantur per Logarithmos, indeque tranſitur ad numeros; & ita habebo [aſſumto aab ad homogeneitatem obſervandam] $\int gdx = \frac{aab}{(a+x). \frac{dv}{ds}}$. Quæ prorſus eſt eadem æquatio ad quam diverſiſſima via in Solutione Problematis ſequentis perveni. Quare reliqua perficiuntur ut ibi. *Q. E. F.*

PROBLEMA.

Sit jam Catena MND *uniformiter craſſa, & gravis verſus centrum* C, *in ratione data quacunque diſtantiarum.*

SOLUTIO.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXII. *Fig.* 2. In ductas tangentes duas infinite propinquas ME, Ne, agantur ex C duæ normales CE, Ce. Et vocentur $CD = a$, $PM = x$, $Nm = dx$, $Mm = dv$, $Pp = dz$, $MN = ds$, gravitas variabilis data lege $= g$. Primo patet angulum FMe eſſe menſuram amplitudinis arculi elementaris MN, ſeu quantitatem anguli contactus in M. Jam, ob triangula ſimilia MNm, CMe, erit $ds : dv = a + x : \frac{(a+x).dv}{ds} =$ CE, & $ds : dx = a + x : \frac{(a+x).dx}{ds} =$ ME. Differentietur CE, non quidem actu, ſed præponendo tantum litteram characteriſticam d, ut tanto commodius pateat, quomodo inſtituenda ſit integratio ut ſuccedat, quem in finem ſcribo $Fe = - d((a+x).\frac{dv}{ds})$; præmitto autem ſignum $-$, quia CM & CE alterne creſcunt vel decreſcunt. Sic ergo angulus FMe ſeu $\frac{Fe}{MF}$ $= \frac{-d((a+x).\frac{dv}{ds})}{(a+x).\frac{dx}{ds}} = c$. Sed ex * Theoremate nuper demonſ-

TAB. LXXXIII. N°. CLXXIII. *Fig.* 3. * Theorema ad cujus demonſtrationem hic provocatur ita demonſtraveram: Curva MND concipiatur ut polygonum infinitilaterum, cujus tria latuſcula ſint MN, NO, OR, quorum puncta N, O trahantur viribus g, γ ad punctum datum C vergentibus; prolongentur lineæ directionum CN, CO ad G, H; & duo latuſcula ON, RO ad S, T; vocentur anguli externi MNS, NOT, qui nihil aliud ſunt quam anguli contactus, vel eorum ſinus, a, α; ſitque ſinus anguli MNG $= b$, ſinus anguli ROH $= \beta$; tenſio fili NO $= t$. Erit, ex Staticis, $a : b = g : t$ & $\alpha : \beta = \gamma : t$, adeoque $\frac{bg}{a} = t = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$; unde $\frac{a}{bg} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$. Dicantur porro ſinus angulorum GNO $= e$, & HON $= \epsilon$. Habetur, ex Trigonometricis, $e : \epsilon =$ CO : CN, proinde $e \times$ CN. $= \epsilon$

monſtrato, oportet $\frac{gds\times(a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2}}{c}$ facere quantitatem conſtantem; quæ homogeneitatis conſervandæ gratia dicatur $=aab$. Et ita, multiplicando per c vel ejus valorem, habetur $gds \times(a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2}=+aab\times\frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)\times\frac{dx}{ds}}$. Nunc ſtatim video, ſi denominator membri poſterioris mutatur in aliquam potentiam quantitatis poſt litteram d poſitæ in numeratore, fore tunc fractionem integrabilem, quod alias non ita facile patuiſſet. Hoc fine ſeparo $\frac{dx}{ds}$ per multiplicationem & divido per $(a+x)\times\frac{dv^2}{ds^2}$. Quo facto, habebo $gdx=aab\times\frac{-d((a+x)\times\frac{dv}{ds})}{(a+x)^2\times\frac{dv^2}{ds^2}}$, quod eſt manifeſte integrabile; integretur ergo, & prodibit $\int gdx=aab\times\frac{1}{(a+x).\frac{dv}{ds}}$, ſeu reducendo

$=\epsilon\times CO$; ex quo fluit $\frac{a}{ebg\times CN}=\frac{\alpha}{\epsilon\beta\gamma\times CO}$. Quoniam itaque eſt uniformis relatiò inter angulos & lineas ad punctum O pertinentes, quæ eſt inter eas ad punctum N pertinentes; oportet ut $\frac{a}{ebg\times CN}$ vel $\frac{\alpha}{\epsilon\beta\gamma\times CO}$ ſit quantitas conſtans per totam curvam. Hinc, cum in ſolutione Problematis ſit a vel $\alpha=c$, e vel $\epsilon=\frac{dv}{ds}$, g vero, vel $\gamma=gds$; & præterea ob angulos MNS vel NOT infinite parvos, cenſeatur ſinus anguli MNG = ſinui ang. ONG, vel ſinus ROH = ſinui NOH, hoc eſt, $b=e$, vel $\beta=\epsilon$; erit utique [invertendo terminos fractionis, & ſcribendo $a+x$ pro CN vel CO] $\frac{\frac{dv^2}{ds}\times gds\times(a+x)}{c}$ = conſtanti. *Q. E. D.*

$(a+x).\,dv.\int g\,dx = aabds$. Porro quia g datur per x, dabitur quoque [ſaltem per quadraturas] $\int g\,dx$; vocetur itaque $\int g\,dx = X$; unde $(a+x)\times X\times dv = aabds$, & $(a+x)^2 \times X^2 \times dv^2 = a^4bb\times ds^2 = a^4bb\times(dx^2+dv^2)$; ſeparatiſque dv & dx, prodibit $\frac{aabdx}{\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}} = dv = \frac{a+x}{a}\,dz$, quare $dz = \frac{a^3bdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times X^2 - a^4bb)}}$. *Q. E. I.*

Corollarium I.

Quod ſi g ſit inverſe ut aliqua potentia diſtantiarum; hoc, eſt, ſi $g = \frac{ac^n}{(a+x)^n}$; adeoque $\int g dx$ ſeu $X = \frac{ac^n}{(1-n)}(a+x)^{1-n}$; abibit formula generalis in hanc,
$dz = \frac{(1-n)\,aabdx}{(a+x)\sqrt{(c^{2n}.(a+x)^{4-2n} - (1-n)^2 aabb)}}$, quæ diverſa eſt ab ea quæ invenitur per Methodum *Hermannianam.*

Corollarium II.

Exiſtente vero $x = 0$, prodit $\int g dx$ ſive $X = \frac{ac^n}{1-n}a^{1-n}$; proinde verus & correctus valor ipſius X, erit $\frac{ac^n}{1-n} \times ((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Quare habebitur correcta formula pro caſu præcedente hæc,

$$dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2\times\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{1-n} - a^{1-n})^2 - aabb)}}$$

$$= \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2}\times((a+x)^{2-n} - a^{1-n}(a+x))^2 - aabb)}}$$

Quia

Digitized by Google

Quia autem in caſu quo a, vel diſtantia centri eſt infinita, videtur aliquid abſurdi provenire, utpote $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{-bb}}$, quod eſt imaginarium; res ita eſt tractanda.

Conjiciatur $(a+x)^{2-n}$ in ſeriem, & habebitur $(a+x)^{2-n} = a^{2-n} + \frac{2-n}{1} a^{1-n} x + \&c$, a qua ſubtrahatur $a^{1-n}.(a+x)$, ſeu $a^{2-n} + a^{1-n}x$; remanebit $(1-n)\,a^{1-n}x$; nam reliqui termini in caſu $a = \infty$ omnes evaneſcunt: adeoque jam erit $dz = \frac{b\,d\,x}{\sqrt{(c^{2n}\,a^{1-2n}xx - bb)}}$; ubi porro ſi arbitraria c ſumatur æqualis a, fiet $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{(xx - bb)}}$, quæ eſt æquatio pro Catenaria vulgari: plane ut fieri debet.

COROLLARIUM III.

Manente diſtantia centri finita, ſi $n = 0$, hoc eſt ſi gravitas g ſit uniformis; qui caſus eſt *Hermannianus* *, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; cujus integratio generaliter non dependet [quantum hactenus notum eſt] ab arcu circulari; proinde curva non erit algebraïca, multo minus Hyperbola, ut perperam invenit HERMANNUS. Hinc ſi $a = \infty$, erit $dz = \frac{b\,dx}{\sqrt{(xx - bb)}}$; iterum pro Catenaria vulgari; ut par eſt.

COROLLARIUM IV.

Si manente iterum diſtantia centri finita, ſit $n = 1$; hoc eſt ſi gravitas g ſit inverſe ut diſtantia; oritur $d\,z = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{oocc}{oo} - aabb)}}$; quod nihil indicat: cui incommodo ut occurratur, animadvertendum eſt, id ex eo venire,

* *Phoronomia*, pag. 46, & 382.

venire, quod in hoc caſu $\int g\,dx$ algebraïce non poſſit integrari, qui caſus per conſequens excipi debet a generali expreſſione $\int g\,dx = X = \frac{ac^n}{(1-n)}((a+x)^{1-n} - a^{1-n})$. Sed integratio inſtituenda eſt per Logarithmos; nempe $g\,dx$ fit $\frac{ac\,dx}{a+x}$, proinde $\int g\,dx = acl(a+x)$, vel correcte $\int g\,dx$, ſeu $X, = acl(a+x) - acla = acl\left(\frac{a+x}{a}\right)$. Quo ſubſtituto in formula univerſali, emergit $dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times (acl\frac{a+x}{a})^2 - a^4 bb)}}$.

COROLLARIUM V.

Sit jam $n = 2$; id eſt, ſit gravitas reciproce in duplicata ratione diſtantiarum, quæ eſt vulgaris hypotheſis; mutabitur formula pro potentiis *Coroll.* 2 exhibita, in hanc $dz = \frac{aabdx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^4xx}{aa} - aabb)}} = \frac{a^3bdx}{(a+x)\sqrt{(c^4xx - a^4bb)}} =$ [aſſumta $cc = ab$] $\frac{aadx}{(a+x)\sqrt{(xx-aa)}} =$ [faciendo $x = t - a$] $\frac{aadt}{t\sqrt{(tt-2at)}}$; id quod eſt integrabile: quod ita perficio. Diviſo utroque termino per tt, habeo $\frac{aadt}{t\sqrt{(tt-2at)}} = \frac{aadt : tt}{\sqrt{(1 - 2a : t)}}$. Jam quia numerator eſt differentiale quantitatis ſigno radicali incluſæ, patet poſſe integrari. Ejus namque integrale eſt $= a\sqrt{(1 - \frac{2a}{t})} = \frac{a\sqrt{(t-2a)}}{\sqrt{t}} = \frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}}$. Unde liquet curvam DNM non habere ſuum verticem in D, ſed ſupra illud in L, ita ut CL ſit dupla ipſius CD. Liquet etiam curvam habere aſymtoton: exiſtente enim x infinita, erit z vel $\frac{a\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x+a)}} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = a$; adeo ut ſumto arcu DP = CD, producta

rec-

recta CP occurrat curvæ non niſi in diſtantia infinita: proinde ejus eſt aſymtotos.

SCHOLIUM.

Si nulla attentione facta ad correctionem valoris ipſius X in *Coroll.* 2 adhibitam, formulæ expreſſionem reddere velimus generaliſſimam; oportet $\int g\,dx$, ſeu X, augere vel minuere data quavis $\frac{ac^n e}{1-n}$; faciendo $X = \frac{ac^n}{1-n}((a+x)^{1-n} + e)$; quo obſervato prodibit

$$dz = \frac{a^3 b\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^2 \times \frac{aac^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{1-n} + e)^2 - a^4 bb)}}$$

$$= \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(\frac{c^{2n}}{(1-n)^2} \times ((a+x)^{2-n} + (a+x)e)^2 - aabb)}}.$$

Hinc in caſu Corollarii tertii, ubi $n = 0$, erit $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{(((a+x)^2 + ea + ex)^2 - aabb)}}$, quæ jam comprehendit Hyperbolam æquilateram HERMANNI; aſſumta nimirum $e = 0$. Fit enim hoc modo $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((a+x)^4 - aabb)}}$; quam æquationem Hyperbolæ convenire demonſtrare poſſumus. Sed hæc eſt unica curva algebraïca, inter infinitas alias non algebraïcas, quæ Problemati *Hermanniano* ſatisfaciunt.

Si aſſumitur $e = -a$, oritur $dz = \frac{aab\,dx}{(a+x)\sqrt{((ax+xx)^2 - aabb)}}$; ut ſupra *Coroll.* 3; ubi Catenariam vulgatem contineri diximus, exiſtente nimirum a infinito.

N°. CLXXIV.

SOLUTIO PROBLEMATIS
Curvaturæ laminæ elaſticæ a pondere appenſo curvatæ.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXIV.

SUpponitur *primo* Lamina ſine pondere; 2°. æqualiter craſſa, vel potius conſideratur ut linea recta in ſtatu naturali; 3°. in ſingulis ſuis punctis æqualiter fortis. 4°. Extenſiones quorumcunque extendentium eſſe in ratione virium extendentium, quæ eſt Hypotheſis *Leibnitiana*. His præſuppoſitis, ſit AB lamina elaſtica horizontaliter in plano AD infixa, & in ſuo ſtatu naturali; AC eadem incurvata a pondere appenſo P. In quocunque curvæ puncto R ducatur tangens RT, & intelligatur curva diviſa in particulas infinite parvas & æquales Aa, Rr. Quoniam nunc pondus P diverſimode vim ſuam exerit in ſingulis curvæ punctis; nimirum in remotioribus majorem, in propioribus minorem, & quidem in ratione diſtantiarum; ſit ut rs perpendicularis in tangentem RT, quæ denotat extenſionem qua particula R removetur per vim ponderis P a ſtatu naturali RS, ſit ad ab extenſionem qua particula Aa removetur a ſtatu naturali Ab, ut vis in R ad vim in A. Eſt autem vis in R ad vim in A, ut diſtantia CL ad diſtantiam CG; ideoque $CL : CG = rs : ab =$ [quia Rr & Aa ponuntur æquales] $rs : Rr + aA : ab =$ [RX, rX, & AF, aF, ſunt lineæ evolventes curvæ ex cujus evolutione generatur curva CRA; proinde ob ſimilitudinem triangulorum rRS, RXr & aAb, AFa] $rR : RX + FA : Aa = FA : RX$. Ergo $CL : CG = FA : RX$; & proinde $CL \times RX = CG \times FA =$ quantitati conſtanti aa. Sit igitur $CL = x$, $LR = y$;

erit,

erit, ut in Calculo integrali inventum eſt *, $RX = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$; ergo $\frac{x(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy} = aa$; multiplicetur utrumque per $-dx^2ddy$, & dividatur per $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, habebitur $xdx = \frac{-aadx^2ddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorum ergo integralia [quorum poſterius invenitur per Regulas in Calculo integralium exhibitas, ponendo $dy = \frac{dx^2}{dm}$, provenit enim quantitas cujus integrale ſtatim patet] $\frac{1}{2}xx = \frac{-aady}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; eorumque quadrata $\frac{1}{4}x^4 = \frac{a^4dy^2}{dx^2+dy^2}$, vel $x^4dx^2 + x^4dy^2 = 4a^4dy^2$, & reducta æquatione, ita ut indeterminatæ ſint ſeparatæ, proveniet $\frac{axxdx}{\sqrt{(4a^4-x^4)}} = ady$. Conſtructio itaque curvæ habetur, mediante quadratura ſpatii, cujus natura exprimitur per hanc æquationem $4a^4zz - x^4zz = aax^4$. Et ſic curva quæſita eſt ex ordine primo mechanicarum.

* N°. CXLIX, Lect. XVI, pag. 417, *Tom III.*

N°. CLXXV.

DE LEGE VIRIUM

Qua fit ut mobile ad centrum deſcendat temporibus quæ ſint ut poteſtates datæ diſtantiarum, a quibus deſcenſum inchoat.

PROBLEMA I.

INvenire legem Virium, quibus mobile in ſingulis locis alicujus recta poſitione data urgeri oportet, ut ad punctum datum in recta ipſa data perveniat temporibus rationem habentibus ut datæ poteſta-

Digitized by Google

tes diſtantiarum a puncto dato; inchoans motum a quiete, in qualibet diſtantia a puncto.

Vel, quod eodem redit,

Invenire qua lege virium mobile ad Centrum virium datum attrahi debeat, ut ad illud, ex quacunque diſtantia motum inchoans, deſcendat temporibus ordinatim datis, ſecundum applicatas alicujus ex genere Parabolarum vel Hyperbolarum ad aſymtoton.

S O L U T I O.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 1 & 2

Eſto C centrum virium; recta AC ſecundum quam mobile ad C trahitur. Curva CTP determinet tempora ordinatim data, ita nempe ut applicata AP deſignet tempus deſcenſus per AC, motu inchoato a quiete in A; & quælibet alia applicata BT exprimat tempus per BC, motu pariter a quiete naſcente in B. Quæritur curva CVR, cujus applicatæ AR, BV explicent vires quibus mobile in ſingulis locis A, B, urgendum eſt.

Sumantur in AC duæ portiones quæcunque AC, αC; quæ ſeparatim poſitæ [*Fig.* 2.] intelligantur diviſæ in particulas infinite parvas totis proportionales, quarum homologæ duæ ſint ex. gr. B*b* & $\beta ϐ$, hoc eſt ut B*b*: $\beta ϐ$ = AC. αC = BC: βC. Sint vero curvæ velocitatum ALM, $\alpha\lambda\mu$, quarum nempe applicatæ BL, $\beta\lambda$ exprimant velocitates acquiſitas in B & β, poſt deſcenſus per AB & $\alpha\beta$. Quod ſi itaque faciamus tempuſcula per particulas homologas B*b* & $\beta ϐ$ ubique proportionalia temporibus per totas AC & αC, hoc eſt [in *Fig.* 1.] ipſis applicatis AP, $\alpha\pi$; habebimus AP : $\alpha\pi = \frac{Bb}{BL} : \frac{\beta ϐ}{\beta\lambda}$ = [ob B*b*: $\beta ϐ$ = AC: αC] $\frac{AC}{BL} : \frac{\alpha C}{\beta\lambda}$; unde BL : $\beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$. Similiter habetur *bl*: $ϐ\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$; adeoque *bl*: $ϐ\lambda$ = BL : $\beta\lambda$; &, ſumendo differentias, erit *d*BL: *d*$\beta\lambda$ = BL : $\beta\lambda$, hoc

eſt

eſt incrementa velocitatum per particulas homologas Bb & βB ſunt ut ipſæ velocitates; unde etiam $BL \times dBL : \beta\lambda \times d\beta\lambda = BL^2 : \beta\lambda^2$; eſt autem [*Fig.* 1.] $BV \times dBT \left[BV \times \frac{Bb}{BL}\right] : \beta u \times d\beta\theta \left[\beta u \times \frac{\beta\theta}{\beta\lambda}\right] = dBL : d\beta\lambda = BL : \beta\lambda$; ideoque $BV : \beta u = \frac{BL^2}{Bb} : \frac{\beta\lambda^2}{\beta\theta} = \frac{BL^2}{AC} : \frac{\beta\lambda^2}{\alpha C} =$ [ob $BL : \beta\lambda = \frac{AC}{AP} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi}$] $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$. Sed ſumtis CB & $C\beta$ æqualibus ipſis CA & $C\alpha$, degenerabunt BV & βu in AR & $\alpha\rho$; erit itaque etiam $AR : \alpha\rho = \frac{AC}{AP^2} \cdot \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$; unde ſi curva data CTP talis ſit, ut abſciſſis quatuor quibuſlibet exiſtentibus proportionalibus [$AC : \alpha C = BC : \beta C$]; etiam $\frac{AC}{AP^2}$ & $\frac{\alpha C}{\alpha\pi^2}$ ſint proportionales ipſis $\frac{BC}{BT^2}$ & $\frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; hoc eſt, ut $\frac{AC}{AP^2} : \frac{\alpha C}{\alpha\pi^2} = \frac{BC}{BT^2} : \frac{\beta C}{\beta\theta^2}$; adeoque [ob $AC : \alpha C = BC : \beta C$] ut ſit $AP : \alpha\pi = BT : \beta\theta$; hæc autem affectio cum competat omni generi Parabolarum & Hyperbolarum ad aſymtoton; manifeſtum eſt legem virium centripetarum hanc eſſe ut AR ſit ubique proportionalis ipſi $\frac{AC}{AP^2}$; adeoque & ipſam curvam AVR eſſe ex Parabolarum vel Hyperbolarum genere.

THEOREMA.

Si diſtantia indeterminata mobilis deſcendentis ex quiete ſumta vocetur x; *tempuſque per eam ſe habeat ut* x^n; *erit vis centripeta ipſi* x *reſpondens ut* $\frac{x}{x^{2n}}$, *ſeu ut* x^{1-2n}.

Hoc patet ex analyſi præcedente: & viciſſim ſynthetice res facillime demonſtrari poteſt.

Digitized by Google

PROBLEMA II.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig.* 3.

Invenire curvam AB, *ita ut mobile deſcendens per quemvis ejus arcum* BA *vi gravitatis ſuæ, incipiens a quiete, impendat tempus quod ſit proportionale datæ cuivis poteſtati altitudinis correſpondentis* AC.

SOLUTIO.

Ex præcedentibus facile habetur. Sit enim $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$; exponens poteſtatis $= n$, vis gravitatis a; erit ergo vis deſcendendi quæ exercetur ſecundum tangentem in quolibet puncto $B = \frac{adx}{ds}$. Quæratur igitur curva AB, cujus portio quælibet AB ſit proportionalis alicui poteſtati abſciſſæ AC, & ita quidem ut $\frac{adx}{ds}$ ſit proportionalis ipſi $\frac{AB}{x^{2n}}$: curva enim AB erit, per præcedentem, ea quæ quæritur. Sit itaque AB ſeu $s = x^m$; adeoque $ds = mx^{m-1}dx$, & $\frac{adx}{ds} = \frac{a}{mx^{m-1}} = \frac{bAB}{x^{2n}} = \frac{bx^m}{x^{2n}}$; unde $ax^{2n} = bmx^{2m-1}$. Ut igitur x utrobique parem habeat dimenſionis numerum, oportet ut $2n = 2m - 1$; ex quo ſequitur m fore $= n + \frac{1}{2}$: invento itaque exponente m poteſtatis m abſciſſæ AC, cui proportionalis eſſe debet arcus AB, quærenda nunc porro eſt relatio coordinatarum AC & CB per viam communem. Quia nempe $s = x^{n+\frac{1}{2}}$, erit $ds = (n+\frac{1}{2})\, x^{n-\frac{1}{2}} dx$, & $ds^2\ [dx^2 + dy^2] = (n+\frac{1}{2})^2 \times x^{2n-1} dx^2$, adeoque $dy^2 = (n+\frac{1}{2})^2 x^{2n-1} dx^2 - dx^2$, & $dy = dx \surd((n+\frac{1}{2})^2 x^{2n-1} - 1)$; vel ad ſupplenda homogenea $(n+\frac{1}{2})\, c^{n-\frac{1}{2}} dy = dx \surd((n+\frac{1}{2})^2 \cdot x^{2n-1} - (n+\frac{1}{2})^2 c^{2n-1})$, hoc eſt $c^{n-\frac{1}{2}} dy = dx \surd(x^{2n-1} - c^{2n-1})$. *Q. E. I.*

COROL-

COROLLARIUM I.

Si $n = 0$, qui caſus eſt tautochronæ *Hugeniana*, provenit $dy = dx \sqrt{(\frac{c-x}{x})}$; æquatio ad Cycloidem.

COROLLARIUM II.

Si $n = 1$, habetur $dy = dx \sqrt{(\frac{x-c}{c})}$; quod cum integrari poſſit; eſt enim $y = \frac{2}{3} \times (x-c) \sqrt{\frac{x-c}{c}}$, ſeu $\frac{2}{3\sqrt{c}}(x-c)^{\frac{3}{2}}$; patet curvam quæſitam eſſe algebraïcam, & quidem Parabolam cubicalem ſecundam; cujus vertex V diſtat ſupra initium abciſſarum A quantitate $AV = c$; parameter vero $= \frac{9}{4}c$, ſeu $\frac{9}{4}$ AV: vel viciſſim, ſi parameter ponatur $= p$, erit $AV = \frac{4}{9}p$. Elegans hujus curvæ proprietas; & mirabilis conſenſus cum Iſochroniſmo *Leibnitiano*, qui eidem curvæ ſed contrario ſitu competit. Notandum tamen deſcenſum per partem VA, utpote qua deficit curva, phyſice eſſe impoſſibilem; quoniam portio curvæ ab V ad A tendens minor eſſe deberet ipſa recta VA. Quod idem accidit omnibus curvis; quarum initium V ſupra A cadit, quotieſcunque nempe $n > \frac{1}{2}$.

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig. 4.*

COROLLARIUM III.

Si $n = \frac{1}{2}$; curva AB abit in lineam rectam; quod aliunde ex Demonſtratis *Galileanis* diu notum eſt.

SOLUTIO ALTERA CLARIOR.

Sit tempus per arcum BA, ex quietis puncto B, ut s^p adeoque s^p ut x^n; unde vis ſecundum tangentem $[\frac{adx}{ds}]$ erit, per præc. ut s^{1-2p}. Ex priori comparatione habetur $s = x^{n:p}$ &

TAB. LXXXIII. N°. CLXXV. *Fig. 3.*

& $ds = \frac{n}{p} x^{(n-p):p} dx$: ex altera vero $s = (\frac{adx}{ds})^{1:(1-2p)}$ = [ſubſtituto valore ipſius ds] $bx^{(p-n):(p-2pp)}$. Ergo, ut dimenſiones ipſius x identificentur, erit $\frac{n}{p} = \frac{p-n}{p-2pp}$; ex quo fluit $p = \frac{2n}{2n+1}$. Jam per viam ordinariam quæratur curva, ita ut $x^n = s^{2n:(2n+1)}$ &c.

N°. CLXXVI.

DE CURVA QUAM DESCRIBIT CORPUS INCLUSUM IN TUBO CIRCULANTE.

L E M M A

Inſerviens Solutioni Problematis ſequentis.

TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig* 1.

SI ex puncto quodam C ducantur tres rectæ CA, CB, CD, reſecantes ex recta PD partes AB, BD, infinite parvas & inter ſe æquales: Erit, ducta CP perpendiculari ad PD, differentia angulorum ACB & BCD, hoc eſt, ACB — BCD $= \frac{2ps\,ds^2}{(pp+ss)^2}$; nominando ſcilicet conſtantem CP $= p$, & variabilem PA $= s$.

Hujus veritas facile demonſtratur: differentietur enim angulus ACB; aſſumta nempe ds pro conſtante: quo facto prodibit prædicta formula.

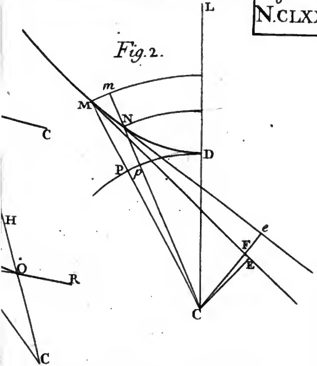
P R O B L E M A.

Determinare curvam, quam deſcribit Corpus incluſum in Tubo, qui in plano horizontali uniformiter movetur, circa aliquem axem in ipſo

Digitized by Google

N°.CLXXIII

Fig.2.





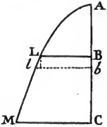


Fig.2.

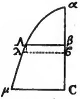


Fig.3.

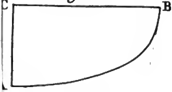
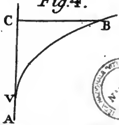


Fig.4.



ipſo tubo ſumtum. Supponitur Corpus in Tubo circulante moveri poſſe liberrime, & ſine ulla frictione.

S o l u t i o.

Sit curva ABE, quam corpus, inſtar puncti conſiderandum, deſcribit durante circulatione tubi CA circa axem fixum C. Sintque variabiles tubi poſitiones CA, CB, CE, quarum longitudines dicantur $= x$, facientes angulos infinite parvos æquales ACB, BCE, qui per conſequens exprimant tempuſcula æqualia, quibus tubi poſitio CA pervenit in poſitionem CB, & hæc in tertiam CE. Fiantque porro, ex centro C & radiis CA, CB, arculi AG, BH, qui more ſolito concipiantur ut rectæ perpendiculares ad CB, CE; erunt BG vel EH $= dx$; dicantur autem AG vel BH $= dy$, & AB vel BE $= ds$. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. *Fig.* 2.

His præmiſſis, nunc ita procedo. Poſtquam corpus percurrit lineolam AB, tempuſculo deſignato per angulum ACB, pergeret moveri, ſi liberum eſſet, in eadem directione, & tempuſculo æquali percurreret aliam particulam BD æqualem præcedenti AB. Sed, quia tubus ſimul cum corpore movetur, occupaturus eodem tempuſculo ſitum CE, qui cum CB facit angulum BCE æqualem angulo ACB; ideoque corpus, quod alioquin eſſet in D, reperietur in E, in æquali diſtantia a centro C; quoniam ſcilicet tubus vim habet propellendi corpus in directione DE normali ad CD, quæ CD facere cenſetur cum CE, angulum DCE infinities minorem angulo BCE, licet hic ipſe ſit infinite parvus.

Ductis igitur duabus tangentibus proximis BP, ER, demiſſiſque in illas ex centro C normalibus CP, CR; habebitur, vi Lemmatis, differentia angulorum ACB & BCD; quando nempe in formula $\frac{2p\,s\,ds^2}{(pp+ss)^2}$, ſubſtituitur $\frac{xdy}{ds}$ pro p, & $\frac{xdx}{ds}$ pro s; prodibit enim BCA $-$ BCD $= \frac{2dydx}{xx}$.

Jam vero concipiendo DF parallelam ipſi CP vel CR;

Digitized by Google

evidens eſt fore $\frac{DF}{ds}$ ſeu $\frac{DF}{BD} = \frac{RQ}{QB} = \frac{d(xdy:ds)}{xdx:ds}$; unde $DF = \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{xdx}$.

Item, propter triangula ſimilia hDB, FDE, erit $dx:ds = DF:DE$; proinde $DE = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xdx^2}$, & $\frac{DE}{CE} = \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2}$ = menſuræ anguli DCE. Eſt autem DCE differentia inter angulos BCE & BCD, ſeu inter ACB & BCD, quæ, per Lemma noſtrum, $= \frac{2dydx}{xx}$. Hinc lucramur hanc æquationem $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{xxdx^2} = \frac{2dydx}{xx}$, ſeu $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$.

Præterea, ex conditione Problematis, cum ſint anguli ACB, BCE, &c. omnes inter ſe æquales; erunt deſcripto circulo KO, centro C & radio arbitrario $CM = a$, omnes arculi MN, NO, &c. æquales, utpote menſuræ illorum angulorum: Dicatur ergo unuſquiſque arculus $= dz$, unde $a:x = dz:dy$; adeoque $dy = \frac{xdz}{a}$, quo valore ſubſtituto in æquatione $ds^3 d(xdy:ds) = 2dydx^3$, emergit hæc altera $ds^3 d(xxdz:ds) = 2xdx^3 dz$, vel, deleto utrobique dz conſtanti, hæc $ds^3 d(xx:ds) = 2xdx^3$; quæ differentiando actualiter $xx:ds$, & tum dividendo per x, hanc præbet æquationem $2dxds^2 - xdsdds = 2dx^3$. Porro pro ds^2 & pro $dsdds$ ſubſtituantur eorum valores $dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{xxdz^2}{aa}$ & $dxddx + \frac{xdxdz^2}{aa}$; quo facto, reſultabit $2dx^3 + \frac{2xxdxdz^2}{aa} - xdxddx - \frac{xxdxdz^2}{aa} = 2dx^3$; quæ reducta, dat hanc ſimplicem æquationem, & quidem integrabilem, $xdxdz^2 = aadxddx$. Integretur ergo, obſervando debitam rectificationem, & habebitur $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$.

Notetur intelligi per b corporis diſtantiam initialem, ſeu minimam a centro C; ubi ſcilicet corpus incipit moveri in directione perpendiculari ad tubum; ita ut initiale incrementum

dx

dx hujus diſtantiæ, pro nihilo ſit cenſendum, reſpectu ſubſequentium dx. Ob hanc rationem, rectificationis gratia, ſcribendum fuit $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$, eum in finem ut utrumque æquationis membrum ſimul evadat $= 0$, ab initio, nempe, ubi $x = b$, & $dx = 0$.

Cæterum æquatio inventa $xxdz^2 - bbdz^2 = aadx^2$ nobis dat $dz = \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}}$, ſeu $z = \int \frac{adx}{\sqrt{(xx - bb)}} = a \times \log. (x + \sqrt{(xx - bb)})$, & ita habebimus z datum per logarithmum functionis in x expreſſæ. Quod ſi vero lubeat habere valorem ipſius x datum per functionem aliquam ipſius z; ponamus c eſſe talem numerum ut ſit $lc = 1$; erit per naturam logarithmorum $c^{z:a} = x + \sqrt{(xx - bb)}$, vel $c^{z:a} - x = \sqrt{(xx - bb)}$; unde elicietur $x = \frac{1}{2} c^{z:a} + \frac{1}{2} bbc^{-z:a}$ = [aſſumpta b pro unitate] $\frac{1}{2}(c^{z:a} + c^{-z:a})$.

CONSTRUCTIO CURVÆ.

Ponamus CKT eſſe poſitionem initialem tubi circulantis circa centrum C, & ex puncto K, corpus incipere motum ſuum in curva KBE; quæ eſt determinanda. TAB. LXXXIV. N°. CLXXVI. Fig. 3.

Quod ut commodiſſime fiat, deſcribatur, centro C & radio CK, circulus KMN; tranſeatque per K Logarithmica Spiralis ſemi-rectangula hg KGH. Capiantur ab utraque parte rectæ CK duo arcus æquales KM, Km, & per puncta M, m, ductæ ex centro C rectæ CM, Cm ſecent Spiralem in punctis G, g. Producatur CG ad L ita ut GL ſit = Cg: Denique biſariam ſecetur CL in B: Dico fore B in curva deſiderata KBE. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Evidens eſt $\frac{z}{a}$ denotare menſuram anguli TCB, quem

Qq 2 quæ-

quælibet poſitio tubi CB facit cum poſitione ejuſdem initiali CT: cum vero angulus TCB idem ſit cum angulo KCM, erit radius a longitudinis arbitrariæ: ſumatur ergo ille $= b = 1$; ipſeque arcus KM $= z$; quo facto, exprimetur CB, vel $x = \frac{1}{2}c^{z} + \frac{1}{2}c^{-z} = \frac{1}{2}(c^{z} + c^{-z})$. Eſt autem ex natura Spiralis Logarithmicæ ſemirectangulæ $CG = c^{z}$, & $Cg = c^{-z}$; adeoque CG + Cg, id eſt, $CL = c^{z} + c^{-z}$, hujuſque dimidium, id eſt, $CB = \frac{1}{2}(c^{z} + c^{-z})$. *Q. E. D.*

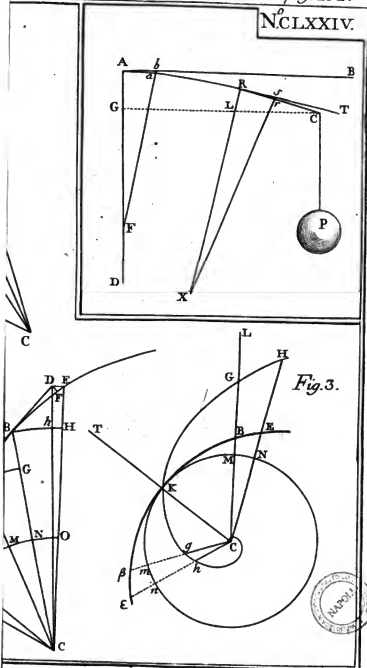
Corollarium I.

Quod ſi arcus uterque KM, Km decreſcendo ultra punctum K loca ſua inter ſe permutent, ita ut M perveniat in m, & m in M; patet utique punctum β analogum ipſi B, & hoc ipſum B, æqualiter diſtare a centro C, & ſub æqualibus angulis $KC\beta$, KCB. Unde ſequitur ramos ambos curvæ $K\beta$, KB ſibi invicem ſimiles eſſe & æquales.

Corollarium II.

Diſtantia CK initialis a centro C eſt omnium diſtantiarum CB vel $C\beta$ minima; proinde tota curva $\epsilon\beta$KBE cadit extra circumferentiam MBm, quam tangit in ſolo puncto K. Res eſt clara, quia nempe tres rectæ Cg, CK, CB ſunt continue geometrice proportionales, per naturam Logarithmicæ Spiralis; & media proportionalis ſemper minor eſt ſemiſumma extremarum: Ergo &c.

PRO-



NAPOLI
Digitized by Google

Digitized by Google

N°. CLXXVII.

PROPOSITIONES VARIÆ MECHANICO-DYNAMICÆ.

I.

SIT corpus quodcunque, vel planum tantum materiale ABCD, in quod agat potentia P, trahendo vel pellendo in directione PR, ex. gr. ope fili, quod in R alligatum eſſet, & potentia quædam in P applicata ageret in planum AC, ſecundum fili directionem: dico eodem modo, eademque vi attractum iri AC, ſi, ſoluto nodo alligationis R, alligetur filum in quovis alio puncto S vel T; dummodo ſumatur illud punctum in eodem filo PR, ſive prolongato, ſive decurtato. TAB. LXXXV. *Fig.* 1.

Res eſt per ſe clara, & inſtar Axiomatis habenda; quia longitudines directionum virium, ſeu potentiarum, nihil mutant in effectu.

II.

De compoſitione & reſolutione virium.

Duæ vires, vel potentiæ, in commune punctum P agentes; quarum directiones & intenſitates deſignentur per rectas PA & PB, dicuntur ***componi***, ſi, iis remotis, ſubſtituitur vis tertia C, quæ ſola eodem niſu vel conatu agit in P, ſecundum directionem PC, quo antea egerant ſimul duæ A & B. Atque viciſſim, potentia C, expreſſa per rectam PC, ***reſolvi*** vel ***decomponi*** dicitur in duas PA & PB, quæ, remota priori, eun- TAB. LXXXV. *Fig.* 2.

 dem

dem niſum exerunt in punctum P, in directione PC, quam fecerat ſola potentia PC.

I I I.

T A B. LXXXV. *Fig. 3.* Sint jam tres potentiæ A, B, & D, repræſentatæ per rectas PA, PB, PD, agentes in punctum P mobile in omnes plagas, quod in æquilibrio ſervetur a tribus iſtis potentiis ſimul agentibus; liquet, ex præcedenti Definitione, unamquamque ex iſtis tribus potentiis æqualem eſſe & directe oppoſitam ei, quæ ex reliquis duabus componitur. Finge enim duas quaſcunque, ex. gr. PA & PB removeri, earumque loco ſubſtitui æquipollentem PC, quæ utique ſola reſiſtet potentiæ tertiæ PD, & ambæ punctum P in æquilibrio retinere pergent; adeoque in directum erunt poſitæ, & altera alteri æqualis erit.

I V.

T A B. LXXXV. *Fig. 4.* Duo demonſtranda jam ſunt, 1°. Potentiam PC, compoſitam, in ſenſu prædicto, ex potentiis PA & PB, eum habere ſitum, ut PA ſit ad PB ſicuti ſinus anguli BPC ad ſinum anguli APC; ſeu ut ſinus anguli BPD ad ſinum anguli APD. 2°. Completo parallelogrammo, cujus latera ſint PA, PB, fore ejus parallelogrammi diagonalem ipſiſſimam PC; quæ & ſitum & quantitatem potentiæ compoſitæ deſignabit.

Demonſtrationem utriuſque ex natura & proprietate vectis deduco, hunc in modum. Directiones potentiarum PA, PB, & PD, vel PC, quæ utique in communi plano jacebunt, facient ut hoc ipſum planum maneat immotum, etiamſi ſollicitatum in tres diverſas plagas a P verſus D, a P verſus A, & a P verſus B. Ductis duabus perpendicularibus CE, CF in latera PA, PB, ſi opus, prolongata; ſolvatur nodus P, & transferatur potentia A ad punctum E, potentia B ad punctum F, & potentia D ad punctum C, ſervatis nimirum priſtinis ſuis directionibus. Liquet, ex §. 1, planum etiamnum in æquilibrio manſurum; atque ſic conſiderari poteſt ECF tanquam

quam vectis inflexus, ubi potentia D, ad C applicanda, vicem ſubit hypomochlii ſuſtinentis duas reliquas potentias applicatas perpendiculariter ad extremitates brachiorum E & F. Adeoque, ex natura vectis in æquilibrio exiſtentis, erit potentia A ad potentiam B, hoc eſt, potentia E ad potentiam F, ut longitudo brachii CF ad longitudinem brachii CE. Eſt vero [ſumta PC pro radio, ſeu ſinu toto] ſinus anguli CPF ad ſinum anguli CPE, ut CF ad CE, ſeu [ob ſimilitudinem triangulorum CBF, CAE] ut CB ad CA, hoc eſt ut PA ad PB. Unde ſequitur directionem potentiæ compoſitæ ita ſecare angulum quem faciunt directiones componentium, ut potentiæ componentes ſint in ratione ſinuum angulorum partialium alternatim ſumtorum; atque adeo directionem potentiæ compoſitæ coincidere cum diagonali parallelogrammi, cujus latera proportionalia ſunt potentiis componentibus. Hæc prima pars eſt aſſerti, de ſitu directionis potentiæ compoſitæ.

Altera pars demonſtranda reſtat; nimirum ſi latera parallelogrammi deſignent potentias ipſas componentes, fore ut ejuſdem diagonalis longitudo deſignet quoque potentiæ compoſitæ quantitatem, ſeu intenſitatem. Sint igitur tres potentiæ A, B, D, punctum P ſollicitantes, illudque in æquilibrio ſervantes; ſintque ipſæ expreſſæ per longitudines rectarum PA, PB, PD. Quemadmodum itaque potentia PD, in directionem oppoſitam PC verſa, dicitur compoſita ex potentiis PA & PB, ita eodem ſenſu, qualibet alia PA prolongata in PG æqualem & oppoſitam, hæc ipſa PG exprimet potentiam compoſitam ex potentiis PB & PD. Quare hic etiam, erit potentia PB ad potentiam PD, ut ſinus anguli DPG ad ſinum BPG; hoc eſt, ut ſinus anguli CPA ad ſinum anguli CAP, ſeu ut CA, vel PB, ad PC; unde longitudo PB ad longitudinem PC, ut potentia PB ad potentiam PD. Ergo etiam PC exprimet potentiam PD, cui æqualis & oppoſita eſt illa quæ ex PA & PB componitur. *Q. E. D.* TAB. LXXXV. Fig. 5.

V.

Digitized by Google

V.

Scholium.

Peccant, qui confundunt compoſitionem virium cum compoſitione motuum. Vis enim, vel potentia, utpote conſiſtens in ſolo niſu, vel conatu, ad motum generandum, nullam ſane velocitatem actualem [ne minimam quidem] producit, ſi corpus in quod agit eſt immobile. Ubi perfectum eſt æquilibrium, ibi nullus adeſt motus. Quî ergo conſiderari poſſit motus, in æquilibrii natura explicanda, non video. ARCHIMEDES, aliique ex Veteribus, ad vectis indolem recurrerunt, ut phænomena gravitationum ſe mutuo in æquilibrio vel quiete retinentium demonſtrarent. Nos, eorum exemplum ſecuti, idem fecimus, dum potentiarum compoſitionem ad vectis leges, utpote a longo adeo tempore demonſtratas atque receptas, reduximus; rejecto nempe explicandi modo recentiorum Geometrarum, ut CARTESII, STEVINI, NEWTONI, VARIGNONII, HERMANNI, aliorumque, qui velocitatem, ſaltem initialem, in auxilium vocarunt, ad principii elegantiſſimi veritatem ſtabiliendam; ubi tamen nulla prorſus adeſt velocitas, nequidem infinite parva. Quæritur enim, cur tres potentiæ A, B, D, commune punctum D ſollicitantes, ea qua dictum eſt conditione, perfectum inter ſe ſervent æquilibrium? Quomodo igitur introduci poſſit ulla velocitas, ubi perfecta adeſt quies, non video.

V I.

De viribus motricibus ad vectem applicatis.

TAB. LXXXV. *Fig. 6.* Sit rigida recta, tanquam vectis conſiderata, mobilis circa punctum fixum C; vehatque ſecum, dum rotatur circa C, corpus aliquod datum *B* in loco dato rectæ rigidæ AC, quod ſit gravitatis expers. Ad punctum A quodvis in vecte, applicet

cetur vis motrix $= m$, agens in vectem ſecundum directionem normalem DA. Quæritur vis acceleratrix, quam a vi motrice m acquiret corpus B in arculo Bb?

S o l u t i o.

Dicatur CA $= p$, & CB $= q$. Jam ſi corpus B eſſet in ipſo loco A, ubi vis motrix applicatur, hoc eſt, ſi $q = p$, foret, per vulgarem Legem Dynamicam, vis acceleratrix abſoluta $= \frac{m}{B}$, qua cum deſcriberet rotando arculum Aa. Sed ſi diſtantia CB a centro rotationis C major minorve eſt quam diſtantia CA; oportet ſumere, ex natura vectis, momentum, quod habebit vis motrix m in loco vectis B, & quod erit $\frac{pm}{q}$; faciendo ſcilicet $q : p = m : \frac{pm}{q}$; atque ſic $\frac{pm}{q}$ erit vis motrix, qua corpus B immediate urgeri intelligitur; quare dividendo per maſſam B, habebitur $\frac{pm}{qB} =$ vi acceleratrici abſolutæ corporis B, qua deſcribit arculum Bb.

C o r o l l a r i u m.

Dividendo porro inventam vim acceleratricem abſolutam $\frac{pm}{qB}$ per diſtantiam CB, ſeu per q, habebitur vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{qqB}$, qua nimirum angulus BCb creſcendo ampliatur. Mutatis diſtantia CB & maſſa B, ita ut illa jam ſit $= r$, hæc vero $= E$; erit utique vis acceleratrix angularis $= \frac{pm}{rrE}$. Quod ſi ergo hæ duæ vires acceleratrices angulares debeant eſſe æquales, oportet ut ſit $\frac{pm}{qqB} = \frac{pm}{rrE}$, adeoque $qqB = rrE$; hoc eſt, maſſæ B & E debent eſſe reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a centro rotationis.

Digitized by Google

Dico itaque eandem vim motricem requiri in puncto A applicandam, ad id ut angulus A C *a* eadem acquirat incrementa, quocunque in loco locetur corpus *B*; modo ejus maſſa ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ſuæ a centro circulationis C.

V I I.

T A B. LXXXV. *Fig.* 7. Sit nunc vectis C A mobilis circa centrum C, & oneratus pluribus corporibus *B*, *E*, *F* &c. quamcunque rationem inter ſe habentibus, & in quibuſcunque diſtantiis C B, C E, C F &c. poſitis. Vis motrix autem *m* applicata in A, ſecundum directionem D A, ſit ea, ut in dato tempuſculo vectem A C promoveat ex ſitu A C in ſitum *a* C, hoc eſt, ut angulus A C *a* ſit vis acceleratrix angularis. Dico, ſi ſublatis corporibus *B*, *E*, *F* &c. alia totidem ſubſtituantur in puncto A locanda, & quidem $\frac{CB^2}{AC^2} \times B$ pro *B*, $\frac{CE^2}{AC^2} \times E$ pro *E*, $\frac{CF^2}{AC^2} \times F$ pro *F*, &c. Dico, inquam, eandem vim motricem *m* imprimere toti maſſæ collectæ $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$ ſimilem vim acceleratricem angularem A C *a*; ita ut, eodem dato tempuſculo, vectis ex ſitu A C veniat in ſitum *a* C.

Veritas hujus patet ex præcedenti; cum enim eadem vis requiratur in A, ad pellendum corpus *B* per B *b*, quæ requiritur ad pellendum corpus $\frac{CB^2 \times B}{AC^2}$, in A locatum, per A *a*, in eodem tempuſculo; vocetur illa vis α: & vis alia in A requiritur eadem, ad pellendum corpus *E* per E *e*, quæ requiritur ad pellendum $\frac{CE^2 \times E}{AC^2}$, in A locatum, per A *a*; vocetur illa vis β: itemque etiam alia vis in A requiritur eadem, ad propellendum corpus *F* per F *f*, qua opus eſt ad propellendum corpus $\frac{CF^2 \times F}{AC^2}$, in A locatum, per A *a*, quæ vis dicatur γ; omnes itaque vires $\alpha + \beta + \gamma$ vocari poſſunt *m*. Ergo &c.

Idem

VIII.

Idem quoque valet de vecte plurium brachiorum, quorum unumquodque ſuum peculiare corpus, ſine gravitate conſideratum, in extremitate alligatum habeat. Ut ſi circa punctum C moveatur vectis CA, in communi plano cum brachiis CB, CE, CF &c. onuſtis corporibus *B*, *E*, *F*, &c. ac angulos invariabiles ACB, ACE, ACF &c. facientibus, adeo ut cum CA transfertur in C*a*, veniant quoque brachia CB in C*b*, CE in C*e*, CF in C*f*, &c. ſub angulis BC*b*, EC*e*, FC*f*, &c. ſingulis æqualibus angulo AC*a*. Conſtat utique, ex natura vectis, vim motricem *m*, in A applicatam, haud aliter agere in corpora *B*, *E*, *F*, &c. quam ſi illa eſſent omnia alligata in ipſa recta AC in diſtantiis reſpective æqualibus ipſis CB, CE, CF. Ac proinde nunc etiam vis motrix *m* toti Syſtemati corporum eandem vim acceleratricem angularem circa centrum C imprimit, quam imprimeret unico corpori in A locando, quod eſſet æquale $\frac{CB^2 \times B + CE^2 \times E + CF^2 \times F, \&c.}{AC^2}$. Etenim in corporibus *B*, *E*, *F*, &c. gravitatis expertibus, nulla alia vis reſiſtens concipitur, quam quæ ab eorum inertia oritur. Hæc autem ſemper agit in oppoſita tendentia ad motum, hoc eſt, corpora *B*, *E*, *F*, &c. reſiſtunt per inertiam ſuam in directionibus *b*B, *e*E, *f*F, &c. normalibus ad CB, CE, CF; eodem prorſus modo ac ſi ſingula corpora exiſterent in ipſo vecte AC ad æquales a puncto fixo C diſtantias CB, CE, CF. TAB. LXXXV. *Fig.* 8.

IX.

Hinc nova deducitur Theoria pro determinatione Centri oſcillationis, quæ elegans eſt, & maxime genuina. Finge in plano verticali lateraliter oſcillanti circa punctum ſuſpenſionis C [ad hunc namque modum oſcillandi omnium figurarum corporearum oſcillationes reduci poſſunt;] finge, inquam, plura corpuſcula gravia *B*, *E*, *F* &c. invariabilem inter ſe ſitum haben- TAB. LXXXV. *Fig.* 9.

tia, in hoc plano ſimul oſculari circa punctum C. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod ſit iſochronum oſcillationibus Syſtematis corpuſculorum *B*, *E*, *F* &c?

Per centrum gravitatis A totius Syſtematis ducatur & producatur recta CA, atque etiam agantur rectæ AB, AE, AF, &c. quæ conſiderentur tanquam totidem brachia vectis principalis CA, ita ut ſi tantillum dimoveatur ex ſitu verticali ad intervallum AD, ille mox poſtea ſibi relictus a pondere Syſtematis incipiat oſcillari.

Dicatur gravitas naturalis g, qua animantur corpora B, E, F, &c. adeo ut eorum pondera ſint gB, gE, gF, &c. totiuſque Syſtematis pondus $= g(B+E+F$ &c.$)$ = [nominando M totam maſſam corporum] gM. Separemus jam, in cogitatione noſtra, gravitationes a corporibus, ita ut nihil in ipſis remaneat, præter propriam ſingulorum inertiam, & loco ablatarum virium gravitantium collecta concipiatur in centro gravitatis vis motrix immaterialis æquivalens gM: conſtat utique, ex natura Centri gravitatis, Syſtema corporum non gravium B, E, F, &c. eodem modo ad deſcenſum animari a vi motrice collecta gM, quo modo junctim deſcendunt propriis ſuis ponderibus gB, gE, gF, &c. Tollamus nunc quoque corpora ipſa, & ſubſtituamus pro B corpus aliud in A locandum, quod ſit $=\frac{AB^2\times B}{CA^2}$; aliudque pro E, quod ſit $=\frac{AE^2\times E}{CA^2}$, ut & aliud pro F, quod pariter ſit $=\frac{AF^2\times F}{CA^2}$ &c. Ergo per §. preced. hæc nova corpora collecta in puncto A, in unam coeunt maſſam $=\frac{AB^2\times B+AE^2\times E+AF^2\times F\text{ \&c.}}{CA^2}$, quæ igitur eandem acquirit vim acceleratricem angularem circa punctum C, quam habet ipſum Syſtema corporum ſeparatorum.

Iſta autem vis acceleratrix reperitur dividendo vim motricem gM ſeu $g(B+E+F$, &c.$)$, per maſſam concentratam [quam imme-

immediate ſollicitat] $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F \&c}{CA^2}$. Quo facto habebitur vis acceleratrix $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. En itaque Syſtema oſcillans corporum ſeparatorum $B+E+F$ &c. reductum ad Pendulum ſimplex iſochronum longitudinis C A, ſed quod animatur vi acceleratrice $= \frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$. Dudum vero conſtat [quod & ego demonſtravi in *Actis Lipſ.* 1713, p. 79 *] duo Pendula ſimplicia a diverſis viribus acceleratricibus agitata fore iſochrona, quando eorum longitudines ipſis his viribus quibus animantur ſunt proportionales. Inſtituendo proin hanc analogiam; Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{g(B+E+F\&c.) \times CA^2}{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}$ ad vim acceleratricem naturalem g; hoc eſt, ut $(B+E+F\&c.) \times CA^2$ ad $AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F$ &c. ita erit C A ad quartam $\frac{AB^2 \times B + AE^2 \times E + AF^2 \times F\&c.}{(B+E+F\&c.) \times CA}$, cui ſi æqualis ſumatur C O, prodibit hæc ipſa C O æqualis longitudini Penduli ſimplicis naturalis, & iſochroni Pendulo compoſito Syſtematis oſcillantis $B+E+F+$&c. Id quod omnino conforme eſt Regulæ *Hugenianæ*, quamvis elicitæ ex principio indirecto, fundato in æqualitate deſcenſus & aſcenſus communis centri gravitatis, quod redit ad ſuppoſitionem Conſervationis virium vivarum; Conferantur quæ dedi in *Actis Lipſ.* 1714 †, ad uberiorem hujus Regulæ confirmationem, ex fonte maxime genuino atque directo petita; quamquam per methodum ab hac quam hic aperui longe diverſam; haud ingratum fore ratus, ſi eadem veritas ſub multiplici habitu expoſita ſibi ſemper tam pulchre conſtare comperiretur.

* N°. XC. pag. 518, *Tom. I.* † N°. XCVI, pag. 168, *Tom. II.*

X.

De communicatione motus per Vectem.

Sint in plano horizontali duo corpora A & B perfecte elaſtica, quorum A moveatur velocitate a, atque directe impingat in corpus B quieſcens. Notum eſt, per regulas communicationis motus, quas demonſtratas dedi in *Diſſertatione mea* Gallice edita pag. 27, & ſeqq. *, fore poſt conflictum velocitatem corporis $A = \frac{aA - aB}{A+B}$, velocitatem vero corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quare in caſu, ubi corpora A & B ſunt æqualia, quieſcet A poſt ictum, ejuſque velocitatem integram a accipiet corpus B. Quod ſi itaque hoc alligatum eſſet in una extremitate alicujus vectis, vel virgæ rigidæ, mobilis circa alteram extremitatem tanquam circa centrum fixum; manifeſtum ſane eſt corpus B, acquiſita ſua velocitate a, circulaturum circa idem illud centrum fixum. At vero generatio motus in corpore B ab impulſu orta haud aliter peragitur, quam fit per applicationem alicujus vis motricis in corpus movendum agentis. Statim enim ac corpus A attingit corpus B, fit promta compreſſio elaterii interpoſiti inter utrumque corpus A & B; hoc dum ita peragitur, niſus elaterii, in utramque plagam reſtitutionem affectantis, concitat promtiſſime in motum corpus B quod quieſcebat, & redigit ad quietem corpus A quod movebatur. Hujuſmodi vis, quæ oritur ex mutua actione corporum in ſe invicem, eſt ex earum numero, quas vocare ſoleo *Vires immateriales* †; quia quaſi extra materiam exiſtentes concipiendæ ſunt, dum non magis pertinent ad corpora moventia, quam ad movenda. Etſi vero colliſio corporum in uno veluti momento abſolvatur; clarum tamen eſt, atque res per ſe loquitur, actionem illam non eſſe inſtantaneam, ſed habere ſuum initium, medium, & finem; tanta tamen rapiditate ſibi ſuccedentes gradus, ut ſenſibus percipi non poſſint.

XI.

* N°. CXXXV. pag. 28, & ſeq. *Tom. III.*
† Vide infra Numerum CLXXIX.

X I.

His probe intellectis, haud ægre patebit, quomodo effici poſſit, ut corpus aliquod in motu conſtitutum omnem ſuam vim vivam transferat in aliud corpus majus ſeu minus, ita ut, priori illo ad quietem redacto, hoc alterum, quod antea quieverat, nunc ſolum receperit vim omnem quam prius illud habebat. Sit vectis rigidus CG mobilis circa punctum fixum C; in extremitate, vel in quolibet alio loco; ſit alligatum corpus elaſticum *G*, in quod impingat aliud corpus elaſticum *F* ipſi *G* æquale, velocitate & in directione FG perpendiculari ad lineam vectis CG. Poſt percuſſionem amittet corpus *F* ſuam velocitatem, cui æqualem GR acquiret corpus percuſſum *G*, cum qua acquiſita velocitate pergeret circulari circa centrum C. Fingamus jam ante allapſum corporis *F* ad *G*, hoc ipſum *G* ſubito tolli, atque pro eo aliud *H* ſubſtitui in alio vectis loco, ubi CH^2 ſit ad CG^2, ut corpus *G* ad corpus *H*; unde $H = \frac{CG^2 \times G}{CH^2}$, vel $CH^2 \times H = CG^2 \times G$. Patet ergo ex §. *6*, corpus impingens in punctum G, eundem omnino effectum facere pro acceleratione angulari vectis CG, ſive adſit corpus *G* ſine *H*, ſive adſit corpus *H* ſine *G*; adeoque in utrovis caſu velocitas FG in corpore *F* poſt ictum deſtruetur; conſequenter quicquid erat virium vivarum in corpore *F*, id nunc reperietur, vel in ſolo corpore *G*, vel in ſolo corpore *H*. TAB. LXXXV. *Fig. 10.*

COROLLARIUM.

Eodem modo fieri poteſt, ut corpus impellens *F* quamtumvis magnum, omnem ſuam vim conſumat in movendo alio corpore quantumvis parvo *P*. Prolongetur namque vectis CG ad P, ita ut CP^2 ſit ad CG^2, ut corpus *F* ad corpus *P*, ponendum in ipſo puncto P. Liquet corpus *F*, cum impegerit in punctum G, & quod pergeret velocitate GR, vel FG, ſi corpus *P* non adeſſet; mox omnem motum, adeoque omnem vim ſuam TAB. LXXXV. *Fig. 11.*

Digitized by Google

ſuam amiſſurum, quam recipiet corpus *P* in puncto P poſitum; acquiretque hoc velocitatem abſolutam P*p*, ita ut velocitas angularis PC*p* prorſus eadem ſit cum GCR quam habuiſſet corpus *F*, ſi cum vecte CG moveri perrexiſſet, ſine annexo corpore *P*.

XII.

SCHOLIUM.

TAB. LXXXV. *Fig.* 10. & 11.

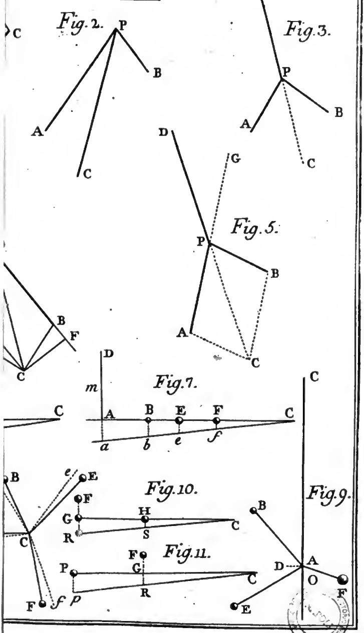
Ex his confirmatur vera æſtimatio virium Vivarum, in eo ſita, quod illæ Vires, ſeu facultates agendi, ſint in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata velocitatum. Cum enim Vis viva quæ erat in corpore *F*, poſt impulſum in vectem jam tota tranſlata reſideat in corpore *H*; procul dubio, altera alteri æqualis eſt. Atqui corpus *F* eſt ad corpus *H*, ut quadratum CH ad quadratum CG, hoc eſt, ut quadratum celeritatis HS ad quadratum celeritatis GR; ob æqualitatem celeritatum angularium HCS & GCR. Similiter in *Fig.* 11; probatur ex eo, quod vires vivæ corporis *F* & corporis *P* ſunt æquales, utpote altera alterius effectus plenus & adæquatus; fore maſſam corporis *F* ad maſſam corporis *P*, reciproce ut quadratum velocitatis P*p* ad quadratum velocitatis GR. Unde generaliter fluit, corporum Vires vivas, ſeu facultates agendi, habere rationem compoſitam ex ſimplici maſſarum & quadrata velocitatum.

XIII.

Si noſter hic demonſtrandi modus jam tum cognitus fuiſſet, cum vivide ageretur lis inter LEIBNITIUM & PAPINUM de vera æſtimatione Virium vivarum, atque PAPINUS uſque adeo ad incitas redactus fuiſſet, ut concederet LEIBNITIO corpus *A*, cum duobus gradibus velocitatis, idem efficere poſſe, quod quadruplo majus corpus *B*, cum uno gradu velocitatis; modo poſſibile eſſet ita dirigere motum corporis *A*, ut

Digitized by Google

N.° CLXXVII



Digitized by Google

ut poſt conflictum quieſceret, & omnem ſuam vim transfunderet in B; quod autem cum in praxi effici non poſſit [ſicuti opinabatur PAPINUS] quia duorum corporum perfecte elaſticorum, ſed inæqualium, illud quod alterum quieſcens directe pellit, ſemper vel retro pellitur, ſi minus eſt; vel pergit moveri imminuta velocitate, ſi majus eſt. Subterfugium PAPINI omnino erat ridiculum, quaſi veritas aliqua in abſtrato ſumta dependeret a poſſibilitate, vel impoſſibilitate phyſica. Quicquid ſit, noſter, inquam, demonſtrandi modus, quo actu fieri poteſt, ut corpus aliquod vim ſuam totam transferat in aliud corpus majus vel minus, ita ut nihil in priori remaneat, omnino idoneus fuiſſet ad convincendum PAPINUM de vera Virium vivarum æſtimatione.

XIV.

De Centro ſpontaneo rotationis.

Concipe corpus aliquod, quantivis voluminis, vel etiam Syſtema plurium corporum, inter ſe invariabiles diſtantias ſervantium, a vi quadam externa impelli; ita quidem ut commune Centrum gravitatis maneat in eodem ſemper plano horizontali, aut in alio quocunque plano, ſi corpora eſſent gravitatis expertia. Duo ſunt caſus conſiderandi: aut enim tendentia, vel directio vis impellentis tranſit per Centrum gravitatis, [ſi nimirum Syſtema grave eſſet]; aut non tranſit. Si tranſit, facile percipis totum Syſtema ita obſecuturum vi pellenti, vel trahenti, ut ſingula ejus puncta incipiant pergantque moveri motu parallelo directioni potentiæ motricis. Ratio hujus eſt evidens ex eo, quia illi potentiæ nulla alia reſiſtentia opponitur, quam quæ oriunda eſt ex inertia, proportionali utique quantitati materiæ ſingularum Syſtematis partium: haud ſecus ac ipſa foret natura gravitatis, quæ hic abeſſe ſupponitur; hoc ſolo diſcrimine, quod directiones partium gravium alicujus Syſtematis parallelæ ſint, quomodocunque moveantur; heic vero, ubi

Digitized by Google

nulla ponitur gravitas, unaquæque ex partibus Syſtematis, diverſam habens directionem motus, exercet ſuam reſiſtentiam inertiæ ſecundum eandem ſuam peculiarem directionem; id quod fit, ſi directio potentiæ motricis non tranſit per punctum ubi alias eſſet Centrum gravitatis.

X V.

Iſtum caſum alterum, qui altioris eſt indaginis, reſolvendum aggredior; retento nomine *Centri gravitatis*; etſi Syſtema corporum a gravitate liberum eſſe ſupponitur. Hunc ad finem, concipe planum horizontale tranſiens per Centrum gravitatis totius Syſtematis: in hoc plano ſit linea directionis, ſecundum quam potentia motrix agat ad movendum Syſtema corporum; atque ad iſtam lineam directionis ex Centro gravitatis ductam & utrimque productam intellige perpendicularem. Finge nunc porro ex ſingulis corpuſculis minimis totius Syſtematis ductas eſſe rectas verticales ad planum horizontale, ut ſingula quæque corpuſcula transferantur in ipſa puncta in quibus illæ verticales plano inſiſtunt. Perſpicis; haud dubie, planum iſtud tali projectione oneratum corpuſculis particularibus, eodem prorſus modo agitatum iri a vi motrice, ac ſit ipſum totum Syſtema in ſtatu ſuo naturali: ita enim ſimili projectione uti ſolemus in inveſtigatione Centri oſcillationis; ſed quæ projectio fingenda eſt fieri in plano verticali, tranſeunte per Centrum gravitatis & per punctum ſuſpenſionis.

X V I.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 12. Sit igitur planum horizontale projectionis AHOI, in quo firmiter hæreant, vel reſideant, Syſtematis corpuſcula projecta *K*, *L*, *M*, *N*, &c. commune Centrum gravitatis in C habentia, per quod tranſeat recta ABO perpendicularis ad directionem vis motricis DA, pellentis totum Syſtema a D verſus A, una cum ipſo plano, quod mobile ſuppono. In directione DA ſuma-

ſumatur punctum A pro puncto applicationis potentiæ motricis [nam per §. 1, in quolibet puncto directionis ſumi poteſt]; eo ipſo itaque conſiderari etiam poteſt hoc punctum A tanquam hypomochlium, ſeu fulcrum, reſpectu reliquarum potentiarum in vectem ACO agentium, ſicuti docent principia vulgaris Mechanicæ. Illæ reliquæ potentiæ ſunt, quæ oriuntur a reſiſtentiis inertiæ corpuſculorum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. a potentia DA movendorum, circa punctum aliquod immobile B in vecte AO, quod id ipſum eſt quod determinari debet.

XVII.

Tale autem punctum immobile B alicubi in vecte AO exiſtere debere, ex eo manifeſtum eſt, quod vis motrix in A extra Centrum gravitatis C perpendiculariter ad vectem applicatur; quo utique fit ut Syſtema corporum non poſſit moveri motu parallelo: ad hoc enim requireretur, ut vis motrix in ipſo centro gravitatis C applicaretur. Incipiet itaque moveri motu rotationis: ergo dabitur in vecte AO punctum aliquod B, quod erit Centrum rotationis initialis, adeoque ab initio immotum, dum reliqua omnia totius Syſtematis puncta in motum cientur. Hæc ita fiunt ab initio gyrationis, quod notanter dico; poſtea enim, cum in motum ſenſibilem Syſtema erumpit, ipſum quoque hoc Centrum abripitur, propter naſcentem vim centrifugam corporum *K*, *L*, *M*, *N*, &c. quemadmodum fieri cernimus in projectilibus, quæ provolitant gyrando, impetu concepto a vi quadam impreſſa in puncto diverſo a centro gravitatis.

XVIII.

Hoc cum ita ſe habeat, Theoria noſtra valebit iis præſertim in occaſionibus, ubi agitur de motibus non in longum excurrentibus; ut in tremulationibus, item in vibrationibus, vel oſcillationibus minimis. In his ergo & ſimilibus, opus eſt, ante omnia, ut probe determinetur Centrum rotationis ſponta-

neum B; voco *ſpontaneum*, quia a natura ſponte quaſi eligitur, pro diverſitate circumſtantiarum; ita ut non ſit in poteſtate noſtra illud ponere pro lubitu. Datur tamen criterium, unde cognoſcere poſſumus, qua conditione gaudere debeat punctum B, ad id ut unicum maneat ſtabile, dum reliqua omnia puncta plani horizontalis de loco ſuo dimoventur. Hoc vero criterium in eo conſiſtit, quod debeat eſſe æquilibrium inter preſſiones, quas punctum B patitur ab utroque latere, reſpectu vectis AO; hoc eſt, quod quantum hoc punctum urgetur in directione perpendiculari ad AO verſus unam plagam, tantundem ſimul retro urgeatur verſus plagam oppoſitam; ſcilicet utrumque per vires ex inertia corporum reſultantes.

XIX.

Ponamus nunc potentiam motricem DA promovere punctum A in *a*, circa Centrum rotationis B, quo ipſo fiet ut corpuſcula *M*, *L*, *K*, *N*, &c. promoveantur ad *m*, *l*, *k*, *n*, in directionibus perpendicularibus ad BM, BL, BK, BN; ita ut velocitates eorum initiales, deſignatæ per lineolas M*m*, L*l*, K*k*, N*n*, &c. futuræ ſint proportionales radiis BM, BL, BK, BN. Sunt autem reſiſtentiæ ab inertia oriundæ, conjunctim ut maſſæ & velocitates initiales, hoc eſt, ut $BM \times M$, $BL \times L$, $BK \times K$, $BN \times N$; adeoque, exempli gratia, corpus *M* renititur rotationi, vi ſuæ inertiæ expreſſa per $BM \times M$, idque in directione MH normali ad BM. Ex hac reſiſtentia reſultat aliqua vis impreſſionis [quæ vocetur *P*], qua centrum B urgetur normaliter ad AB, & quidem hic in eandem plagam qua tendit vis motrix DA. Ut autem determinetur quantitas hujus preſſionis, demitto in directionem inertiæ MH perpendicularem AH, atque ſumto A pro fulcro in vecte inflexo HAB, cujus unum brachium eſt AH, alterum AB; erit momentum vis inertiæ $BM \times M$ in H applicatæ $= AH \times BM \times M$; cui æquale eſſe debet momentum preſſionis P applicatæ

in

in B. Ergo $P = \frac{AH \times BM \times M}{AB}$. Sunt vero [ducta MF perpendicularis ad BA,] duo triangula AHE, FBM, inter ſe ſimilia, adeoque AH : AE = BF : BM, unde AH × BM = AE × BF, erit igitur $P = \frac{AE \times BF \times M}{AB}$ = [ob AE = AB — EB] $\frac{AB \times BF \times M - EB \times BF \times M}{AB} = BF \times M - \frac{EB \times BF \times M}{AB}$ $= BF \times M - \frac{BM^2 \times M}{AB}$. Simili modo idem de ſingulis reliquis preſſionibus demonſtratur; quare ſumma omnium preſſionum in punctum B exercitarum [quarum quædam affirmativæ, quædam negativæ ſunt, ut ſe mutuo in æquilibrio teneant] erit cenſenda = o; hoc eſt, $\int P = \int BF \times M - \int \frac{BM^2 \times M}{AB} = 0$, [NB, intelligo per præfixum ſ ſummam collectam ex hujuſmodi functionibus ſingulorum corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.].

X X.

Notum eſt ex natura Centri gravitatis, nominando *S* ſummam omnium corporum totius ſyſtematis, fore $\int BF \times M = BC \times S$; adeoque etiam $BC \times S - \int \frac{BM \times M}{AB} = 0$; unde ſequitur $BC \times S = \int \frac{BM^2 \times M}{AB}$; proinde $AB = \frac{\int (BM^2 \times M)}{BC \times S}$. Hinc videmus centrum ſpontaneum rotationis B eo in loco fore, ubi Syſtema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. tanquam Pendulum grave conſideratum, atque ſuſpenſum ex puncto B, habeat centrum oſcillationis in A; hoc eſt, cui iſochronum ſit Pendulum ſimplex longitudinis BA. Aut quia, demonſtrante jam HUGENIO, Pendula compoſita eam habent proprietatem, ut punctum ſuſpenſionis & Centrum oſcillationis poſſint converti, poterit Syſtema *M*, *L*, *K*, *N*, &c. ſumi pro Pendulo compoſito oſcillationis circa punctum ſuſpenſionis A; habebitque Centrum oſcillatio-

cillationis in B; quod itaque erit ipſiſſimum quod quærimus Centrum ſpontaneum rotationis. *Q. E. I.*

XXI.

Ejuſdem puncti determinatio ex alio principio.

Fingamus primo in vecte per centrum gravitatis C tranſeunte, ſumi punctum B ad lubitum pro fulcro fixo, ex quo procedant brachia ad corpora Syſtematis alliganda BM, BL, BK, BN, &c. Ponamus dein corpora Syſtematis *M*, *L*, *K*, *N* &c. omnino tolli, eorumque loco totidem alia ſubſtitui in unam maſſam colligenda, atque directe opponenda vi motrici DA, quæ maſſa a vi motrice eadem velocitate angulari moveatur circa fulcrum B, qua ante ſubſtitutionem Syſtema ipſum *M*, *L*, *K*, *N*, &c. circa B moveretur. Ex §. 8 patet maſſam illam in A ſubſtituendam, in qua ſola vis motrix DA eandem excitat vim acceleratricem angularem, quam excitaret in Syſtemate corporum; patet, inquam, maſſam ſubſtituendam debere eſſe æqualem huic $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$.

XXII.

Jam vero, ſi locus fulcri B non ex noſtro arbitrio ponitur, ſed ſi rei naturæ relinquitur cura eligendi fulcrum, circa quod potentia motrix queat circumvolvere Syſtema, omni qua poteſt fieri facilitate; hoc ſane tunc fieri manifeſtum eſt, cum Centrum circulationis vel rotationis ad eum ſe componit locum B, ex quo oritur maſſa ſubſtituenda, quæ omnium poſſibilium ſit minima; utpote quæ potentiæ motrici opponit obſtaculum facillime ſuperandum. Ecce quem facio calculum: Sit data $AC = a$, quæſita $CB = x$, $CM = m$, $CL = l$, $CK = k$, $CN = n$. His poſitis, maſſa ſubſtituenda $\frac{BM^2 \times M + BL^2 \times L + BK^2 \times K + BN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ erit, per proprietatem Centri

tri gravitatis $= \frac{BC^2 \times S + CM^2 \times M + CL^2 \times L + CK^2 \times K + CN^2 \times N + \&c.}{AB^2}$ $= \frac{xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{(a+x)^2}$; quæ, ut ſit minima, oportet eam differentiare, & æquare zero; quo facto, prodibit $2xSdx(a+x)^2 - (xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.).(a+x)2dx = 0$, ſeu $xS(a+x) = xxS + mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$ &, facta reductione, $axS = mmM + llL + kkK + nnN + \&c.$); unde $x = \ldots\ldots \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; & $a + x$, ſeu $AB = a + \frac{mmM + llL + kkK + nnN + \&c.}{aS}$; id quod rurſus indicat punctum B eſſe Centrum oſcillationis Syſtematis M, L, K, N, &c. circa punctum A oſcillantis.

XXIII.

SCHOLIUM.

En ergo inſigne exemplum Naturæ operantis per modum ſimpliciſſimum; ut quaſi ex inſtinctu ſapientiæ agere videatur. Quem quidem modum, licet indirectum, a Filio quoque meo *Daniele* obſervatum fuiſſe intellexi, poſtquam dudum hæc ſcripſeram. Interim quamvis cauſæ finales ex phyſicis proſcribantur vulgo, mirari tamen ſatis non poſſumus, quod Naturæ effectus, ex legibus pure mechanicis explicati, conſpirent ſemper cum generaliſſimo Canone metaphyſico, qui nobis dictat, *Naturam nihil facere fruſtra; ſemper agere per viam breviſſimam; nihil de vi ſua prodigere præter neceſſitatem ad producendum aliquem effectum; quæ poſſunt fieri per pauca nunquam a Natura fieri per plura*, &c. Quis autem auſit eo dementiæ procedere ut cogitet, nedum dicat, omnia quæ ita fiunt ſecundum leges Mechanico-Dynamicas, etſi videantur promanare ex prudentiæ conſilio, non tamen niſi fortuito caſui mirabilem iſtum concentum eſſe attribuendum? Dicamus potius Ens perfectiſſimum tanta perfectione, tanta ar-

te:

te & induſtria condidiſſe hoc Univerſum; ut undique elucerent in phænomenis veſtigia Omnipotentiæ conjunctæ cum Sapientia perfectiſſima. In quibuſdam nexus neceſſitatem non percipimus, ob imbecillitatem noſtram; in quibuſdam aliis rationem aliquam ejus reddere poſſumus. Sic, in caſu noſtro hucuſque pertractato, pronum eſt conjicere, ſi Centrum rotationis B in alio loco ſumeretur & figeretur, quam qui locus ſponte a natura ſe prodit, id futurum eſſe, ut vis aliqua ex effectu inertiæ corporum reſultans, ab uno latere vectis fortior quam ab altero, ſuſtineri debeat a puncto rotationis B, a cujus exceſſu, qui influit quoque in punctum A, fit ut corpus ſubſtituendum in hoc puncto majus eſſe debeat; cum in finem ut reſiſtat vi motrici B A, non tantum æquipollenter inertiæ Syſtematis, ſed etiam ei vi quæ punctum B plus premit ab una parte quam ab altera. Hoc autem, cum non ſit metuendum a Centro ſpontaneo; certe nulla alia reſiſtentia in A opponitur vi motrici DA, quam quæ originem habet a ſola inertia corporum *M*, *L*, *K*, *N*, &c.

Hoc præterea notare debemus, hujuſmodi Principium metaphyſicum caute tractandum eſſe in rebus mere phyſicis vel mechanicis; atque tunc tantum adhibendum, confirmationis gratia, quando jam conſtat de rei veritate ex cauſis mere dynamicis; uti in hoc noſtro Exemplo vidimus. Quod ſi enim duæ pluresve eſſent prærogativæ, quæ æquali jure admitti poſſent, ſed diverſos darent effectus; quamnam ergo ex illis diceremus eligi a Natura, ita ut præſtantiſſimum eligeret? Certe tale quid contingit in materia præſenti: nam quamvis verum ſit rotationem circa Centrum oſcillationis fore celerrimam; ſed ſi nobis perſuaderemus Centrum ſpontaneum rotationis fore in eo puncto, circa quod Syſtema corporum eadem vi rotatum faciat ut Centrum commune gravitatis [quod utique in recta linea movebitur] moveatur celerrime; inveniretur, facto computo, Centrum ſpontaneum fore in loco diverſo a Centro oſcillationis. Confugiendum igitur erit ad ſolutionem noſtram directam, ex Principio pure dynamico deductam, per quam ſtabilietur hypotheſis prior.

XXIV.

X X I V.

Agendum nunc eſſet de iis caſibus, ubi plures potentiæ motrices, in diverſis locis applicatæ, Syſtema ad rotandum incitarent; conabor vero hoc paucis abſolvere. Directiones potentiarum illarum ſunt, vel parallelæ, vel non parallelæ. Si prius, habebunt omnes communem perpendicularem ductam ex Centro gravitatis C Syſtematis pro vecte ſumendam, adeoque conſiderando omnia puncta A tanquam totidem puncta, gravitantia perpendiculariter ad vectem in ratione potentiarum motricium quas repræſentant, ac tum in Centro gravitatis horum punctorum gravitantium omnes potentias in unam colligendo, clare intelligimus, ex natura Centri gravitatis Centrum ſpontaneum rotationis B in eodem fore loco, eodemque ritu rotatum iri totum Syſtema, ſicuti fieret, ſi potentiæ diſperſim agerent. Quod ſi directiones potentiarum non ſunt parallelæ; poſſunt, per vulgarem Regulam compoſitionis virium, omnes in unam transformari, tum potentiam, tum directionem; ad quam dein ducta perpendiculari ex Centro gravitatis C totius Syſtematis, habebimus Caſum ſimplicem, dilucide ſatis explicatum.

X X V.

De motu corporum irregularium, ex percuſſione, vel colliſione aliorum producto.

Auctores, qui de communicatione motus tractant, haud aliter conſiderant corpora quam ſi eſſent ſphærica, vel ita ſaltem poſita, ut directio impulſionis tranſeat per Centra gravitatis corporum impellentis & impulſi; quo quidem caſu, evidens eſt corpora, poſt impulſum, motum iri ſine rotatione. De hac enim, ſi quæ accidit rotatio, ne cogitarunt quidem; unice ſolliciti de velocitate determinanda, ſecundum rectas lineas parallelas inter ſe, quas ſupponunt deſcribi a ſingulis punctis corporis im-

pulſi. Lubet vero Exemplum proponere, quo patefiet, qua lege debeat moveri corpus ab alterius incurſu, tendente, non per Centrum gravitatis, ſed in directione quæ Centrum illud ab alterutro latere relinquit. Eſto corpus percutiendum figuræ cujuſcunque FDGE, aliudque HLD, quod moveatur in directione RD, occurrens quieſcenti FDGE in puncto contactus D, ubi utriuſque corporis ſuperficies habent communem tangentem MN, quam trajiciat recta perpendicularis TDE. Liquet ergo in colliſione oriri, per compreſſionem corporum, potentiam motricem immaterialem, quæ ab una parte propellit corpus FDGE in directione DE, repellit vero alterum HLD in directione DT.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 13.

XXVI.

Ponamus ambo corpora eſſe elaſtica, atque per Centrum gravitatis C ducta ſit BCA perpendicularis ad DE. Ex Theoria in præcedentibus expoſita ſequitur, potentiam motricem in D excitatam, conſiderari poſſe tanquam applicatam in puncto A; hoc itaque ſumto pro puncto ſuſpenſionis, ex quo nimirum figura FDGE inſtar Penduli ſuſpenſa intelligitur, cujus Centrum oſcillationis ſit in B, quod utique datum erit, ob datam figuram, & datum punctum ſuſpenſionis A. Dico itaque hoc punctum B fore Centrum ſpontaneum rotationis initialis, circa quod corpus percuſſum primo momento gyrari incipiet: Id quod primum eſt. Secundo, ſi corpus impellens DHL eo momento, quo incurrit in FDGE, ita ſitum eſt ut recta DT normalis ad tangentem tranſeat per Centrum gravitatis corporis DHL; hoc ſane, poſt peractam impulſionem, retinebit parallelismum in motu ſuo, id eſt, plane non rotabitur: ſin vero DT non tranſit per Centrum gravitatis, ſubibit corpus DHL etiam rotationem, cujus Centrum ſpontaneum ſimili modo determinatur, ut factum eſt in priori.

XXVII.

XXVII.

Ut nunc determinemus velocitates corporum poſt colliſionem ortas; tres diſtinguendi ſunt caſus. 1°. Aut tranſit recta TDE per ambo Centra gravitatis corporum. 2°. Aut tranſit tantum per alterutrum, ex. gr. per Centrum gravitatis corporis HLD, relinquens extra ſe Centrum gravitatis C corporis FDGE. 3°. Aut tranſit per neutrum. Quod ad primum attinet caſum, nulla adeſt difficultas; utpote qui caſus eſt vulgaris, dudum reſolutus; etenim ambo corpora movebuntur, poſt ictum, motu parallelo in partibus ſine rotatione, & ita quidem ut ſi maſſa corporis HLD perpendiculariter impingentis in directione TD dicatur $= A$, ejuſque velocitas ante ictum $= a$, & maſſa corporis FDGE $= B$, cujuſque velocitas ante ictum [ſi quam habet in eadem directione DE præcedens] $= b$, minor quam a; futura ſit poſt ictum velocitas corporis $A = \frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$; in eandem partem, ſi hæc quantitas eſt affirmativa; ſed in contrariam, ſi negativa: & velocitas corporis B poſt ictum $= \frac{2aA - bA + bB}{A+B}$; id quod docent vulgares Regulæ de communicatione motus traditæ pro corporibus elaſticis. Vide *Diſſertationem meam* hac de re Gallice editam p. 26. * Si corpus B ante ictum quieſcit, [ut hic, brevitatis gratia, ſupponimus] erit, ut patet, velocitas poſt ictum, corporis $A = \frac{aA - aB}{A+B}$, & illa corporis $B = \frac{2aA}{A+B}$. Quod ſi corpus A, vel HLD, oblique feriat corpus B, ſecundum directionem RD, decomponendus eſt hic motus, more ſolito, in collaterales RT & TD, illum parallelum tangenti MN, hunc eidem perpendicularem: atque tum, ſi velocitas perpendicularis TD vocetur a, prodibunt eædem formulæ pro velocitatibus poſt ictum orituris; ubi nihil aliud præterea agendum, quam ut cum illa velocitate poſt ictum, pro corpore A obli-

* N°. CXXXV, pag. 28. & ſeqq. *Tom. III.*

que feriente, rurſus componatur velocitas parallela, quam habebat ante ictum.

XXVIII.

Videamus autem porro, quid ſit faciendum pro duobus reliquis caſibus, hactenus a nemine conſideratis; ubi nimirum recta TDE, perpendicularis ad communem tangentem MDN, non tranſit, per Centra gravitatis utriuſque corporis, aut ſaltem ſi per alterutrum non tranſit. Interim, ut brevitati conſulamus, lubet ſupponere corpus percutiendum FDGE, cujus maſſam vocavimus *B*, quieſcere ante ictum, ejuſque Centrum gravitatis C eſſe extra rectam DE, in qua directione percutitur, non attendendo ad directionem, in qua movetur corpus *A*, ſeu HLD, ante ictum; ſive id fiat oblique per RD, ſive normaliter per TD; neque etiam attendendo an tranſeat, an non tranſeat recta TD per Centrum gravitatis corporis HLD. Quare ante omnia determinari debet locus Centri rotationis B, circa quod nempe corpus percuſſum FDGE rotari incipit; quod utique ſecundum Theoriam noſtram, erit in recta AC perpendiculari ad lineam directionis motus initialis DAE: nam quia vis motrix, a compreſſione orta inter utrumque corpus, agit in percuſſum ſecundum rectam DA normalem ad CA; poteſt conſiderari illa vis, veluti applicata ad extremitatem A vectis ACB. Proinde per §. 20, punctum rotationis B, erit in Centro oſcillationis corporis FDGE ſuſpenſi ex puncto dato A: hinc ergo dabitur longitudo AB, quæ vocetur *L*.

XXIX.

Velocitatem initialem puncti A, in directione AE, venabimur ſequenti modo. Fingamus corpus percutiendum FDGE diviſum in infinita corpuſcula minima, quale unum eſt *m*; ad quæ ſingula, ex puncto rotationis B, ductæ intelligantur rectæ B*m*, omnino ut fecimus in §. 16, pro Syſtemate ex pluribus cor-

corpuſculis conflato. Hæ rectæ erunt inſtar totidem brachiorum vectis principalis A B, quorum unumquodque ſecum vehit ſuum ſibi alligatum corpuſculum *m*. Quare ſi ſublato toto corpore F D G E, ei ſubſtituamus in puncto A collocandum corpus aliud, quod ſit æquale ſummæ omnium $Bm^2 \times m$, diviſæ per AB^2 [id quod in hunc modum $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ exprimi poteſt]; erit per §. 8, hoc corpus $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$ collective ſumtum, atque in puncto A locandum, æquipollens figuræ corporeæ F D G E; hoc eſt, acquiret illud a potentia motrice eandem velocitatem, quam ab initio acquireret punctum A, in ipſa figura circa B rotanda. Quod ſi directio R D corporis incurrentis H L D talis ſit, ut per decompoſitionem in collaterales D T & R T, illa D T tranſeat per Centrum gravitatis ipſius corporis; nulla fiet in illo rotatio; nulla proin facienda ſubſtitutio, ſed corpus ipſum impingens jam faciet, cum priori illo ſubſtituto $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, neceſſariam compreſſionem, ut inde reſultet vis motrix, quæ ei dabit velocitatem eandem, quam ab illa vi acquireret ab initio rotationis punctum A figuræ percuſſæ F D G E. Sin vero directio T D non tranſeat per Centrum gravitatis corporis impingentis H L D; tunc utique pro hoc etiam facienda eſt ſubſtitutio alius corporis, ſimili modo quo facta eſt pro corpore impulſo; atque ita res redacta erit ad caſum ordinarium duorum corporum ſe mutuo centraliter impellentium.

XXX.

Ex hoc vero quod puncta A & B eam inter ſe habent relationem, ut, uno exiſtente puncto ſuſpenſionis, alterum ſit Centrum oſcillationis in corpore F D G E, mutari poteſt formula $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2}$, quæ ex infinitis terminis componitur, in aliam

ſimplicem, uno tantum termino conſtantem; nempe ſic. Sumto B pro puncto ſuſpenſionis, erit, ut jam dictum eſt, punctum A Centrum oſcillationis; ergo ex demonſtratis $BA = \int \frac{Bm^2 \times m}{BC \times B}$ [nominando ſcilicet *B* maſſam corporis FDGE]; ac proinde $\int (Bm^2 \times m) = BA \times BC \times B$. Dividendo utrumque per AB^2, habebitur $\int \frac{Bm^2 \times m}{AB^2} = \frac{BC \times B}{BA}$. Hinc ſi fiat BA ad BC, ita corpus *B* ad quartum; erit hoc corpus quartum, id ipſum quod quæritur ſubſtituendum pro corpore FDGE, quod nimirum, a corpore percutiente centraliter percuſſum in directione DAE, omnino eandem velocitatem acquiret, qua cum corpus FDGE ad rotandum circa B incitaretur.

X X X I.

Idem quoque obſervari debet, ſi pro corpore incurrente HLD, quod ſupra vocavimus *A*, ſubſtituere velimus aliud ſimplex, quod priori ſubſtituto incurrens eidem eandem iterum velocitatem imprimet: concipiendo enim in figura corporis HLD litteras α, β, γ analogas litteris A, B, C, id eſt, idem cum hiſce ſignificantes; facile intelligimus corpus ſubſtituendum pro corpore *A*, vel HLD, fore $= \frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$. Dico itaque ſi hoc corpus elaſticum $\frac{\beta\gamma \times A}{\beta\alpha}$, velocitate & directione RD, impingat in alterum illud pariter elaſticum & quieſcens $\frac{BC \times B}{BA}$, habeatque utrumque figuram globi, eam inde præciſe velocitatem impreſſum iri quieſcenti, quam acquireret corpus FDGE in puncto A, ad rotandum circa punctum B. Vocetur illa velocitas $= V$, eritque puncti A velocitas angularis $= \frac{V}{AB} =$ velocitati angulari Centri gravitatis C: unde ſequitur velocitatem abſolutam hujus centri fore $= \frac{CB \times V}{AB}$. Eſt enim velocitas abſoluta puncti

A

A ad abſolutam velocitatem Centri gravitatis C, ut AB ad CB.

XXXII.

Finge jam, in ipſo percuſſionis momento punctum B reddi immobile, infixo axiculo, ita tamen, ut tota figura FDGE liberrime circulari poſſit circa punctum illud B; utique facile percipies id futurum eſſe, ut, peracta percuſſione, poſtquam corpora impellens & impulſum jam iterum a ſe invicem ſunt ſeparata, quod breviſſimo fit tempuſculo, Centrum gravitatis C, ſua ſemel acquiſita velocitate $\frac{CB \times V}{AB}$, continuo circulari pergat circa B, ſimul cum ſingulis reliquis punctis corporis impulſi; quorum unumquodque eam habebit velocitatem abſolutam, quæ proportionalis eſt diſtantiæ ab axiculo in B infixo. Quid autem fiet, ſi remoto nunc axiculo, figura circulans FDGE in libertatem reſtituitur? Hoc ſane futurum prævideo, ut more projectilium [a quorum gravitate abſtrahitur] Centrum gravitatis C protinus incipiat moveri ſecundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, & quidem celeritate uniformi, ſicuti jam dudum demonſtratum eſt; atque ita, perſeverante rotatione, ſingula reliqua puncta deſcribent curvas cycloïdales, inter quas illa, quæ ab ipſo puncto B deſcribitur, eſt Cycloïs ordinaria *Hugeniana*, habens pro tangente initiali ipſam BA; cæteræ vero omnes ſunt Cycloïdes, vel contractæ, vel protractæ, prout a puncto C vel plus vel minus diſtant quam punctum B. Sed nolo nimius eſſe in his, quæ quilibet ſua attentione aſſequi poteſt.

Hoc interim notatu dignum eſt, duplicem jam conſiderandum eſſe motum angularem uniformem in uno eodemque corpore FDGE; unum nempe circa Centrum gravitatis C, dum hoc Centrum movetur motu æquabili in recta ipſi DE parallela; alterum vero circa Centrum rotationis B, quod pariter motu æquabili fertur ſuper Cycloïde ordinaria, cujus maxima altitudo,

do $= 2BC$, vel quæ Cycloïs deſcribitur a circulo, cujus radius $= BC$, dum hic circulus rotatur ſuper recta BP etiam parallela ipſi DE.

Poſſibilitas & veritas duorum horum motuum angularium atque uniformium, in eodem corpore ſimul exiſtentium, [quorum alter alteri æqualis eſt] patebit attente conſideranti proprietatem Cycloïdis ordinariæ.

XXXIV.

Ex data velocitate motus progreſſivi Centri gravitatis C in recta ipſi DE parallela, atque ex data velocitate motus angularis circa C, determinari poteſt locus puncti B; atque ex his locus puncti A, ubi vis motrix applicanda eſt, ut tales duo motus [datam proportionem inter ſe obſervantes] in corpore FDGE generari poſſint. Contemplatio iſta fortaſſis uſum ſuum habere poteſt in Phyſica cœleſti. Vulgaris opinio eſt, nullum eſſe nexum, nullam dependentiam neceſſariam inter motum diurnum & motum annuum Planetarum: motus iſti, ad ſenſum quidem uniformes vel æquabiles, tamen in unoquoque Planeta apparent tales vel tales eſſe ex fortuito naturæ eventu: nam etiamſi, quod ſpectat ad motus annuos circa Solem, hanc obſervent legem neceſſariam, ut eorum tempora periodica ſint in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum; nulla tamen hactenus ratio ex naturæ legibus allegari potuit, cur hic vel ille Planeta revolutiones ſuas diurnas peragat tali potius tempore, quam alio; cur ex. gr. Terra, quæ anni ſpatio orbitam ſuam abſolvit, opus habet 24 horis pro una gyratione circum-centrali: Jupiter vero, qui quinquies circiter longius abeſt a Sole, & cujus maſſa pluſquam millies ſuperat Terram, atque 12 propemodum annorum tempore ſemel circuitum facit circa Solem, non omnino tamen decem horas impendat in unam revolutionem circa ſuum centrum.

XXXV.

Digitized by Google

XXXV.

Non putem hujus rei aptiorem cauſam aſſignari poſſe, quam dicendo, in ſingulis Planetis, utriuſque hujus motus relationem ad ſe invicem originem habere a primitiva applicatione potentiæ motricis; a qua quippe ſola uterque motus produci potuit. Finge enim Planetam FDGE, quamcunque habeat figuram, ab initio exiſtentiæ ſuæ accepiſſe impulſum in directione DE. Quod ſi hæc directio forte tranſiiſſet per Centrum gravitatis C; facile percipis, ex iſto impulſu nullum alium motum ſubſecuturum, quam progreſſivum ſecundum eandem directionem, ſine omni rotatione: adeoque talis Planeta, ſi quis eſſet, careret motu diurno. Sed ſi primordialis directio DE per Centrum gravitatis C non tranſiiſſet; intelligis utique ex ante dictis, præter motum progreſſivum, alterum inſuper circulantem circa C æque ac circa aliud quoddam B produci debuiſſe.

XXXVI.

Verum, & hoc præterea facile perſpicimus, motum hunc rotationis vel tardiorem eſſe, vel celeriorem, prout recta DE vel propius, vel remotius a centro C diſtiterit. Ut igitur detegamus, in quolibet Planeta, cauſam ſui motus diurni, hujuſque celeritatis; id certe aliunde peti non poteſt, quam ex ipſis phænomenis. Hunc in finem, per Centrum gravitatis C ductam fingamus rectam BCA normalem ad DAE; in hac BA indagandum eſt punctum B, quod ſit Centrum initiale rotationis; ex quo cognito, cognoſcetur punctum A, ubi potentia motrix applicanda fuerit. Ex conſideratione Cycloïdis vulgaris *Hugenianæ*, quam punctum B deſcribere debet, haud difficulter vidi, inſtituendam eſſe hanc analogiam: *Ut ſe habet circuli peripheria* p *ad radium* r, *ita longitudo* L *viæ*, *quam Planeta percurrit in ſua orbita circa Solem*, *durante una revolutione circa ſuum Centrum gravitatis C*, *ſe habebit ad quartam CB*. Erit itaque $CB = \frac{rL}{p}$.

 Reli-

Reliqua nunc ſponte fluunt: nempe ex dato jam puncto ſuſpenſionis B & Centro gravitatis C, invenietur Centrum oſcillationis A Planetæ FDGE ex puncto B ſuſpenſi; atque id ipſum punctum A erit quod quæritur [per §. 28]; ubi ſcilicet potentia motrix applicata dedit Planetæ ambos motus, annuum & diurnum, ea lege ſe habentes, quam docet experientia. Qua quidem ratione explicare voluimus, quo pacto poſſibile ſit, ut in quolibet Planeta uterque motus ex uno eodemque principio originem ſuam traxerit; ac proinde non ſit fortuito caſui adſcribendum [ut hactenus creditum eſt], quod iſti duo motus hanc & non aliam inter ſe ſervent proportionem, reſpectu temporum periodicorum.

XXXVII.

Ut uſus noſtræ Regulæ clarius pateat, ſumamus pro exemplo duplicem motum Terræ, annuum & diurnum; ex quorum comparatione inveniendus ſit locus A, ubi vis motrix primitive applicata, potuerit producere ambos hos motus in Globo terreſtri. Supponamus autem Terram perfecte ſphæricam, atque ex materia homogenea conflatam; quo fiet ut ejus Centrum gravitatis C ſit in ipſo centro Globi. Dicatur $\frac{p}{r}$ ratio peripheriæ circuli ad radium, ipſa vero ſemidiameter Terræ dicatur $= R$. Erit, ex Aſtronomorum ſententia, ſemidiameter orbitæ Terræ circa Solem $= 22000\,R$ [Supponimus enim orbitas planetarias eſſe circulares, vel parum a circulis diſcrepantes] adeoque circumferentia orbitæ Terræ $= \frac{22000pR}{r}$. Eſt vero tempus revolutionis annuæ ad tempus revolutionis diurnæ [hoc eſt, neglecta fractione, 365 ad 1] ut circumferentia orbitæ annuæ $\frac{22000pR}{r}$ ad L, ſeu ad longitudinem viæ una revolutione diurna emenſæ; erit ergo $L = \frac{22000pR}{365r} = \frac{4400pR}{73r}$, ac proinde, per Regulam noſtram, $\frac{rL}{p}$, ſeu CB $= \frac{4400\,R}{73}$.

Su-

Sumendo nunc, vi Regulæ *Hugeniana* [vid. *Horol. oſcill.* fol. 142.] duas quintas tertiæ proportionalis ad CB & radium R, habebitur $CA = \frac{2 \times 73 R}{5 \times 4400} = \frac{73 R}{11000} = \frac{1}{150} R$, quam proxime.

Dico itaque ſi Globus aliquis [Terram repræſentans] confectus ex materia homogenea, quieſcens primo, poſtea in motum agitetur a quacunque vi motrice applicata perpendiculariter ad diſtantiam a Centro quæ ſit ſeſquicenteſima pars radii; dico, inquam, hunc Globum duos inde motus acquiſiturum, unum progreſſivum, alterùm circulantem, qui accurate ſatis reſpondebunt motui annuo & diurno Telluris.

COROLLARIUM.

Videmus hinc, punctum B, quod ſupra §. 18 nominavimus Centrum ſpontaneum rotationis tam procul a Terra exiſtere, ut CB, ſeu ejus diſtantia a centro, ſit $= \frac{4400 R}{73} =$ circiter 60 diametris Terræ; atque adeo pertingat uſque ad regionem Lunæ. Quod an ſit inter raro contingentia numerandum; an vero ex neceſſitate aliqua phyſica, effectui Lunæ attribuenda, conſequatur; de eo diſpiciant Phyſici. Fortaſſis reperient aliquam rationem a motu & diſtantia Lunæ repetendam, cur motus annuus & diurnus Terræ eam inter ſe habeant relationem quam habent; ita ut aliam habere non poſſint.

XXXVIII.

SCHOLIUM.

Simili calculo ſupputantur diſtantiæ illæ CB & CA pro reliquis Planetis, quorum conſtat ratio inter tempora unius revolutionis circa Solem & unius revolutionis circa axem. Sic inveni pro Marte, cujus ſemidiameter M ad ſemidiametrum Terræ R ſtatuitur ab hodiernis Aſtronomis ut 3 ad 5, ita ut M ſit

Digitized by Google

$=\frac{3}{5} R$; inveni, inquam, pro Planeta Martis CB $= \frac{41930\,M}{501}$, ſeu $84M$ quam proxime, & CA $= \frac{1}{418} M$ quam proxime.

Jupiter, qui omnium maximus eſt Planeta, habet ſemidiametrum N decuplo majorem ſemidiametro Terræ R, hoc eſt, $N = 10 R$; pro hoc autem invenitur, Regulæ meæ ductu, CB $= \frac{2288N}{2103} = \frac{11}{10} N$ quam proxime, & per Theorema *Hugenianum*, CA $= \frac{2\times 2103\,N}{5\times 2288} = \frac{2103\,N}{5720} = \frac{7\,N}{19}$ quam proxime. Mirum hic eſt Centrum ſpontaneum rotationis primitivæ tam parum abeſſe a centro ipſo Globi Jovialis, ut ejus diſtantia ſuperet ſemidiametrum Jovis vix decima ſui parte, vel una tantum ſemidiametro Terræ; cum in minoribus Planetis, Terra nempe & Marte, diſtantia illa in priore quinquies duodenis, in altera ſepties duodenis vicibus ſuam reſpective ſemidiametrum omnino excedat.

Quod attinet ad Saturnum & Mercurium; hac de re pro illis nihil aſſerere poſſumus, quoniam eorum revolutiones circa axes ſuos hactenus ſunt ignotæ: neque etiam quicquam decernere volumus de Venere, ob incertam ejus atque dubiam revolutionis diurnæ durationem; dum aliqui illam ſtatuunt 23 horarum, alii vero, ut BIANCHINUS, totidem dierum.

Cæterum ſilentio non prætereundum eſt, Planetas fuiſſe hic conſideratos ut nudos, atque liberos a circumfuſis atmoſphæris; cum autem probabiliter ſinguli Planetæ, ſaltem primarii, ut Terra, ſuas habeant atmoſphæras, quæ, ſimul cum Planetis quos ambiunt, circumrotantur, atque ita cum illis conſtituant ſinguli unam continuam maſſam; non videtur dubitari poſſe, quin aliter ſe habeant loca punctorum B & A, quam a nobis determinata ſunt: an autem ab acceſſione atmoſphæræ magna & ſenſibilis oritura eſſet differentia, merito dubitamus, ob raritatem materiæ atmoſphærarum, uſque adeo rareſcentis aſcendendo a ſuperficie Planetarum per regiones altiſſimas, ut omnis

Digitized by Google

nis ejus quantitas collectim ſumta tantum non pro nihilo reputari poſſit, reſpectu habito ad molem ingentem materiæ denſiſſimæ, ex qua conſtant Planetæ: id quod facile per calculum demonſtrari poſſet ſed brevitati ſtudendum eſt. In eadem ſententia fuiſſe NEWTONUM patet ex ejus *Principiis Phil. Natural. p.* 470. Edit. ſecundæ; ubi hæc habet verba: *Globus aëris noſtri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine ſemidiametri unius Terreſtris, impleret omnes Planetarum regiones, ad uſque ſphæram Saturni & longe ultra.*

XXXIX.

Ad clariorem intelligentiam eorum quæ ſequuntur, præmittendum eſt hoc

LEMMA.

Data, in oſcillationibus minimis, relatione inter vires acceleratrices & excurſiones a puncto quietis; invenire longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus illis.

SOLUTIO.

Eſto ſemi-Cycloïs ABD inverſa, cujus vertex D; evoluta AFE eſt etiam ſemi-Cycloïs ipſi DBA æqualis. Notum eſt ultimum radium evolutionis DE eſſe pariter æqualem ſemi-Cycloïdi ABD, & eſſe longitudinem Penduli ſimplicis, cujus ſemi-oſcillatio minima eſt iſochrona deſcenſui corporis gravis per ſemi-Cycloïdem, vel per arcum BCD, incipiendo deſcendere a quocunque puncto B. Notum eſt denique, vim acceleratricem tangentialem corporis deſcendentis, in quolibet puncto B, eſſe ad vim acceleratricem naturalem, in puncto A, ſecundum tangentem verticalem, ut ſe habet longitudo arcus BD ad longitudinem ſemi-Cycloïdis ABD, ſeu rectæ ED. Eſto jam alicubi corpus quoddam C, ab aliqua cauſa conſtitu- TAB. LXXXVI. Fig. 14.

 tum

Digitized by Google

tum in motu oſcillatorio, ita ut, pro quavis aſſumta excurſione t a puncto quietis, data ſit ejus competens vis acceleratrix γ, proportionalis utique excurſioni t; lubeatque jam invenire longitudinem Penduli ſimplicis, corporis C oſcillationibus iſochroni. Ad hoc obtinendum, fingamus excurſionem t eſſe portiunculam DC infimam Cycloïdis quærendæ, ita ut vertex D ſit in puncto quietis, a quo fiunt excurſiones. Erit igitur, per prædictam proprietatem Cycloïdis, ut vis acceleratrix γ in loco C, ad vim acceleratricem naturalem g in initio Cycloïdis A, ita longitudo excurſionis t, ſeu DC, ad ABD, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni $ED = \frac{gt}{\gamma}$.

X L.

De corporum aqua inſidentium oſcillationibus, & de invenienda longitudine Penduli ſimplicis oſcillationibus illis iſochroni.

De corporibus humido inſidentibus jam aliquid ſcripſit ARCHIMEDES, quod extat inter ejus Opuſcula; ubi id tantum egit, ut definiret ſitum, quem quædam ſolida, præſertim Conoidea Parabolica, in aqua ſtagnante acquirere debent, ut in quiete permaneant; ad eundemque redeant, ſi ex iſto ſitu nonnihil fuerint deturbata. Hujus rei natura nititur duobus Principiis, quorum unum eſt, quod Centrum gravitatis ſolidi inſidentis ſit in eadem recta verticali cum Centro gravitatis voluminis aquei, cujus ſpatium occupat ſolidum inſidens. Hujus Principii veritas haud longe eſt petenda, & fere per ſe patet. Alterum vero Principium, quod demonſtrari poteſt, in hoc conſiſtit, ut intervallum duorum planorum horizontalium, per duo illa Centra gravitatis tranſeuntium, ſit vel minimum, vel maximum; nempe minimum, ſi Centrum gravitatis ſolidi fuerit altius Centro gravitatis voluminis aquei, uti ſi ſolidum eſt ex materia homogenea; maximum vero intervallum erit, ſi

gra-

Centrum gravitatis ſolidi fuerit profundius quam Centrum gravitatis voluminis aquei, id quod contingere poteſt, in caſibus ubi materia ſolidi eſt heterogenea, ſeu non uniformiter denſa.

X L I.

Concipiamus igitur, in aqua ſtagnante, corpus aliquod ſolidum C A E B ſpecifice levius quam aqua; quod ſuo pondere demerſum hæreat, uſque ad ſuperficiem primo horizontalem A B: ſit vero G, Centrum gravitatis totius corporis C A E B; quod, ut rem generaliſſime pertractemus, ſupponimus quomodocunque heterogeneum. Intelligatur jam planum aliquod verticale tranſiens per Centrum gravitatis G; cujus plani ſectio in ſuperficie corporis formet curvam C A E B. Clarum eſt, ex Staticis, rectam verticalem E G I, ductam per Centrum gravitatis G corporis ſolidi, tranſituram quoque eſſe per punctum O, quod foret Centrum gravitatis voluminis aquei, cujus ſpatium occupatur a parte corporis immerſa A E B. Vis enim aquæ corpus ſurſum pellere nitens, concentrata in O, debet eſſe æqualis, & directe oppoſita vi ponderis in G collectæ, & corpus deorſum urgenti; alioquin corpus in æquilibrio ſubſiſtere non poſſet. TAB. LXXXVI. *Fig.* 15.

X L I I.

PROBLEMA I.

Moveatur corpus pauliſper circa punctum G, ita ut recta G O I ex ſitu verticali G *i* inclinetur, faciatque cum ea angulum acutiſſimum I G *i*; quo fiet ut etiam planum ſectionis aquæ A I B, quod erat horizontale, jam faciat cum nova ſectione *a* I *b* angulum acutiſſimum, & quidem æqualem angulo I G *i*. Corpus vero nunc ſibi relictum remeabit ad ſitum quietis & ultra, [præſertim ſi G fuerit infra O;] atque motu reciproco formabit oſcillationes. Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod faciat cum illis oſcillationes contemporaneas?

SOLU-

Digitized by Google

Solutio.

Hoc Problema excogitatum primo, atque ſolutum ab ingenioſiſſimo noſtro Eulero [cujus autem analyſin ipſam hactenus nondum vidi] ex meis principiis ſolvitur ſequentem in modum. Ante omnia obſervo, corpus CAEB, inter oſcillandum, ſemper occupare volumen aqueum æquale dato; ut nimirum eadem ſemper ſervetur ratio inter volumen partis immerſæ & volumen corporis totius; quod ſane ex æquilibrii natura manifeſtum eſt.

Hinc ſequitur, volumen aqueum ungulæ A I *a*, inter plana A I & *a* I contentæ, eſſe æquale alteri volumini B I *b*, quod ex aqua emerſit.

Quod ſi jam *o*, in recta verticali G *i*, fuerit Centrum gravitatis voluminis aquei, exiſtente ſcilicet corpore in ſtatu quietis, ſeu æquilibrii; erit ducta G I perpendiculari ad A B, ſumtaque GO $=$ G*o*, erit, inquam, punctum O Centrum gravitatis voluminis aquei *a* E *b*; ipſaque O*o*, ob parvitatem anguli OG*o*, haberi poteſt pro horizontali linea, quæ producta, tranſibit per *ω* Centrum gravitatis voluminis aquei *a* E *b*, quod occupat corpus in ſitu inclinato. A determinatione hujus puncti *ω* dependet Problematis ſolutio.

In hunc finem, poſito angulo acutiſſimo A I *a*, vel B I *b*, vel *o* G O $= n$; erit O*o* $= n \times$ G*o*. Concipiatur totum volumen aqueum a corpore occupatum [quod dicatur *V*] diviſum in ſtrata verticalia parallela plano A E B vel *a* E *b*; quo ipſo, utraque ungula reſolvetur in ſtratula triangularia acutiſſima, habentia ſingula ſuos angulos acutos æquales ipſi A I *a*, vel B I *b*. Quare, ſi in unoquoque ſtratulorum, latus illud quod ipſi A I eſt parallelum dicatur *y*; ut &, ab altera parte, in unoquoque ſtratulorum latus illud quod ipſi I B eſt parallelum, vocetur *z*; ipſa vero craſſities communis ſtratulorum nominetur *dx*; erunt utique ſingula ſtratula ipſi A I *a* parallela $= \frac{1}{2}\, nyydx$, & pariter ab altera parte ſingula ipſi B I *b* parallela $= \frac{1}{2}\, nzzdx$; unde contentum ungulæ inter plana A I & *a* I $= \frac{1}{2}\, n\int yydx$, & contentum alterius ungulæ inter B I & *b* I $= \frac{1}{2}\, n\int zzdx$.

Porro,

Porro, nominando g vim gravitatis naturalis, qua corpora animantur; atque V volumen AEB vel aEb, quod corpus occupat in aqua; erit utique pondus ejus aquæ, quæ hoc volumen repleret, $= gV =$ [per Legem Hydroſtaticam] ponderi ipſius corporis aquæ inſidentis; tanta enim vi gV ab aqua ambiente ſurſum urgetur corpus, quanta ipſum ſuo pondere nititur deorſum; quæ cauſa eſt, ut, cum duo Centra gravitatis o voluminis aquei & G totius corporis reſpondent ſibi mutuo in eadem recta verticali Go, ſervetur æquilibrium. Videndum itaque eſt, quid fiat, ſi recta conjungens centra ex ſitu verticali Go paululum inflectatur in ſitum obliquum GO. Hic quidem ſtatim obvium fit, punctum O, etſi ſit centrum voluminis AEB, non tamen eſſe Centrum voluminis nunc occupati aEb; utpote cujus Centrum erit alicubi in ω, prolongando ſcilicet lineolam oO, ut modo ſupra jam innui. Eſt vero pondus ungulæ aqueæ AIa $= \frac{1}{2} gn\int yy\,dx$, & pondus ungulæ BI$b$ [ſi nempe aqua eſſet plena] $= \frac{1}{2} gn\int zz\,dx$.

Intelligatur nunc ſuper GI [quæ tranſit per Centrum gravitatis O voluminis uniformiter denſi AEB] erectum eſſe planum perpendiculare plano ſectionis AEB, vel aEb; erit, ex principio Statico, O$\omega \times gV$ [quatenus volumen AEB venit in ſitum aEb] $=$ momento ponderis voluminis aquei, reſpectu plani ſuper EI erecti. Hoc autem momentum eſt æquale ſummæ momentorum partium, hoc eſt, momento voluminis totius AEB, plus momento ungulæ AIa, minus momento ungulæ BIb. Quia vero volumen aqueum AEB habet ſuum Centrum gravitatis O in ipſo plano ſuper GI perpendiculari; erit ejus momentum $= 0$, atque alterum momentum ipſius BIb, utpote priori AIa oppoſitum, adeoque hujus reſpectu negativum, fiet affirmativum, ob negationem negativi.

Ungulæ momentum habetur, ſumendo aggregatum momentorum, quod fit ex momentis ſingulorum ſtratorum triangularium, quorum unumquodque momentum ſtrati in ungula AIa eſt $= \frac{2}{3}\mathrm{AI} \times \frac{1}{2} gn\,\mathrm{AI}^2\,dx = \frac{1}{3} gn\,\mathrm{AI}^3\,dx = \frac{1}{3} gny^3\,dx$; ac pariter unumquodque momentum ſtrati in altera ungula BI$b = \frac{1}{3} gnz^3\,dx$. Hinc igitur $\mathrm{O}\omega \times gV = \frac{1}{3} gn\int y^3\,dx + \frac{1}{3} gn\int z^3\,dx = \frac{1}{3} gn\int (y^3 + z^3)\,dx$,

 adeoque

adeoque $O\omega = \frac{n\int(y^3+z^3)dx}{3V}$; & $Oo + O\omega$, ſeu $o\omega = n\,Go + \frac{n\int(y^3+z^3)dx}{3V}$.

Inventa hoc modo diſtantia $o\omega$; ducatur porro verticalis ωR, occurrens in R horizontali GR ductæ ex puncto G, quod conſiderari poteſt inſtar puncti ſuſpenſionis Penduli inverſi, circa quod tota figura ſolida CAEB ſuas oſcillationes facit: ita ut $o\omega$ deſignet excurſionem Centri gravitatis ω voluminis aquei a corpore occupati, interea dum Oo eſt excurſus, ipſius puncti O, quatenus in corpore oſcillante eundem ſemper locum occupat, atque ad punctum ſtabile o hinc inde reciprocando tendit. Patet enim motum puncti G, ſi quem haberet ſurſum vel deorſum verſus, debere eſſe infinities minorem, quam eſt motus oſcillatorius Centri gravitatis o in directione horizontali Oo; qui motus jam ipſe tardiſſimus eſt, utpote qui ſupponitur facere oſcillationes minimas tempore finito. Quod cum ita ſit, habebimus vectem rectangularem oGR, ſuper hypomochlio G, ad cujus brachii horizontalis GR extremitatem R, applicari intelligitur tota vis voluminis aquei gV ſurſum tendens in directione verticali $R\omega$.

Inſtituendo itaque, ex natura vectis, hanc analogiam: Ut ſe habet longitudo brachii Go, ad longitudinem brachii GR, ſeu $o\omega$, ſeu $n.Go + \frac{n\int(y^3+z^3)dx}{3V}$, ita erit vis ponderis gV punctum R ſurſum urgentis ad $gnV + \frac{gn\int(y^3+z^3)dx}{3Go}$, ſive ad $\frac{gnV}{Go} \times (Go + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V})$; id quod erit vis motrix [quæ pro vi ponderis gV ſubſtituenda eſt] applicanda in o horizontaliter ad reſtituendum corpus inſidens oblique ad ſitum æquilibrii verticalem.

Reſtat ut inveſtigetur, ex iſta vi motrice, vis acceleratrix; quod peragitur, ſi concipiatur corpus CAEB reſolutum in particulas minimas p, quarum ſingularum denſitas propria dicatur δ, ita ut δp ſignificet quantitatem materiæ ſingulis particulis com-

competentem [hoc ita facio quia ſupponitur corpus inſidens eſſe heterogeneum, ſeu non uniformiter denſum]; ſit vero denſitas aquæ, utpote uniformiter denſæ $= 1$. Dicatur porro r diſtantia particulæ cujuſlibet ab axe per punctum G tranſeunte, circa quem corpus inſtar Penduli inverſi oſcillatur. Hinc ſi, loco totius corporis, intelligamus in puncto o concentratam eſſe quantitatem materiæ, quæ ſit $= \frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$, concludimus ex §.8 hanc maſſam concentratam a vi motrice eodem modo oſcillaturam, ac facit corpus ipſum CAEB. Quare ſi dividatur vis illa motrix quæ eſt $\frac{gnV}{Go} \times (Go + \frac{\int(y^2+z^2)dx}{3V})$ per quantitatem materiæ $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix horizontalis $= \frac{gnV \times Go}{\int rr\,\delta p} \times (Go + \frac{\int(y^2+z^2)dx}{3V})$. Cognita jam vi acceleratrice horizontali, & data longitudine excurſionis Oo, quæ eſt $= na$ ſeu $n.Go$, facile invenimus, ex natura Cycloïdis, longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni cum corpore in aqua lateraliter oſcillante; faciendo ſcilicet tantum hanc analogiam [per *Lemma* ad §. 39]: Ut ſe habet vis acceleratrix $\frac{gnV \times Go}{\int rr\,\delta p} \times (Go + \frac{\int(y^2+z^2)dx}{3V})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis $n.Go$ ad quartam, quæ erit $\frac{3\int rr\,\delta p}{3V.Go + \int(y^2+z^2)dx}$ $=$ longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLIII.

ALITER.

Ex puncto O, in quo maſſa materiæ $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$ concentrata ponitur, erigatur verticalis OS, atque ſecundum hanc directionem vis motrix ſurſum trahens eam maſſam habetur, faciendo, ex natura vectis, ut Oo ad ωo, ita vis voluminis aquei collecta in

in ω, hoc eſt, gV, ad $\frac{gV \cdot \omega o}{Oo}$ = [ſubſtituendo pro Oo & ωo eorum valores] $gV + \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$. Et ſic res reducta eſt ad conſiderationem Penduli ſimplicis inverſi, cujus longitudo eſt Go, vel GO, punctum ſuſpenſionis G, corpus in o vel O ſurſum gravitans $= \frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$, gravitatio ipſa, ſeu vis motrix, ſurſum tendens $= gV + \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$. Quare, dividendo hanc vim motricem per maſſam corporis $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$; prodibit vis acceleratrix, qua hoc corpus animatur, $= \frac{gV \times Go^2 + \frac{g}{3} Go \int(y^3+z^3)\,dx}{\int rr\,\delta p}$.
Jam vero, per Propoſitionem ſupra citatam §. 9, quam demonſtravi in *Actis Lipſ.* 1713, p. 79, * duo nimirum Pendula ſimplicia a diverſis viribus acceleratricibus agitata eſſe iſochrona, ſi habuerint longitudines ſuis viribus acceleratricibus quibus animantur proportionales. Proinde dicendo, ut ſe habet corporis noſtri $\frac{\int rr\,\delta p}{Go^2}$ vis acceleratrix $\frac{gV \times Go^2 + \frac{1}{3} g \times Go \times \int(y^3+z^3)\,dx}{\int rr\,\delta p}$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo Go ad $\frac{3\int rr\,\delta p}{3V \times Go + \int(y^3+z^3)\,dx}$, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni; prorſus ut ante.

COROLLARIUM.

Si corporis $CAEB$ Centrum gravitatis G eſt altius quam Centrum gravitatis o voluminis aquei; id quod neceſſario fieret, ſi corpus eſſet homogeneum; evadit Go negativa: quo caſu gravitatio, ſeu vis motrix corpus ſurſum urgens, exprimenda eſt per $gV - \frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$; atque ita accidere poteſt ut valor ejus fiat omnino negativus, quando ſcilicet $\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$ ſupe-

* N°. XC, pag. 518, *Tom. I.*

Digitized by Google

ſuperat ipſum V; quod ubi contingit, viſibile utique eſt corpus, tantillum inclinatum ex ſtatu æquilibrii, non poſſe reſtitui, ſed prorſus præceps ſubverſum iri.

XLIV.

SCHOLIUM.

Gravitatio, ſeu vis motrix qua corpus inter oſcillandum ſurſum urgetur, eſt forſan illa ipſa, quæ ab EULERO noſtro, in litteris ſuis die 30 Julij, 1738, ad me datis, vocatur *vis firmitatis reſiſtens inclinationi corporis*: revera enim formula mea $gV+\frac{g\int(y^3+z^3)\,dx}{3Go}$, vel, quæ eodem recidit, $\frac{gV}{Go}\times(Go+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$ nihil differt ab *Euleriana*, $M(GO+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V})$; ubi M idem denotat quod apud me gV; nempe pondus Corporis oſcillantis, vel, quod perinde eſt, voluminis aquei a corpore occupati; niſi quod diſcrimen aliquod utrobique obſervetur, dum apud me hoc pondus gV vel M diviſum conſpicitur per Go vel GO, apud EULERUM vero non item; quod forſan per inadvertentiam ſubſcribere omiſit: in qua conjectura eo magis confirmor, quia alias vis firmitatis compararetur cum pondere multiplicato per lineam, quæ ſunt res inter ſe incomparabiles: talis autem incongruentia non reperitur in mea expreſſione, in qua quippe linea $Go+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3V}$, diviſa per lineam Go, dat numerum, quiſquis ille ſit; qui indicat, quoties ſumendum ſit pondus gV, vel M, ut fiat æquale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oſcillatione oriundæ & ſurſum tendenti. Atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo; quæ utique non ſunt aſyſtata.

X L V.

P R O B L E M A II.

Corpore dato oſcillante verticaliter in aqua, hoc eſt, ſurſum deorſum alternatim aſcendente & deſcendente per excurſiones minimas; invenire ejuſdem oſcillationum legem; ſeu determinare longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni.

Cum primum mihi proponeretur Problema præcedens, de corporibus in fluido lateraliter vel horizontaliter oſcillantibus, protinus incidi in hoc alterum Problema de eorundem oſcillationibus verticalibus determinandis; quod etſi ſit ſolutu multo facilius priori, non tamen minus curioſum & utile deprehendi. Solutionem meam communicavi cum Exc. EULERO; qui deinde & ſuam perſcripſit cum mea apprime conſpirantem. Ecce nunc viam ſolvendi quam inieram.

S O L U T I O.

Monendum eſt in anteceſſum, hic non venire in conſiderationem, utrum corpus aquæ inſidens, ſit ex materia per totum homogenea, an heterogenea; modo totius gravitas ſpecifica habeat rationem datam ad gravitatem ſpecificam aquæ. Sit igitur in vaſe, ſi vis, cylindrico ABCD [neque enim figura vaſis aliquid ad rem facit] ſufficiens quantitas aquæ, in qua ſuſpenſum hæreat in æquilibrio corpus GHLM; ſitque tunc aquæ ſuperficies EF in altitudine BE vel CF. Quo poſito, duo ſunt caſus expendendi; vel enim vas ſatis eſt anguſtum, ut ſuperficies EF comparari poſſit cum area ſectionis HM quam corpus format in ſuperficie EF; vel vas tantæ eſt amplitudinis, ut ſuperficies EF infinities quaſi ſuperet aream HM. Prior caſus ſolutus dabit, per Corollarium, ſolutionem poſterioris.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 16.

Sit igitur area ſectionis $HM = a$, area vaſis amplitudinis $EF = b$, maſſa corporis $= M$, vis gravitatis, qua corpora naturaliter ad accelerationem animantur, $= g$; adeoque corporis pondus,

pondus, ſeu vis motrix qua ad deſcenſum ſollicitatur, $= gM$. Hæc vis, exiſtente corpore in æquilibrio, deſtruitur a vi contraria & æquali, quam aqua exercet ſurſum in corporis partem demerſam; hæcque vis aquæ, per Principium Hydroſtaticum, æqualis eſt ponderi aquæ, quæ in volumine a corpore occupato contineri poteſt. Dicatur hoc volumen $= V$.

Concipe jam corpus GL ex ſitu æquilibrii elevari verticaliter ad parvam altitudinem expreſſam per $EN = x$; quo ipſo deſcendet ſuperficies EF per altitudinem EP, quæ erit $= \frac{ax}{b-a}$; oportet enim ut $EN \times HM$ ſit $= EP \times (EF - HM)$. Hinc $NP = \frac{ax}{b-a} + x = x\left(\frac{b}{b-a}\right)$; quod multiplicatum per HM, ſeu a, dabit $HM \times NP = ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right) =$ decremento voluminis aquei. Perſpicuum autem eſt, ex Hydroſtaticis, quod quanta pars voluminis in aqua occupati per aſcenſum corporis amittitur, tanta viciſſim pars deſtructæ vis motricis in corpore recuperetur.

Faciendo itaque, ut ſe habet volumen V ad decrementum voluminis $ax \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, ita vis motrix totalis gM ad quartum $\frac{gMax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, quod erit $=$ vi motrici, quæ diviſa per maſſam corporis M, dat vim acceleratricem $= \frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$, proportionalem ipſi x, ſeu diſtantiæ a ſitu æquilibrii: unde ſtatim patet oſcillationes eſſe tautochronas. Sed ut determinetur longitudo Penduli ſimplicis iſochroni; inſtituenda eſt hæc altera analogia [per *Lemma* ad §. 39] : Ut vis acceleratrix inventa $\frac{gax}{V} \times \left(\frac{b}{b-a}\right)$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita x, ſeu diſtantia a ſitu æquilibrii, ad quæſitam longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni; quæ proin longitudo erit $= \frac{(b-a)V}{ab}$ $= \frac{V}{a} - \frac{V}{b}$.

C. n.

COROLLARIUM.

Hinc ſponte fluit caſus alter, ubi nimirum vas eſt ampliſſimum; quo caſu $\frac{V}{b}$ evaneſcet juxta $\frac{V}{a}$; unde longitudo Penduli fiet $= \frac{V}{a}$; ex quo hæc elegans elicitur conſtructio. Super baſi a, ſeu HM, erigatur ſolidum cylindricum, ſeu priſmaticum æquale volumini aqueo HLM; eritque altitudo illius ſolidi cylindrici æqualis longitudini Penduli ſimplicis iſochroni.

XLVI.

SCHOLIUM.

Poteſt hæc proprietas habere aliquam utilitatem in Nauticis. Ut ſi Navis quædam onuſta in Portu ad anchoram alligata hæreat, eaque incipiat a maris criſpatione acquirere [ut fieri ſolet] exiguum motum ſubſultantem ſurſum deorſum; Obſervator quiſpiam ſtans in littore, atque ad manus habens Pendulum, quod nunc elongando, nunc abbreviando, ita moderetur, donec fiat iſochronum; habebit Penduli ſui longitudinem; quam ſi multiplicaverit per aream ſectionis Navis, ſeu ſupremæ ſuperficiei voluminis aquei, quam ipſa Navis occupat in aqua, reſultabit productum, ex. gr., in pedibus cubicis expreſſum; atque ſic cognito pondere unius pedis cubici aquæ, innoteſcet pondus totius voluminis aquæ quam Navis in mari occupat, hoc eſt, pondus ipſius Navis, una cum omnibus oneribus contentis. Detracto igitur pondere Navis vacuæ omniumque utenſilium [quod ſemel exploraſſe ſuffecerit,] monſtrabit reſiduum quanti ponderis ſint merces contentæ, & quæcunque inſunt onera acceſſoria ſimul ſumta.

XLVII.

De Oſcillationibus Corporum titubantium ſuper ſuperficie aliqua immobili.

Alia datur ſpecies oſcillationum tautochronarum minimarum, quas

quas obſervamus in corporibus convexis gravibus, atque incumbentibus alicui ſuperficiei immobili quam tangunt in unico puncto. Intelligimus namque iſtius modi corpus fore in æquilibrio poſitum, quamdiu ejus Centrum gravitatis eſt in recta verticali, quæ tranſit per punctum contactus: ſtatim vero ac tantillum dimovetur ex hoc ſitu, quem pono corpus ſponte acquiſiviſſe ab actione ſuæ gravitatis, perſpicuum eſt, ad eundem ſitum poſt titubationes multas ultro citroque faciendas, more oſcillationum, eſſe rediturum, inibique iterum in æquilibrio manſurum. Jam igitur determinanda eſt longitudo Penduli ſimplicis titubationibus illis, ſive oſcillationibus, iſochroni.

XLVIII.

PROBLEMA III.

Eſto corpus grave, cujus ſectio verticalis, tranſiens per Centrum gravitatis G, ſit curva qualiſcunque LMAN: incumbatque corpus plano horizontali PH in puncto A, ita ut AG ſit verticalis, ſeu ad angulos rectos cum horizontali PH; quo fiet, ut corpus maneat in æquilibrio. Quod ſi nunc tantillum rotetur corpus, per arculum minimum A*b*, cadente puncto *b* in B, in quo jam tanget planum horizontale PH; evidens eſt corpus in hoc ſtatu ſubſiſtere non poſſe, ſed alterutrum fieri, ut, vel porro præceps rotando labatur verſus H, vel remeet ad priſtinum ſitum, & ultra nonnihil verſus P, unde eundo & redeundo ſæpius oſcillationes faciet; qui noſter eſt caſus, quem determinare debemus. Prius fieret, hoc eſt, præcipitaretur corpus, ſi centrum C circuli oſculantis curvam MAN in puncto A, eſſet infra centrum gravitatis G; poſterius vero fiet ſi C eſt ſupra G, prouti hic ſupponimus.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 17.

XLIX.

Finge jam corpus rotari per arculum minimum A*b*, & cadere punctum *b* in B; quo motu exiguo puncta C & G deſcri-

bent duas lineolas horizontales CE & GF: quarum illa CE æqualis erit ipſi Ab vel AB; hæc vero GF, quamvis revera ſit arculus naſcens alicujus Cycloïdis protenſæ, in qua punctum G eſt infimum, & F ſupra G aſcendit, ſed infinities minus quam eſt longitudo GF, ita ut GF pro recta horizontali ſumi poſſit, quæ erit ad CE vel AB, ut ſe habet AG ad AC; id quod patet ex natura generationis Cycloïdalium. Quare ducta recta AE tranſibit per punctum F, facietque angulum CAE æqualem angulo contactus bAB; conſiderando nempe circulum oſculatorem, ut Polygonum infinitorum laterum. Porro puncta F & B conjungantur per rectam FB, quæ ad curvedinem naſcentem GF erit normalis in F; atque ex F demittatur FD parallela verticali AC. Dicantur autem $AG = a$, $AC = b$, AB vel $CE = x$; proinde GF vel $AD = \frac{ax}{b}$, $BD = x - \frac{ax}{b} = \left(\frac{b-a}{b}\right) x$.

L.

Sit item vis acceleratrix naturalis $= g$, maſſa totius corporis $= M$, adeoque pondus ſeu vis motrix abſoluta $= gM$; quæ collecta in Centro gravitatis tranſlato in F, niſum exerit ad redeſcendendum per curvedinem FG, qui niſus conſiſtit in vi motrice oriunda ex vi abſoluta gM, & quæ invenitur per decompoſitionem, faciendo, Ut ſe habet FB ad DB, ita erit gM ad $\frac{gM \times DB}{FB}$ = [quia FB æqualis cenſeri poteſt ipſi FD, vel AG, ob differentiam inaſſignabilem] $\frac{gM \times DB}{AG} = gM \times \left(\frac{b-a}{ba}\right) x$ = vi motrici qua corpus urgetur ad deſcendendum per arculum FG.

L I.

Quærenda eſt inſuper vis acceleratrix, ex principio noſtro expli-

explicato in §§. 8 & 9. Reſolvendo ſcilicet [ſicuti jam aliquoties in hoc ſcripto fecimus] corpus LMAN in particulas minimas p, easque multiplicando per rr, quadrata ſuarum reſpective diſtantiarum ab axe rotationis perpendiculari ad ſectionis planum LMAN, qui axis ſucceſſive tranſit in ſingula puncta lineolæ infinite parvæ AB, quorum quodlibet inſervit pro fulcro immobili, circa quod per momentum corpus aliquantillum gyratur; ita ut axis tanquam in ſitu invariabili conſiderari poſſit. Aggregatum igitur iſtorum productorum diviſum per quadratum diſtantiæ Centri gravitatis F vel G, hoc eſt, $\frac{\int rrp}{aa}$ dabit corpus in Centro gravitatis concentrandum, & pro corpore dato LMAN ſubſtituendum, ad quod vis motrix $gM \times (\frac{b-a}{ba})\, x$ applicata eandem accelerationem pareret, quam producit in corpore dato. Atque ita dividendo vim motricem per maſſam corporis ſubſtituendi, habebimus vim acceleratricem $= gM \times (\frac{b-a}{ba})\, x : \frac{\int rrp}{aa} = gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\, x$. Faciendo itaque, per *Lemma* ad §. 39, hanc analogiam, Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $gM \times (\frac{ba-aa}{b\int rrp})\, x$ ad vim acceleratricem naturalem g; ita longitudo excurſionis GF, ſeu $\frac{ax}{b}$, ad longitudinem quæſitam Penduli ſimplicis iſochroni, quæ ergo reperietur $= \frac{\int rrp}{M \times (b-a)}$.

COROLLARIUM.

Si $b = a$, foret longitudo Penduli iſochroni infinita, adeoque corpus ex puncto contactus A in punctum contactus B rotando inflexum, indigeret tempore infinito ad redeundum in priſtinum ſitum; hoc eſt, plane non moveretur ſponte. Quod vel ex eo quoque prævideri poterat, quia, centro circuli oſculatoris C coaleſcente cum Centro gravitatis G, non poteſt corpus

Digitized by Google

regredi, neque etiam præceps prolabi: ergo manebit immotum, ſicuti ſequitur ex eo quod jam ſupra §. 48 innuimus.

L I I.

E x e m p l u m I.

Eſto corpus propoſitum ſegmentum Sphæræ, cujus radius ſit ipſum b, ſpectetque ejus vertex deorſum in quo tangat planum ſuper quo titubare debet; habeatque ſegmentum pro altitudine, quamcunque y. Invenio [ſalvo errore calculi] longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus hujus ſegmenti, hoc eſt, $\frac{\int rrp}{M\times(b-a)} = \frac{40bby - 6y^3}{60bb - 60by + 15yy}$. Si ſegmentum ſphæricum abit in Sphæram totam, ſeu ſi $y = 2b$; erit Penduli longitudo $= \frac{32b^3}{0bb} = \infty$, adeoque infinita, ut fieri par eſt: Sphæra enim tota in omni ſitu quieſcere debet. Pendulum quippe longitudinis infinitæ, requirit tempus infinitum ad unicam oſcillationem faciendam, hoc eſt, omnino quieſcit. Si vero ſegmentum ſit hæmiſphærium, ſeu ſi $y = b$; prodibit longitudo Penduli $= \frac{34b}{15} = 2\frac{4}{15}b$; quod per experientiam verificari poterit.

L I I I.

E x e m p l u m II.

Pro altero exemplo proponatur Conoïdes parabolicum, per revolutionem Parabolæ ordinariæ generatum, cujus parameter ſit $= 2b$, altitudo a vertice inverſo, ſeu puncto infimo $= y$. Calculus monſtrabit quod $\frac{\int rrp}{M\times(b-a)} = \frac{4by + 3yy}{6b - 4y} =$ longitudini Penduli iſochroni. Si $6b = 4y$; ſeu $y = \frac{3}{2}b$, quo caſu Centrum gravitatis Conoïdis coincidit cum centro circuli oſculatoris; erit longitudo Penduli infinita; adeoque hic pariter Conoïdes nonnihil inclinatum manebit in quiete; per conſequens non

non oſcillabitur. Quod quidem in genere ita fiet, quotieſcunque ſit $b = a$: tunc enim ſemper eſt $\frac{\int rrp}{M.(b-a)} =$ infinito. Quod ſi, in hoc exemplo, eſſet $y = b$, ſeu æqualis ſemi-parametro, haberetur longitudo Penduli iſochroni $= \frac{7}{2} b = 3\frac{1}{2} b$.

L I V.

S C H O L I U M.

Problema generalius propoſitum ſolvi poteſt, ſupponendo nempe ſuperficiem PH, cui incumbit corpus LMAN, non eſſe planam, ſed quamcunque aliam datam, concavam inſtar patellæ, ſuper qua immobili oſcillationes corporis titubantis determinandæ ſint per longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni.

In hoc caſu, ante omnia notandum, lineolam CE non eſſe æqualem ipſi AB; ſed eam haberi, ſi prolongetur in mente verticalis AC ad punctum O, ita ut AO ſit radius oſculi ſectionis ſuperficiei PH in puncto contactus A: tunc enim ducta BO, abſcindet ex horizontali CE veram longitudinem CE. Quare ſi dicatur AO $= c$, quæ data eſt, ob datam curvedinem lineæ PAH in puncto A; erit, retentis reliquis denominationibus, AO : AB = CO : CE, hoc eſt $c : x = c - b : \frac{c-b}{c} x =$ CE. Faciendo porro AC : CE = AG : GF, ſeu $b : \frac{c-b}{c} x = a : \frac{ac-ab}{bc} x =$ GF = AD. Hinc BD $= x - \frac{ac-ab}{bc} x = \frac{bc-ac+ab}{bc} x$.

Operando nunc in reliquis, ut factum eſt in §§. 50 & 51; invenietur longitudo Penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{(c-b)\int rrp}{M\times(bc-ac+ab)}$.

L V.

Hæc formula generalis complectitur utique præcedentem ſpecialem;

cialem: nam ſi ſuperficies concava habet radium oſculatoris in A infinitum, eadem eſt ac ſi in A eſſet plana: verum in hoc caſu, ubi b evaneſcit juxta c, formula noſtra generalis mutatur in hanc $\frac{ſrrp}{M\times(b-a)}$, quæ prorſus eſt eadem, quam invenimus pro plano horizontali PH.

Denique examinandum, an & qua conditione ſuperficies PAH poſſit eſſe convexa, ut ſuper ea oſcillari queat corpus LMAN. In hunc finem, ponendum tantum eſt c negativum; habebitque expreſſio generalis hanc formam $\frac{(-c-b)ſrrp}{M\times(-bc+ac+ab)}$, vel, mutatis ſignis in utroque termino, hanc $\frac{(c+b)ſrrp}{M\times(bc-ac-ab)}$; unde patet, modo $bc-ac$ ſit majus quam ab, ſeu c majus quam $\frac{ab}{b-a}$, corpus poſſe oſcillari. Secus vero, ſi c minus fuerit quam $\frac{ab}{b-a}$, ultro ſequitur corpus inclinatum non poſſe oſcillando ad priſtinum ſitum redire; ſed protinus præcipitatum iri: quod quidem ſemper ita eveniet, quotieſcunque valor formulæ in uno, vel altero, ſive convexitatis, ſive concavitatis, evadit negativus.

L V I.

De Pendulo luxato, & de ejus reductione ad Pendulum ſimplex iſochronum.

TAB. LXXXVI. *Fig.* 18. Huc pertinent *Pendula*, quæ vocari poſſunt *luxata*. En eorum naturam: Finge Syſtema corporum, vel quamcunque figuram corpoream RSLT, quæ habeat ex Centro gravitatis C prodeuntem rectam CRB rigidam, ſeu inflexilem, ita ut eundem ſemper ſitum ſervet cum partibus figuræ RSLT, dum oſcillatur. Ad extremitatem B concipe alligatum filum, flexile, ſeu inflexile, nil refert; modo, ſi ſit inflexile, habeat in B articulationem, cujus ope

ope inflecti poſſit in angulum OBC, inſtar baculi circa medium luxati in duas partes. Altera extremitate ex puncto fixo O ſuſpenſa, concitari intellige corpus RSLT in motum oſcillatorium minimum: habebis, quod voco, *Pendulum luxatum.* Quæritur longitudo Penduli ſimplicis, quod ſit cum luxato iſochronum?

PRÆPARATIO.

Sit OV recta verticalis ducta per punctum ſuſpenſionis O, atque jam oſcillando perveniſſe ponatur Pendulum luxatum in ſitum OBRSLT; ubi ſtatim video, ob impetum corporis id fieri, ut ſitus partis BC cadat extra ſitum partis OB. Concipiatur ergo pars rigida CB, producta donec ſecet verticalem OV in puncto A; quod erit punctum ſuſpenſionis, circa quod Pendulum inſtar ordinarii oſcillatur, quamvis agitatum a vi motrice nondum cognita, & quæ eſt quærenda, ut Pendulum noſtrum, ex A ſuſpenſum, comparari poſſit cum longitudine Penduli ſimplicis iſochroni. In hunc finem conſiderentur ſequentia.

1°. Pondus totius maſſæ ita agit, ac ſi in Centro gravitatis C eſſet concentratum; adeoque ſi maſſa corporis RSLT dicatur $= M$, & gravitas ſeu vis acceleratrix naturalis $= g$; erit vis motrix immaterialis in C applicanda $= gM$.

2°. Vis iſta gM [ducta verticali CH, & prolongata BC ad D] impenditur tota in tenſionem rectæ rigidæ BC, non obſtante quod ejus directio verticalis CH differat a directione CD: nam, ob angulum HCD acutiſſimum, vis tenſionis cenſetur æqualis vi motrici gM.

3°. Ab altera parte filum OB, ob angulum ABO pariter acutiſſimum, eadem vi reſiſtit qua tenditur; unde punctum luxationis B, trahitur & retrahitur viribus æqualibus.

4°. Ex directionibus propriis virium in C & B, quarum illa eſt ſecundum verticalem CH, hæc vero ſecundum BO deduci debent per decompoſitionem vires normales ad BC in C & B. Ductis itaque horizontalibus DV, CE, BF, & AN normali ad

ad OB; erit vis motrix normalis in $C = \frac{DH}{DC} \times g\ M =$ $\frac{CE}{CA} \times gM = \frac{BF}{AB} \times gM$; altera vero normalis in $B = \frac{AN}{AB} \times gM$; adeoque vis normalis in C ad vim normalem in B, ut $\frac{BF}{AB} \times gM$ ad $\frac{AN}{AB} \times gM$, ut BF ad AN, ut OB ad OA.

5°. Habemus hoc modo vectem BC, cujus duæ extremitates C & B urgentur normaliter; ſed contrario ſenſu, hoc eſt, ob angulum acutiſſimum CAE, tanquam horizontaliter in directione CE & in directione FB; illa ad verticalem, hæc a verticali OV tendendo.

6°. Hæ duæ vires normales, quarum una reſpectu alterius eſt negativa, habebunt commune centrum æquilibrii in D infra C; quod ita debet eſſe comparatum, ut ſit vis normalis in C ad vim normalem in B, ut BD ad CD. Ex tribus igitur præmiſſis, invenitur quartum, faciendo nempe per diviſionem rationum, ut ſe habet vis normalis in C minus vi normali in B, ad hanc vim normalem in B, ita BD — CD, ſeu BC, ad CD. Adeoque etiam [n. 4.] $OB - OA : OA = BC : CD$. Verum, ob angulos O & ABO acutiſſimos, cenſetur $OB - OA = AB$, & ſic habebitur $AB : OA = BC : CD$; unde $CD = \frac{OA \times BC}{AB}$.

7°. Quod ſi jam removeantur vires normales, quæ ſunt in C & B, illæque ambæ applicentur ſub ſuis directionibus ad centrum æquilibrii D; ita ut inde reſultet unica vis motrix $= \frac{BF}{AB} \times gM - \frac{AN}{AB} \times gM =$ (angulo FAB — ang. ABN)$\times gM$ = angulo $FOB \times gM$. Hæc certe vis motrix normaliter applicata in D, atque tendens ad verticalem OV, eodem modo urgebit corpus RSLT, ac facerent duæ illæ vires ſeorſim applicatæ in C & B.

8°. Habemus ergo caſum in ſuperioribus explicatum [§.18] de natura Centri rotationis; ubi nimirum demonſtravi, ſi corpus

pus aliquod', vel ſyſtema corporum firmiter inter ſe cohærentium, urgeatur a vi quadam motrice, cujus directio non tranſeat per Centrum gravitatis corporis vel ſyſtematis corporum, id futurum eſſe, ut rotari incipiat circa punctum quodpiam, quod manebit immobile, quodque ideo vocavi *Centrum rotationis ſpontaneum*. Hujus naturam talem eſſe oſtendi [§. 16, & ſeqq.], ut ſumto puncto applicationis vis motricis normalis ad rectam per Centrum gravitatis tranſeuntem pro puncto ſuſpenſionis, Centrum illud ſpontaneum fiat ſimul Centrum oſcillationis corporis vel ſyſtematis corporum; per conſequens vice verſa, ut notum eſt, ſi Centrum ſpontaneum pro puncto ſuſpenſionis ſumatur, ut punctum applicationis vis motricis normalis evadat ſimul Centrum oſcillationis.

9°. Hinc concludimus, punctum A, quod modo ſupra [ante n. 1] vidimus debere conſiderari in Pendulo luxato tanquam punctum ſuſpenſionis Penduli ordinarii circa A oſcillantis, ſimul fore Centrum ſpontaneum, quatenus corpus RSLT urgetur a vi motrice normaliter in D applicata. Duplex iſta conſideratio manu ducet ad æquationem quæſitam, ut ſequitur.

SOLUTIO.

His ita præparatis, dicantur $OB = a$, $BC = b$, $AB = x$, adeoque $OA = a - x$; vis acceleratrix naturalis, qua ſcilicet corpora gravia naturaliter accelerantur, $= g$; maſſa corporis $RSLT = M$; ejuſque pondus, ſeu vis motrix in directione verticali $= gM$.

Hinc [n. 6] $CD = \frac{OA \times BC}{AB} = \frac{(a-x).b}{x} = \frac{ab}{x} - b$; cui addendo AC, ſeu $b + x$, habetur tota $DA = \frac{ab}{x} + x$. Jam vero, ex natura Centri ſpontanei rotationis A, & ex demonſtratis *Hugenianis*, erit eadem $DA = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$;

adeoque $\frac{ab}{x} + x = b + x + \frac{\int ttp}{(b+x)M}$, proinde $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttp}{(b+x)M}$

Ut nunc commodius exprimatur $\int ttp$, per quod intelligitur aggregatum omnium productorum, quæ fiunt multiplicando ſingulas particulas minimas p corporis M per quadrata tt diſtantiarum ſuarum a recta per Centrum gravitatis C tranſeunte & parallela axi rotationis; notandum eſt, ſi corpus RSLT ſuſpenderetur ex puncto B, tanquam fixo ſuppoſito, fore ejus Centrum oſcillationis G datum, & ita quidem ut $BC \times CG. \times M = \int ttp$, quæ eſt generalis proprietas Pendulorum ordinariorum jam ab HUGENIO demonſtrata.

Dicatur itaque $CG = c$, eritque $\int ttp = bcM$, quo ſubſtituto in æquatione modo ante inventa $\frac{ab}{x} - b = \frac{\int ttb}{(b+x)M}$, prodibit $\frac{ab}{x} - b = \frac{bcM}{(b+x)M}$, quæ reducta dat $xx = (a - b - c)x + ab$, unde $x = -\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a - b - c)^2 + 4ab)}$.

Supereſt ut determinemus longitudinem Penduli ſimplicis luxato iſochroni; id quod peragitur in modum ſequentem. Conſiderare ſtatim jam licet ABC ut vectem rigidum, cujus hypomochlium fixum eſt in A, quique urgetur duabus viribus motricibus abductis, una in C verticaliter deorſum tendente, altera in B contrario niſu tendente verticaliter ſurſum; illa prior in C eſt ipſa vis ponderis $= gM$, hæc altera vero in $B = \frac{a-x}{a} gM$ [per n. 4]; ſunt enim vires verticales ipſis normalibus proportionales.

Subſtituatur nunc, loco vis motricis quæ eſt in B, alia in punctum C; quæ, ex natura vectis, idem cum illa habeat momentum; faciendo nempe ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut $b + x$ ad x, ita $\frac{a-x}{a} gM$ ad $\frac{ax - xx}{ab + ax} gM$; erit hæc vis ſubſtituenda in C pro illa in B; atque ita habebitur in C unica vis motrix

trix $= gM - (\frac{ax - xx}{ab + ax})\, gM = \frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM$; auferendo ſcilicet ſubſtituendam $\frac{ax - xx}{ab + ax}$ a priori gM, utpote ei contrariam.

Quod ſi nunc hanc vim motricem $\frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM$ dividamus per maſſam in C concentrandum, ſicuti docuimus in nova noſtra Theoria de Centro oſcillationis in Pendulis ordinariis (§. 9) expoſita, obtinebimus $\frac{ab + xx}{ab + ax}\, gM : \frac{(b + x)^2 M + bcM}{(b+x)^2}$, ſeu $\frac{(b+x) \times (ab + xx) g}{a(b+x)^2 + abc} =$ vi acceleratrici maſſæ in C concentratæ.

Tandem, ex notiſſimo illo Theoremate, a nobis quoque dudum * demonſtrato, quod nempe longitudines Pendulorum ſimplicium iſochronorum ſint proportionales viribus acceleratricibus quibus animantur: dicendum eſt, Ut ſe habet inventa vis acceleratrix $\frac{(b+x)\times(ab+xx)g}{a(b+x)^2+abc}$ ad vim acceleratricem naturalem g, hoc eſt. ut $(b+x)\times(ab+xx)$ ad $a(b+x)^2+abc$, ita longitudo AC, ſeu $b+x$, ad quartam $\frac{a(b+x)^2+abc}{ab+xx}$, quæ erit longitudo quæſita Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato.

In hac expreſſione, ſubſtituendus jam eſſet valor ipſius x ſupra inventus; ſed operatio nimis longa foret: quare per compendium procedamus. Vidimus, ab initio Solutionis, DA duplici modo expreſſam, ſcilicet $DA = \frac{ab}{x} + x = \frac{ab+xx}{x}$, & paulo poſt $DA = b + x + \frac{fttb}{(b+x)M} =$ [ob $fttb = bcM$] $b + x + \frac{bc}{b+x} = \frac{(b+x)^2+bc}{b+x}$; ac proinde $\frac{ab + xx}{x} = \frac{(b+x)^2+bc}{b+x}$; unde ſequitur fore $(b+x)^2+bc : ab+xx$

 $=b$

* N°. XC. pag. 518. Tom. I.

$= b + x : x$; adeoque ſi in longitudine noſtra $\frac{a(b+x)^2 + abc}{ab + xx}$, tam in numeratore quam denominatore, pro $(b+x)^2 + bc$ & $ab + xx$ ſcribantur eorum proportionales $b + x$ & x; prodibit fractio æquivalens $\frac{ab + ax}{x} =$ longitudini quæſitæ.

Nunc demum pro x ſubſtituatur valor inventus $\frac{1}{2}(a - b - c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2 + 4ab)}$, & reſultabit $\frac{ab + ax}{x}$ ſeu $a + \frac{ab}{x}$

$$= a + \frac{2ab}{a - b - c \pm \sqrt{((a-b-c)^2 + 4ab)}} = a + \frac{2ab(a - b - c \mp \sqrt{((a-b-c)^2 + 4ab)})}{-4ab} = a - \frac{1}{2}(a - b - c \mp \sqrt{((a-b-c)^2 + 4ab)}) = \frac{1}{2}(a+b+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-b-c)^2 + 4ab)}$$

$=$ longitudini Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo luxato *Q. E. I.*

NOTA. Ut paulo ſimplicius exprimatur hæc longitudo; ſcribi poteſt una littera e pro $b + c$, nempe pro data BG; & erit longitudo quæſita $= \frac{1}{2}(a+e) \pm \frac{1}{2}\sqrt{((a-e)^2 + 4ab)}$.

COROLLARIUM I.

Si $a = 0$; fit longitudo quæſita $= \frac{1}{2}(b+c) \pm \frac{1}{2}(b+c) = b + c$, vel $= 0$. Prior $b + c$ manifeſte ſatisfacit; hoc enim in caſu, puncto B abeunte in punctum ſuſpenſionis, Pendulum luxatum mutatur in Pendulum ordinarium compoſitum, cui utique reſpondet Pendulum ſimplex iſochronum habens, per hypotheſin, longitudinem $= b + c = e$. Alter vero valor $= 0$, hic eſt inutilis.

COROLLARIUM II.

Si $a = b + c$; erit longitudo Penduli ſimplicis luxato iſochroni $= a \pm \sqrt{ab}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Si $b = o$, quo caſu $c = \infty$; erit longitudo quæſita $\frac{1}{2}(a + c) \pm \frac{1}{2}(a - c) = a$, vel $= c$; ubi prior a ſola ſatisfacit; quod per ſe clarum eſt: in hoc quippe caſu punctum luxationis B, exiſtens in ipſo Centro gravitatis C, facit ut, inter oſcillandum, quælibet recta conjungens in corpore duo puncta moveatur motu ſibi ſemper parallelo; & proinde tantundem eſt, ac ſi tota corporis maſſa eſſet in Centro gravitatis concentrata; ita ut Pendulum non differat a Pendulo ſimplici, cujus longitudo $= a$. Interim alter valor $c = \infty$, tanquam huc non quadrans, rejici debet.

LVII.

SCHOLIUM.

Concipiamus jam partem OB ſupra punctum luxationis B eſſe etiam rigidam; eamque oneratam novo pondere datæ figuræ, cujus Centrum gravitatis ſit in puncto aliquo dato P in ipſa recta OB aſſumto. Methodus noſtra determinandi longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, etiam ad hunc caſum porrigitur. Nam, pro corpore in P collocato, cujus maſſa dicatur $= m$, ſubſtitui poteſt aliud collocandum & concentrandum in puncto B (per §. 9); vocetur autem maſſa illius corporis ſubſtituenda in B $= \mu$, vis itaque motrix, quæ erat in P, $= gm$, nunc erit in P ſupponenda $= \frac{OP}{OB} \times gm$. Hoc modo fit, ut recta OB eadem vi ad motum angularem incitetur, ſive maſſa m in P locanda agitetur per vim motricem gm, ſive in B locetur maſſa μ, & urgeatur per vim motricem $\frac{OP}{OB} \times gm$. Habemus igitur vectem BC, oneratum duobus ponderibus in C & in B, quorum corpora, vel maſſæ corporum, ſunt M & μ, quæ ut unum ſyſtema conſiderari debent; vis motrix in C

$= gM$ altera in B $= \frac{OP}{OB} \times gm - gM$, ſive $gM - \frac{OP}{OB} \times gm$, prout una vel altera prævalet. Atque ita res reducta erit ad caſum præcedentem: Sufficit veſtigia monſtraſſe, iis quibus animus eſt plenariam tentare ſolutionem.

Poſſemus ſi res tanti eſſet, extendere hoc negotium ad Pendula, in quibus duo, imo plura adeſſent puncta luxationum; ſed talia relinquimus calculatoribus, qui otio abundant.

L V I I I.

De Pendulis ſympathicis.

Hoc nomine voco bina Pendula a communi quodam corpore gravi agitata, ita ut unum ſine altero moveri non poſſit. Ad clariorem rei intelligentiam, concipe corpus grave, vel ſyſtema corporum quotcunque, per cujus Centrum gravitatis C trajectus ſit paxillus tenuiſſimus in ſitu horizontali ACB, cujus duo brachia ſint datæ longitudinis, nempe $AC = a$, & $BC = b$; unde totius paxilli longitudo $= a + b = c$. Ad extremitates A & B annexa ſint duo fila flexilia, aut etiam rigida, ſed tunc habentia in A & B luxationes, ita ut cum recta AB horizontali in angulos poſſint inflecti, prout res poſtulabit.

TAB LXXXVI. *Fig.* 19.

Sint fila verticaliter erecta $AD = m$, $BE = n$; atque ſuſpenſa ex punctis fixis D & E, ita ut corpus grave vel Syſtema corporum ſuſtentetur a duabus potentiis quas opponunt fila AD & BE. Finge jam paxillum AB, ex ſitu quietis dimoveri paululum in plano DABE, & acquirat ſitum proximum ab; haud ægre percipis, mox inde oriri motum oſcillatorium in eodem plano DABE, rectamque ab tam parum ſuper AB elevari, ut cenſeri poſſit in eadem ſemper horizontali ultro citroque inſtar ſerræ reciprocari.

Ex quo motu parallelo ſingulorum corporis punctorum oppido patet, oſcillationes eodem modo fieri, ſive diffuſum ſit corporum ſyſtema, ſive concentratum ſupponatur in ſuo Centro gravitatis C.

Quare

Quare ſi maſſa, vel quantitas materiæ collectæ in C, dicatur $=M$, vis acceleratrix naturalis $=g$; erit pondus, vel vis motrix abſoluta $=gM$. Hinc, ex natura vectis, vis motrix quam ſuſtinet filum $AD=\frac{BC}{AB}\times gM=\frac{b}{c}\times gM$, & ea quam ſuſtinet filum $BE=\frac{AC}{AB}\times gM=\frac{a}{c}\times gM$. Sit nunc excurſio Aa vel $Bb=x$, erit, ob angulos ADa, BEb acutiſſimos, vis motrix, qua retrahitur punctum a verſus ſuum ſitum æquilibrii in $A=\frac{BC}{AB}\times gM\times\frac{Aa}{aD}=\frac{b}{c}\times gM\times\frac{x}{m}$; pariterque vis motrix qua retrahitur punctum b verſus ſuum ſitum æquilibrii in $B=\frac{a}{c}\times gM\times\frac{x}{n}$. Quia autem duæ iſtæ vires retrahentes conſpirant ad reſtituendum paxillum cum pondere in ſitum æquilibrii, quod eſt in C; habebimus totalem vim motricem ſecundum horizontem agentem $=\frac{gM}{c}\times x\times(\frac{b}{m}+\frac{a}{n})$, quæ diviſa per quantitatem materiæ movendæ, hoc eſt, per maſſam M, dat vim acceleratricem $=\frac{gx}{c}\times(\frac{b}{m}+\frac{a}{n}.)$

Inſtituendo igitur, per noſtram Regulam in ſuperioribus oſtenſam, hanc analogiam: Ut ſe habet vis acceleratrix inventa $\frac{gx}{c}\times(\frac{b}{m}+\frac{a}{n})$ ad vim acceleratricem naturalem g, ita longitudo excurſionis Aa vel Bb, vel x, ad quartam $\frac{c}{\frac{b}{m}+\frac{a}{n}}$, hoc eſt ad $\frac{mnc}{ma+nb}$; erit hæc æqualis longitudini Penduli ſimplicis Pendulo noſtro ſympathico iſochroni. *Q. E. I.*

Corollarium I.

Si filorum longitudines AD & BE ſunt æquales, id eſt, ſi $m=n$ fiet $\frac{mnc}{ma+nb}=\frac{mc}{a+b}=m$; ut quidem fieri prævideri pote-

poterat: ambæ enim partes Penduli ſympathici nil aliud ſunt quam Pendulum ſimplex, ſibi ipſi utique iſochronum.

COROLLARIUM II.

Exiſtente longitudine fili BE valde magna, reſpectu alterius AD; ita ut cenſeri poſſit $n = \infty =$ infinita; fiet $\frac{mnc}{ma + nb} = \frac{mc}{b} = \frac{ma + mb}{b} = \frac{ma}{b} + m$. Quod ſi præterea $a = b$; hoc eſt, ſi Centrum gravitatis C fuerit in medio intervalli filorum; erit longitudo Penduli ſimplicis iſochroni $= 2m$, ſeu dupla longitudinis fili AD.

COROLLARIUM III.

Cæterum generaliter verum eſt longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni, ſemper conſiſtere mediam inter longitudines fili longioris BE & brevioris AD; ſeu, quod eodem recidit, fore ſemper $m > \frac{mnc}{ma + nb} > n$; cujus demonſtrationem, ob facilitatem non addo. Hinc patet ratio denominationis *Penduli ſympathici*: cum enim Pendulum longitudinis minoris AD, ſi independenter a majori oſcillari deberet, majorem haberet ad oſcillandum vim acceleratricem, & viciſſim minorem, ſi alterum per ſe ſolum oſcillaret; qua de cauſa, quaſi ipſa natura hoc obſervare videtur, ut ad oſcillationes mutuo conſenſu ſimultaneas faciendas, Pendulum brevius AD aliquid de vi ſua acceleratrice amittat, alterum longius BE acquirat; quo, veluti ex compacto, ſimul eant redeantque ſine impedimento.

LIX.

NOTA. Quod ſupra in Scholio ad §. 57, monuimus, ad hoc quoque genus Pendulorum ſympathicorum feliciter accommodari poteſt; etiamſi alias res videatur difficultatis plena.

Poſito

Poſito namque fila AD, BE, quæ ſuſtinent paxillum AB cum pondere in C, eſſe rigida, propereaque, ut inflecti poſſint circa A & B, gaudere ibi articulationibus, ſeu punctis luxationum: hactenus eſt caſus quem modo ſolitum dedimus. Sed ſi jam porro velimus inſidere filis rigidis pondera data, quorum Centra gravitatis ſint in locis datis *p*, *q*; hic caſus, etſi pluſculum difficultatis in ſe contineri videtur, reduci tamen poteſt ad Pendula ſympathica pura, ſine ponderibus *p* & *q* conſiderata.

Nam ſi, ut fecimus in §. 37, tollamus corpora *p* & *q*, eorumque loco ſubſtituamus duo alia, in punctis A & B locanda & concentranda, ſecundum legem in §. 9 expoſitam, habeantque debitam ſuam vim motricem; ut nimirum fila eadem vi incitentur ad motum angularem circa centra D & E, qua incitarentur, ſi corpora in *p* & *q* manerent.

Quo facto, habebimus paxillum AB oneratum Syſtemate trium corporum in A, B, & C, una cum ipſorum viribus motricibus datis, in quarum communi Centro gravitatis tria iſta corpora collecta dabunt caſum ſimplicem binorum Pendulorum ſympathicorum; atque ſic quæſito erit ſatisfactum. *Q. E. F.*

N°. CLXXVIII.

DE PENDULIS MULTIFILIBUS.

PROBLEMA.

Dato Pendulo NLK *circa punctum* N *oſcillante, quod compoſitum ſit duobus filis* NL, LK, *cum appenſis duobus ponderibus* L, K, *quæ eodem tempore ad ſitum verticalem* NGM *perveniant, deſcribendo arcus* LG, KM, *quorum ille, nempe* LG, *erit utique circularis, hic vero* KM *induet curvaturam quam exigit motus: Quæritur Lex oſcillationis, ſuppoſitis filorum* NL, LK *longitudinibus æqualibus?* TAB. LXXXVII. N°. CLXXVIII Fig. 1.

ANALYSIS.

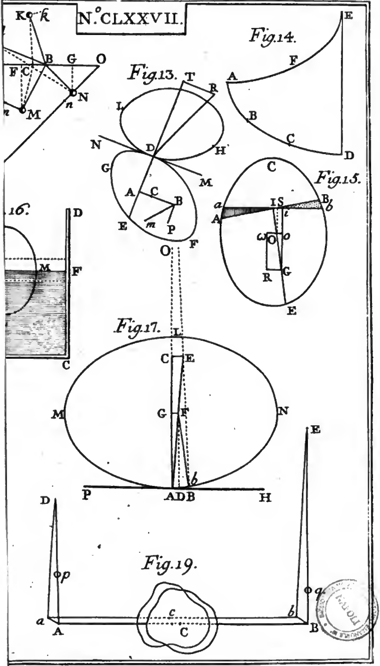
I.

Sit corpus L $= a$, ejus pondus [ſupponendo vim gravitatis $= g$] $= ga$; corpus K $= b$, ejus pondus $= gb$; vis tenſionis fili LK $= T$; ductiſque ad axem verticalem NM perpendicularibus LH, KI, ſit GH $= y$, MI $= q$; arcus GL $= r$, L$l = dr$, MK $= s$, K$k = ds$, HL $= e$, IK $= ne$; ſupponendo ſcilicet HL ad IK ut 1 ad n; quæ ratio utique conſtans erit, ſi oſcillationes ſint minimæ: ſed primo rem conſiderabimus generaliter. Porro ſit NL $=$ LK $= c$, & prolongando KL donec ſecet verticalem NM in F, ductiſque in kl elementis normalibus Lp, Ko, ſit $lp = dx = ko$. Dicatur velocitas in L $= v$, & velocitas in K $= u$.

II.

Faciendum nunc eſt $dr : dy = ga : \frac{gady}{dr}$; quæ erit æqualis vi ponderis L ſecundum lL. Eſt $dr : dx = T : \frac{Tdx}{dr}$ æquale vi oppoſitæ a fili LK tenſione oriundæ, adeoque $\frac{gady - Tdx}{dr}$ æqualis vi motrici corporis L ſecundum lL; unde dividendo per maſſam a, habetur vis acceleratrix $= \frac{gady - Tdx}{adr}$. Hinc ergo, ex Principio Dynamico, $\frac{gady - Tdx}{a} = v.dv$; integrando, prodit $gy - \frac{1}{a}\int Tdx = \frac{1}{2}vv$. Simili modo invenitur $gq + \frac{1}{b}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$. Verum, ob iſochrona elementa lL, kK; erit $vv : uu = dr^2 : ds^2$; adeoque $dr^2 : ds^2 = gy - \frac{1}{a}\int Tdx : gq + \frac{1}{b}\int Tdx$; ex quo reperietur $T = \frac{gab}{dx} \times d(\frac{yds^2 - qdr^2}{adr^2 + bds^2})$.

III.



Digitized by Google

Digitized by Google

III.

Hoc ita ſe habet, quando ambæ curvæ ſunt datæ, quibus corpora L, K, durante motu inhærere coguntur: ſed ſi altera curva, ut MK*k*, eſt libere deſcribenda a pondere K, utpote quod ab una parte ſollicitatur ad deſcenſum a tenſione T in directione obliqua KL, ab altera vero parte a vi ponderis in directione verticali; quærendum eſt quanta vi hinc inde urgeatur in directione normali ad *k*K. Hoc fine, faciendum eſt K*k*:K*o* $[=ds:\surd(ds^2-dx^2)]=T:\frac{T\surd(ds^2-dx^2)}{ds}=$ vi normali ad partem concavam curvæ, & porro K*k*:K*f* $[=ds:\surd(ds^2-dq^2)]=gb:\frac{gb\surd(ds^2-dq^2)}{ds}=$ vi normali ad partem convexam curvæ. Hæ autem duæ vires directe oppoſitæ debent ſibi mutuo eſſe æquales; quia curva MK*k* libere deſcribitur; erit itaque $\frac{T\surd(ds^2-dx^2)}{ds}=\frac{gb\surd(ds^2-dq^2)}{ds}$; unde denuo $T=gb\surd\frac{ds^2-dq^2}{ds^2-dx^2}$. Æquando ambos valores ipſius T, prodit nova æquatio $ad(\frac{yds^2-qdr^2}{adr^2+bds^2})=dx\surd\frac{ds^2-dq^2}{ds^2-dx^2}$, vel $\frac{ayds^2-aqdr^2}{adr^2+bds^2}=\int dx\surd\frac{ds^2-dq^2}{ds^2-dx^2}$.

IV.

Hæc æquatio determinat naturam curvæ MK*k*, ejuſque relationem ad circulum GL*l*. Quod ſi jam invenire lubeat Legem oſcillationum minimarum Penduli flexilis NLK, ſupponendo ſcilicet arcus GL, MK infinite parvos, ſeu, ſi mavis, quam minimos; notare convenit, in hoc caſu confundi GL cum HL, MK cum IK, NL cum NH, FL cum FH, &c. hoc eſt, unam pro altera ſumi poſſe. Ex hac conſideratione, erit HG ſeu $y=\frac{HL^2}{2NL}=\frac{ee}{2c}$; item MI, ſeu $q=NM-NI=NL+LK-NI=NL+LK-NH-LR$

Aaa 2 =[ob

$= [$ ob $NL - NH = GH = \frac{HL^2}{2NL}$ & $LK - LR = \frac{RK^2}{2LK}] \frac{ee}{2c} + \frac{(n-1)^2.ee}{2c} = \frac{(nn-2n+2)ee}{2c}$. Porro, ob iſochronos arcus GL, MK, erit dr ad ds, ſeu Ll ad Kk, ut GL ad MK, hoc eſt, ut HL ad IK ſeu ut 1 ad n: quare $ds = ndr$: ponendo itaque $nndr^2$ pro ds^2, prodibit $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{nnay - aq}{a + nnb}$; ubi ſi pro y & q ſubſtituantur valores modo inventi, habebitur idem $\frac{ayds^2 - aqdr^2}{adr^2 + bds^2} = \frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)}$. Et ſic æquatio in fine articuli præcedentis mutatur in hanc $\frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)} = \int dx \sqrt{(\frac{ds^2 - dq^2}{ds^2 - dx^2})} = [$quia dq^2 & dx^2 evaneſcunt juxta $ds^2] \int dx$.

V.

Reſtat igitur ut quæratur valor ipſius dx, ſeu pl, ſeu ok; quod ſic fit. $KL : LF = KR : LH = n - 1 : 1$; unde $LF = \frac{1}{n-1} KL = \frac{c}{n-1}$. Et, quia triangulum LFN in N & L eſt acutiſſimum, cenſetur $LF + FN = NL = LK = c$; proinde $FN = c - \frac{c}{n-1} = \frac{(n-2).c}{n-1}$. Sed LF ad FN, hoc eſt $\frac{c}{n-1}$ ad $\frac{(n-2).c}{n-1}$, ſeu 1 ad $n-2$, ut ſinus anguli FNL. ſeu $\frac{HL}{NL}$ ſeu $\frac{e}{c}$, ad ſinum anguli FLN, qui per conſequens eſt $= \frac{(n-2).e}{c}$: angulus vero $FLN =$ ang. pLl, quia uterque eſt complementum anguli NLp; adeoque etiam $\frac{(n-2).e}{c} =$ ſinui anguli $pLl = \frac{pl}{Ll} = \frac{dx}{dr} = \frac{dx}{de}$; eſt enim [ob arcum GL minimum] $dr = de$; propterea $\frac{(n-2).ede}{c} = dx$;

&c.

& integrando $\frac{(n-2).ee}{2c} = \int dx =$ [per præced.] $\frac{(n-1).aee}{c.(a+nnb)}$. Reductione peracta, emergit hæc æquatio $nnb = 2nb + a$, unde $n = 1 \pm \sqrt{(\frac{a+b}{b})}$.

COROLLARIUM.

Si pondera a & b ſint æqualia; erit $n = 1 \pm \sqrt{2}$. Ubi notandum radicem affirmativam $1 + \sqrt{2}$ eſſe ſumendam, cum pondera ad eandem partem verticalis NM conſtituuntur; ſed negativam affirmative ſumtam $-1 + \sqrt{2}$, cum pondera conſtituuntur ad partes diverſas ipſius NM.

VI.

Supereſt ut determinetur longitudo Penduli ſimplicis, quod Pendulo flexili NLK ſit iſochronum. Pro hoc opus eſt, ut ſumatur valor vis acceleratricis corporis L artic. 1°. inventæ $= \frac{gady - Tdx}{adr}$, ubi [art. 4.] $y = \frac{ee}{2c}$, proinde $dy = \frac{ede}{c}$; $T = gb$ [art. 3 & 4], $dr = de$ [art. 5], $dx = \frac{(n-2).ede}{c}$ [ibid.], quæ ſi ſubſtituantur, reperietur vis acceleratrix ponderis L $= \frac{g(a - nb + 2b)}{ac}$; eaque ſi dividatur per e, ſeu per longitudinem viæ deſcribendæ GL, vel HL; habetur intenſitas vis acceleratricis $= \frac{g(a - nb + 2b)}{ac}$. Sit nunc D, longitudo quæſita Penduli ſimplicis agitandi per naturalem vim gravitatis g, & ſemi-oſcillationes per arcus minimos z peragentis; erit, ut conſtat, ejus vis acceleratrix $= \frac{gz}{D}$; cujus intenſitas [dividendo per z] habetur $= \frac{g}{D}$. Oportet itaque has duas intenſitates eſſe æquales, ut obtineatur mutuus iſochroniſmus,

 unde

unde $\frac{a - nb + 2b}{ac} = \frac{1}{D}$; adeoque $D = \frac{ac}{a - nb + 2b}$; & in caſu ponderum a & b æqualium, erit $D = \frac{c}{3 - n}$; vel ſubſtituendo pro n ejus valorem inventum $1 + \sqrt{2}$ pro ponderibus ad eaſdem verticalis partes conſtitutis, provenit $D = \frac{c}{2 - \sqrt{2}}$; ſed exiſtentibus ad partes oppoſitas pro n ſcribendo $1 - \sqrt{2}$ dabitur $D = \frac{c}{2 + \sqrt{2}}$. *Quæ omnia erant invenienda.*

Idea ſolutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, ſeu quibuſcunque multifilibus.

I.

Vocentur nunc pondera incipiendo a ſupremo, A, B, C, D, &c. ſitque arcus GL, vel recta HL, quæ ei æqualis cenſetur $= e$, reliquæ ordine ſequuntur ne, me, pe, &c.; adeo ut illi arcus, vel rectæ ad verticalem perpendiculares, procedant ut numeri, n, m, p, quorum valores ſunt quærendi.

II.

Erit, ut ſupra invenimus §. 4, prima $HG = \frac{ee}{2c}$, ſecunda $IM = \frac{(1 + (n - 1)^2)ee}{2c}$, ita quoque tertia $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2)ee}{2c}$, quarta $= \frac{(1 + (n - 1)^2 + (m - n)^2 + (p - m)^2)ee}{2c}$, & ita conſequenter; altitudines ſcilicet punctorum L, K, &c. ſupra puncta infima G, M, &c.

III.

III.

Arcus curvarum GL, MK, &c. etſi revera non ſint circulares, excepto primo, quando tamen ſunt minimi, habentur pro circularibus, qui nempe curvas in punctis infimis oſculantur. Horum circulorum oſculantium inveniantur radii, quia iis in hoc ſcrutinio opus eſt; quod ſic fit. Radius primi arcus GL, quod per ſe patet, $= e$; radius ſecundi $MK = \frac{IK^2}{2IM} =$ (vid. §. 2 hujus) $\frac{nnc}{(1+(n-1)^2)}$; radius tertii $= \frac{mmc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2)}$; radius quarti $= \frac{ppc}{(1+(n-1)^2+(m-n)^2+(p-m)^2)}$; radius quinti = &c.

IV.

Ex his determinantur valores elementorum dx, quæ ſpectant ad duos quoſlibet arcus immediate ſe mutuo excipientes; nempe ſicuti lp, aut [quod idem eſt, ducta $l\pi$ ad LK normali] $L\pi$ vel $ok = \frac{(n-2).ede}{c}$ [vid. ſupra §. 5], quod exprimit dx, pertinens ad arcum primum GL & ſecundum MK; ita quoque inveniuntur valores elementorum dx, pro arcuum paribus ſequentibus; nempe pro ſecundo & tertio, pro tertio & quarto &c. adhibendo ſucceſſive modum quem adhibui in prædicto §. 5. Fingamus itaque [ne opus habeamus figuram per plures arcus continuare] ipſum arcum GL & arcum MK repræſentare arcum ſecundum & tertium: Erit $HL = nc$, & $IK = mc$; radiuſque circuli oſculatoris in $G = NL =$ [per præced.] $\frac{nnc}{1+(n-1)^2}$. Faciendo nunc [ut ſupra §. 5] $KL : LF = KR : LH$, quod nunc eſt $= m - n : n$, unde $LF = \frac{n}{m-n} KL = \frac{nc}{m-n}$, adeoque NF, ſeu $NL - LF = \frac{nnc}{1+(n-1)^2}$

$-\frac{nc}{m-n}$. Porro quia LF ad FN, ut ſinus anguli FNL ad ſinum anguli $FLN = pLl = Ll\pi$; prodibit ſinus anguli $Ll\pi$, hoc eſt $\frac{L\pi}{Ll}$, ſeu $\frac{dx}{nde} = \frac{FN}{LF} \times$ ſin. $FNL = (\frac{nnc}{1+(n-1)^2} - \frac{nc}{m-n} \times) \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc} : \frac{nc}{m-n} = \frac{(m-n)e}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)e}{nc}$ quare $dx = \frac{(mn-nn)ede}{c} - \frac{(1+(n-1)^2)ede}{c} = \frac{(mn-2nn+2n-2)ede}{c}$; pro arcu ſecundo & tertio. Simili modo inveniemus procedendo $dx \frac{(pm-2mn+2mn-2nn+2n-2)ede}{c}$, pro arcu tertio & quarto. Atque ita deinceps.

V.

Jam vero quadrata velocitatum in punctis L, K, &c. eodem momento naſcentium ſe habent [ſicuti invenitur ex Conſervatione virium vivarum æque ac, ſed difficilius, ex Principiis Staticis] ex. gr. ſi tria ſunt fila, totidemque pondera A, B, C, quadratum velocitatis ponderis $A = \frac{(Ay+Bq+Ct)}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $B = \frac{(Ay+Bq+Ct)nn}{A+Bnn+Cmm}$, quadratum velocitatis ponderis $C = \frac{(Ay+Bq+Ct)mm}{A+Bnn+Cmm}$, &c. nominando ſcilicet HG, IM, &c. y, q, t &c.; adeoque erunt vires acceleratrices ponderis $A = \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $B = \frac{g.nd(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$, ponderis $C = \frac{g.md(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)de}$; ac proin intenſitas [quæ invenitur dividendo ſingulas vires acceleratrices per longitudinem ſuæ viæ deſcribendæ, videlicet per e, ne, me] prodit pro unaquaque $= \frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede}$, adeoque eadem in ſingulis.

VI.

V I.

Hactenus tenſiones filorum non ſunt conſideratæ; ideoque videndum nunc erit, quomodo vires acceleratrices, indeque earum intenſitas eliciatur ex tenſionibus, quæ cum vi gravitatis motum ponderum temperant. Intenſitas hoc modo elicita, & comparata cum eadem articulo præcedente inventa, dabit numerorum n & m rationem quæſitam ad unitatem; id autem hoc pacto peragitur. Animadverto primo, ob ponderum motum lentiſſimum, eorum vires centrifugas nihil conferre ad augendas vires tenſionum in filis. Secundo, ob filorum NL, LK, &c. infinite parum a rectitudine ſitus deflectentium, unumquodque ex filis eam pati tenſionem, quæ æquipollet vi abſolutæ ponderum omnium quæ ſuſtinet: ita ergo tenſio primi $NL = A + B + C$, tenſio ſecundi $LK = B + C$, tenſio tertii $= C$; atque ſic in aliis Pendulis multifilibus.

V I I.

Ob fili primi NL ſitum perfecte perpendicularem ad arcum GL, tenſio hujus fili, nec contribuit, nec officit vi motrici ponderis primi A in directione tangentis in L. Sed vis motrix hujus ponderis habetur, ſi a vi tangentiali ab ipſa ejus gravitate oriunda, ſubducatur vis tangentialis a tenſione fili ſecundi LK derivata: vis illa prior a gravitate oriunda eſt, ex natura Cycloïdis quam arcus GL oſculatur, $= \frac{gA}{c}$; vis altera ex tenſione fili LK ſecundum tangentem derivata $= \frac{L\pi}{Ll} \times (B + C) =$ [art. 4 hujus] $\frac{(n-2).ge}{c} \times (B + C)$; ergo vis motrix ponderis, vel potius maſſæ A, in directione tangentis $= \frac{ge}{c} \times A - \frac{(n-2).ge}{c} \times (B + C)$; dividendo igitur per maſſam A, provenit vis acceleratrix, iterumque per e, oritur ejus intenſi-

tas $= \frac{g}{c} - \frac{(n-2)g}{c} \times (\frac{B+C}{A})$; quæ itaque $=$ intenſitati §. 5 hujus inventæ, $\frac{g.d(Ay+Bq+Ct)}{(A+Bnn+Cmm)ede} =$ [ſcribendo pro y, q, t, eorum valores art. 2°. hujus inventos] $\frac{g.(A+(nn-2n+2)B+(2mn-2n+2+mm-2mn)C)}{c(A+Bnn+Cmm)}$.

V I I I.

Porro habetur vis motrix ponderis ſecundi *B* in directione tangentis in K, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili ſecundi LK derivata, & ab aggregato auferatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda. Verum vis illa prima a pondere *B* in directione tangentis invenitur, ex natura Cycloïdis quam arcus MK oſculatur, radii oſculatoris in §. 3 hujus, $= \frac{e(1+(n-1)^2)gB}{nc}$; vis altera tangentialis a tenſione fili ſecundi derivata in arcu ſecundo [ope dx in §. 4 hujus] $= \frac{e(n-2)\times(gB+gC)}{nc}$; vis tertia tangentialis a tenſione fili tertii oriunda [ope ejuſdem dx] $= \frac{e(mn-2m+2n-2)gC}{nc}$: aggregatum duarum priorum mulctatum poſteriori, dabit vim motricem corporis ſecundi $B = \frac{ge((n-1)B+(2n-m-1)C)}{c}$; quod ſi ergo dividatur per maſſam B, & per longitudinem arcus MK $= ne$; prodibit intenſitas vis acceleratricis corporis $B = \frac{g((n-1)B+(2n-m-1)C)}{ncB}$, quæ itaque eidem §. 5 hujus æquatur.

I X.

Denique vis motrix corporis tertii *C*, in directione tangentis arcus tertii obtinetur, ſi ad vim tangentialem ab ejus gravitate derivatam addatur vis tangentialis a tenſione fili tertii oriunda.
Eſt

Eſt autem vis illa prior tangentialis a gravitate dependens $= \frac{e(1+(n-1)^2+(m-n)^2)gC}{mc}$ [vid. §. 3 hujus]. Et vis altera tangentialis a tenſione fili tertii proveniens $= \frac{e(mn-2nn+2n-2)gC}{mc}$. Summa harum duarum virium, dat vim motricem corporis tertii $c = \frac{ge(m-n)C}{c}$. Hoc ergo, diviſum per maſſam corporis C, & per longitudinem arcus $= me$, dat intenſitatem vis acceleratricis corporis $C = \frac{g(m-n)}{mc}$. Quæ per conſequens etiam æqualis erit intenſitati inventæ §. 5 hujus.

X.

Comparando itaque duas quaſcunque ex tribus hiſce intenſitatibus, quæ æquales, tam inter ſe, quam illi art. 5°, eſſe debent, cum ipſa illa articuli 6; habebuntur duæ æquationes, quarum ope littera m exterminari poteſt; & reſultabit æquatio ſolam incognitam n continens: quæ hæc eſt, ſalvo errore calculi: $nAAC - (2nn - 6n + 4)ABC + (n-2)ABB - (2nn - 5n + 2)ACC = (n^3 - 4nn + 4n)(B^3 + 2BBC + BCC)$. Hujus autem radice n inventa, erit $m = \frac{nA}{(n-2)\times(B+C)}$.

X I.

Notandum poſſe omnino negligi conſiderationem intenſitatis, prout ea art. 5° fuit eruta, ex principio Conſervationis virium vivarum. Siquidem intenſitas ex tenſione filorum tribus modis expreſſa art. 7, 8, & 9, ex duplici comparatione primæ cum ſecunda, & primæ cum tertia, vel ſecundæ cum tertia, ſubminiſtrat duas æquationes pro duabus incognitis n & m; ex quibus, per exterminationem ipſius m, reſultabit tertia alteram tantum incognitam n continens; quæ ſi rite tractetur, dabit nobis eandem æquationem quam §. præced. invenimus.

 XII.

XII.

Si tria pondera A, B, C ſunt æqualia, mutatur æquatio generalis in hanc ſpecialem, pro Pendulo trifili ponderum æqualium, $4n^3 - 12nn + 3n + 8 = 0$; eritque tunc $m = \frac{n}{2n - 4}$.

XIII.

Si vero pondus C ſit $= 0$; incidemus in æquationem Penduli bifilis; quam jam invenimus in ſuperiori §. 5, quod bonitatem methodi indicat.

XIV.

Si $A = 0$, habebitur Pendulum bifile, ſed ubi filum ſuperius eſt duplum inferioris; & in hoc caſu erit $n = 2$; quod quidem per ſe clarum eſt, ſine calculo; ſed $m = \frac{2A}{0 \times (B + C)} = 0$; hoc eſt, linea IK, etſi infinite parva, tamen infinities major eſſe debet quam HL; vel etiam poteſt n eſſe $= 0$, & tunc etiam erit $m = 0$; adeoque quieſcet Pendulum.

XV.

Si tandem $B = 0$, erit iterum Pendulum bifile, ſed cujus filum inferius eſt duplum ſuperioris; quo caſu, erit $n = \frac{5}{4} + \frac{A}{4C} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} + \frac{5A}{8C} + \frac{AA}{16CC})}$; & $m = $ &c.

XVI.

Penduli ſimplicis cum trifili iſochroni longitudo, invenitur generaliter $= \frac{mc}{m - n}$; cognitis ergo n & m, cognoſcitur quoque longitudo quæſita.

Typus

Digitized by Google

Typus alterius Solutionis Problematis *de multifilibus Pendulis.*

Sit Pendulum quotcunque ponderum ex. gr. trium A, B, C, ſuſpenſum ex puncto D, cujus ſitus quietis ſit recta verticalis DE, ſitus quæſitus ab initio oſcillationis ABCD. Ductis horizontalibus AE, BF, CG; ſint $AE = x$, $BF = y$, $CG = 1$: ſintque longitudines filorum $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$. Demiſſis perpendicularibus BH, CI; erunt $AH = x - y$, $BI = y - 1$. TAB. LXXXVII N°. CLXXVIII *Fig.* 2.

I.

Ex natura oſcillationum minimarum patet, Pendulo multifili eundem ſitum ABCD conciliari, ſive producatur ab oſcillationibus lateralibus, ſive a gyrationibus conicis circa axem verticalem DE. Etenim, pro priori effectu requiritur, ut vires acceleratrices ponderum A, B, C, quibus ad E, F, G tendunt, ſint ſemper diſtantiis AE, BF, CG proportionales, ad id ut fiat acceſſus ſimultaneus ad axem DE; pro altero effectu pariter oportet ut vires centrifugæ, quibus pondera A, B, C, retrahuntur ab axe DE, ad id præciſe ut ſitum gyrationis conſervent, ſint quoque proportionales iiſdem diſtantiis AE, BF, CG. Quare ſitus Penduli ABCD, qui inſervit oſcillationibus ſimultaneis, inſerviet etiam gyrationibus ſimultaneis. Lubet itaque huic poſteriori ideæ tanquam faciliori inhærere, quæ nos ducet ad breviorem & clariorem ſolvendi modum.

II.

Tenſio fili AB ſola reſiſtit vi ponderis A in directione verticali, & ejuſdem vi centrifugæ in directione horizontali, quæ vires ſe habent ut BH ad HA, ſeu [quia BH in longitudine quam minimum differt a BA] ut BA ad HA. Faciendo itaque $a : x - y = A : \frac{x-y}{a} \times A$; erit $\frac{x-y}{a} \times A$ æqualis vi

 cen-

centrifugæ ponderis A. Cum autem vires centrifugæ, in gyrationibus ſimultaneis, ſint in ratione compoſita radiorum & maſſarum; faciendum eſt $xA : yB = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{a} \times \frac{y}{x} B$; erit hæc, ſeu $\frac{xy-yy}{ax} B$ æqualis vi centrifugæ ponderis B ab ipſius gyratione oriundæ. Ob eandem rationem, habetur $xA : 1C = \frac{x-y}{a} \times A : \frac{x-y}{ax} \times C =$ vi centrifugæ ponderis C a gyratione provenienti.

III.

Nunc vero, a reactione tenſionis fili B A, eædem vires laterales, quæ agunt in A ſurſum trahendo, agunt quoque in B retrahendo deorſum. Ponderi itaque B, addenda eſt vis ponderis A in directione BH verticali, ejuſque vi centrifugæ propriæ, addenda quoque vis centrifuga corporis A, ut habeatur vis totalis, qua corpus B trahitur in directione verticali, $= B + A$, & altera totalis centrifuga in directione horizontali $= \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. His autem reſiſtit tenſio fili BC, quæ, decompoſita in vim verticalem, & vim horizontalem, dat hanc analogiam: CI, vel CB, vel b: IB, vel FB—FI, vel FB—GC, vel $y-1 = B + A : \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Hinc emergit prima æquatio $(byy + axy - bxy - ax) B = (bxx - axy - bxy + ax) A$.

IV.

Simili modo invenitur corporis C vis verticalis totalis $= C + B + A$; atque vis horizontalis æqualis tribus viribus propriis horizontalibus centrifugis corporum C, B, A; hoc eſt, $= \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$; & quia iſtis

viri-

viribus reſiſtit tenſio fili AC, erit hic etiam faciendum : DG, ſeu DC, ſeu c : GC, ſeu $1 = C+B+A : \frac{x-y}{ax} \times C + \frac{xy-yy}{ax} \times B + \frac{x-y}{a} \times A$. Unde reſultat ſecunda æquatio, $(cx - cy - ax)C + (cxy - cyy - ax)B = (cxy - cxx + ax)A$.

V.

Ex comparatione harum duarum æquationum, dabuntur valores ipſarum x & y, & ita inventum erit quod quæritur. Ergo &c. Ad hoc autem nihil reſtat aliud quam calculus.

V I.

Ex his jam perſpicitur uniformitas methodi, pro quocunque numero filorum & ponderum. Etenim quærendæ ſunt tantum, per §. 2, ſingulorum ponderum vires propriæ centrifugæ; deinde, pro quolibet pondere, ejus vis propria centrifuga addenda eſt ſummæ omnium corporum inferiorum virium centrifugarum, & ita habebitur vis totalis, qua pondus illud retrahitur ab axe DE in directione horizontali. Vis autem totalis, qua idem pondus verticaliter deorſum trahitur, eſt æqualis ſummæ omnium ponderum inferiorum, uſque ad pondus propoſitum incluſive ſumtorum. Quo facto, inſtituatur hæc analogia: Ut ſumma omnium illorum ponderum inferiorum, ad ſummam earundem virium centrifugarum, ita fili proxime ſuperioris longitudo, ad differentiam diſtantiæ ponderis ab axe, & diſtantiæ ponderis proxime ſuperioris; unde reſultat æquatio. Atque ita tot habebuntur æquationes, quot erunt litteræ incognitæ, una nimirum pauciores quam ſunt pondera vel fila; ex quarum æquationum comparatione determinantur incognitæ.

V I I.

In ſolutione Problematis, pro numero majori ponderum & filo-

filorum, continetur etiam ſolutio pro numero minori. Sic ſi ex. gr. ex Pendulo trifili velimus facere bifile, ponendum tantum eſt in duabus æquationibus $B = 0$, & $b = 0$; quod primam æquationem mutat in hanc $y = 1$, & alteram in hanc $(cx - cy - ax)\, C = (cxy - c^x x + ax)\, A$; quæ, ſi porro pro y ſcribatur 1, dat $(cx - c - ax)\, C = (cx - cxx + ax)\, A$; atque, in caſu ubi $c = a$, prodit $- cC = (2x - xx)\, A$, id quod dat $x = 1 \pm \surd(\frac{A+C}{A})$, ut invenimus priori modo.

VIII.

Pendulum ſimplex, quod gyrando, vel oſcillando, ſit iſochronum Pendulo multifili gyranti, vel oſcillanti, invenitur facillime; prolongando tantum filum infimum AB, donec occurrat axi in L: dico enim AL, ſeu $\frac{ax}{x-y}$, fore longitudinem Penduli ſimplicis iſochroni Pendulo ACBA. Res eſt manifeſta; nam filum AB, eodem modo tenditur a ſolo pondere A, ac filum prolongatum AL ab eodem tenderetur: ergo utrobique idem motus in pondere A generabitur, hoc eſt, ambo Pendula, & ſimplex LA, & compoſitum multifile DCBA, ſunt iſochrona.

IX.

Ex hac noſtra Theoria, jam non eſt difficile invenire æquationem pro natura curvæ Catenæ oſcillantis, vel gyrantis; idque ſive uniformiter, ſive non uniformiter Catena ſit gravis. Concipiatur enim ABCD tanquam polygonum infinitorum laterum, & ſumatur, a puncto infimo in axe E, pars quælibet finita EF pro abſciſſa $= z$, ipſique reſpondens applicata FB $= y$; conſidero jam FG tanquam elementum abſciſſæ $= dz$, adeoque IB $= - dy$, & elementum curvæ BC $= dt$; dicendo nempe arcum curvæ AB $= t$. Scribo autem $-dy$, quia creſcen-

centibus abſciſſis decreſcunt applicatæ. Sit porro ponduſculum elementi catenæ B C in puncto B collectum $= p\,dt$, ubi per p intelligo functionem datam arcus AB. Conſtat vero ex §. 2, vim propriam centrifugam cujuſque ponderis B eſſe $= \frac{AH}{AB} \times \frac{FB}{AE} \times B =$ [ob AH : AE = AB : AL] $\frac{AB}{AB} \times \frac{FB}{AL} \times B = \frac{FB}{AL} \times B =$ [dicendo longitudinem Penduli ſimplicis LA $= L$] $\frac{y}{L} \times p\,dt$. Quare ſumma omnium virium centrifugarum ab A uſque ad B, hoc eſt, $\int \frac{y p\,dt}{L}$, ſe habet ad ſummam omnium ponderum, hoc eſt ad $\int p\,dt$, ut IB ad BC, ſeu ut $-dy$ ad dt: unde emergit hæc æquatio $\frac{dt}{L} \int y p\,dt = -dy \int p\,dt$; vel etiam, quia, ob infinite parvas applicatas, non differunt longitudine arcus curvæ t ab abſciſſis z, & dt a dz, æquatio ita ſcribi poteſt [ſervando p ſicuti pro functione arcus t, ita pariter pro functione abſciſſæ z] $\frac{dz}{L} \int y p\,dz = -dy \int p\,dz$.

COROLLARIUM.

Si Catena ſit uniformiter gravis, id eſt, ſi $p = 1$, habebitur pro natura curvæ quæſitæ, hæc æquatio $dz \int y\,dz = -L z\,dy$. Ex qua ſi quocunque modo conſtrui poſſit curva, dabit ea curvedinem Catenæ uniformiter gravis, in quolibet ſitu proximo axi, & oſcillantis vel gyrantis in tempore ſimultaneo cum Pendulo ſimplici, cujus longitudo $L =$ tangenti vel ſubtangenti curvæ in puncto infimo Catenæ.

Solutio brevior, & ſimplicior, ex natura oſcillationum petita.

I.

Tenſio fili A B = ponderi A; fili BC $= A + B$, fili CD $= A + B + C$; & ſic porro, ſi plura eſſent fila & pondera.

I I.

Retentis iiſdem denominationibus, ut ſupra; Tenſio fili AB, qua retrahitur pondus A verſus B, eſt ad vim motricem, qua urgetur horizontaliter verſus E, ut AB ad AH: adeoque ea vis motrix $= \frac{x-y}{a} \times A$.

I I I.

Tenſio fili BC, eſt ad vim qua pondus B verſus F urgetur, ut BC ad BI: ergo ea vis erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B)$. Sed ea non eſt ipſa vis motrix ponderis B verſus F; quia enim tenſio fili præcedentis B A tantundem deorſum oblique trahit pondus B, quantum ſurſum trahit pondus A; hæc ita decompoſita facit etiam ſecundum horizontalem $\frac{x-y}{a} \times A$, quæ priori $\frac{y-1}{b} \times (A+B)$ eſt contraria; adeoque ipſa vis motrix ponderis B, erit $= \frac{y-1}{b} \times (A+B) - \frac{x-y}{a} \times A$, qua nimirum B verſus F urgetur.

I V.

Idem etiam de ſingulis ſuperioribus ponderibus intelligendum, ſi plura eſſent. Quare vis motrix ponderis C verſus G, erit $= \frac{1}{c} \times (A+B+C) - \frac{y-1}{b} \times (A+B)$.

V.

Vires iſtæ motrices diviſæ per ſua reſpective pondera, quæ movenda habeat, dabunt eorum vires acceleratrices; nempe vis acceleratrix ponderis $A = \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{A}$ ſeu $\frac{x-y}{a}$; ponderis B $= \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{B}) - \frac{x-y}{a} \times \frac{A}{B}$; ponderis $C = \frac{1}{c} \times (\frac{A+B+C}{C}) - \frac{y-1}{b} \times (\frac{A+B}{C})$: & ſic porro.

V I.

VI.

Verum, ob ponderum iſochroniſmum, debent hæ vires acceleratrices, poni proportionales diſtantiis, vel ſpatiis percurrendis AE, BF, CG, &c. hoc eſt, debent earum intenſitates eſſe æquales. Quamobrem, diviſæ per diſtantias ſuas, erunt omnes inter ſe æquales, nempe $\frac{x-y}{ax} = \frac{y-1}{by} \times \left(\frac{A+B}{B}\right) - \frac{x-y}{ay} \times \frac{A}{B} = \frac{1}{c \times 1} \times \left(\frac{A+B+C}{C}\right) - \frac{y-1}{b \times 1} \times \left(\frac{A+B}{C}\right)$; & ita porro. Unde patet tot haberi æquationes, quot ſunt litteræ incognitæ. *Q. E. I.*

COROLLARIUM I.

Hac methodo, quæ omnium eſt naturaliſſima, pari facilitate determinatur curvatura Catenæ oſcillantis, qua id peregimus per præcedentem methodum. Cum enim tenſio cujuſlibet elementi Catenæ ſit $= \int p\,dt$, quæ dat vim trahendi B ad F $= \frac{-dy}{dt}\int p\,dt$, hujuſque differentiale $d\left(\frac{-dy}{dt}\int p\,dt\right) =$ vi motrici; quam dividendo per elementum ponderis $p\,dt$, habetur vis acceleratrix; iterumque per diſtantiam y, habetur intenſitas $\frac{d\left(\frac{-dy}{dt}\int p\,dt\right)}{yp\,dt} =$ conſtanti $\frac{1}{L}$; adeoque $d\left(\frac{-dy}{dt}\int p\,dt\right) = \frac{yp\,dt}{L}$; atque integrando $-dy\int p\,dt = \frac{dt}{L} \times \int yp\,dt$, ut prius.

COROLLARIUM II.

Si tria ſint pondera æqualia, ut & fila æqualia. Invenietur hæc æquatio $4x^3 - 12xx - 15x + 2 = 0$: cujus radix dat EA, eaque inventa habetur FB. Vel etiam reducetur quæſtio ad hanc æquationem $4y^3 - 12yy + 3y + 8 = 0$; cujus radix dat FB, & ex hac fluit EA.

N°. CLXXIX.

PROBLEMA

STATICO-DYNAMICUM.

TAB. LXXXVII N°. CLXXIX. *Fig.* 1.

DAtum eſto Triangulum rectangulum ACB, ex materia non gravi confectum, cujus tribus lateribus accumbant totidem corpora L, M, N, etiam non gravia; ita tamen ut latera, tam Trianguli, quam corporum, in quibus ſe contingunt, ſint lævigatiſſima & perfecte polita; eum nempe in finem, ut ſine ulla frictione, aliave reſiſtentia, ſuper ſe invicem moveri, vel fluere poſſint, corpus M ſuper AC, corpus L ſuper AB, & corpus N ſuper CB. Accedat nunc corpori M vis aliqua motrix data, ſecundum directionem *p*M normalem ad hypothenuſam AC, quo fiet, ut Triangulum ACB incipiat retropelli continuo in alium ſitum *acb*; conſequenter tria corpora M, L, N, loca quoque ſua mutent. Hiſce ita poſitis: Quæritur primo directio motus, tam Trianguli, quam ſingulorum corporum: Deinde Lex accelerationis ſingulorum? Ubi quidem ponitur rem ea ratione peragi, ut Triangulum & corpora aliter moveri non poſſint, quam motu in unoquoque ſibi ſemper parallelo.

SOLUTIO.

Dicatur maſſa Trianguli ABC $= T$, corporis M $= M$, corporis L $= L$, & corporis N $= N$. Concipiatur jam imprimi corpori M, incumbenti hypothenuſæ AC, vim aliquam datam motricem expreſſam per M*t*, ſumendam in prolongata *p*M normali ad AC. Dicatur hæc vis motrix $= m$. Item Trianguli altitudo AB $= a$, baſis CB $= b$, hypothenuſa AC $= \sqrt{(aa+bb)} = c$. Triangulum ABC hoc modo preſſum

a corpore M, animato jam vi motrice *m*, ſeſe ſubducens, paulo poſt veniat in ſitum proximum *abc*; ita ut latera lateribus, ſingula ſingulis, maneant, per hypotheſin, parallela. Primo manifeſtum eſt, punctum M manſurum fluendo in M*t* prolongata rectæ *p*M; ſicuti etiam ductis ML, MN, normalibus ad AB, CB, corpora L & N repellentur in directionibus prolongatis ML*l*, MN*n*, a quibus non deviabunt. Jam vero vis motrix *m* abſoluta decomponi poteſt in collaterales, ſecundum directiones M*r* & M*s*, latera ſcilicet rectanguli M*rts*: unde naſcitur vis in directione $Mr = \frac{am}{c}$, & altera in directione $Ms = \frac{bm}{c}$; id quod patet ex ſimilitudine triangulorum M*tr*, M*ts*, & ACB. Vis illa prior, ſecundum directionem M*r*, agit ſimul in Triangulum & corpus adjacens L, eique non obſtat corpus N; ſed altera vis, ſecundum directionem M*s*, agit etiam ſimul in Triangulum & corpus adjacens N, ita ut pariter non obſtet corpus L. Vis iſta motrix *m*, quæ in ſolo corpore M exiſtit, & illæ duæ $\frac{am}{c}$, $\frac{bm}{c}$, in quas reſolvitur *m*, diminuuntur utique, agendo in Triangulum & hoc mediante, in corpora L & N. Ut igitur inveniatur, quantum per actionem vis primitivæ *m* remaneat in corpore M ad progrediendum in ſua directione M*t*; quantum item virium acquirat tam Triangulum in utraque ſua directione collaterali, quam corpus L in directione ML, & corpus N in directione MN; annotandum eſt, quod Lemmatis loco ponitur, in omni actione duorum corporum ſe mutuo prementium, oriri quandam vim intermediam, quam voco *immaterialem*, quæ æqualiter agit prorſum & retrorſum; in quo conſiſtit Canon ille, *Quod actio & reactio ſunt æquales.* Voco autem *vim* illam *immaterialem*; quia eſt quaſi extra utrumque corpus, atque ad unum non magis pertinet quam ad alterum.

Ordo genuinus nunc poſtulat, ut, ante omnia, inquiratur in vim iſtam immaterialem, quæ intercedit inter corpus M, in quo eſt principium motus, & Triangulum, quod immediate excipit

illius actionem, eamque communicat cum corporibus L & N; unde poſtea determinabuntur vires motrices in Triangulo corporibuſque genitæ, ipſæque proin directiones virium acceleratricium, quibus proportionales ſunt velocitates actuales. Sit igitur $x =$ vi immateriali inter corpus M & Triangulum, quæ directe agit & reagit inſtar elateris in directione M*t* & M*p*. His ita poſitis; remanebit in corpore M vis motrix $= m - x$, in directione *p*M; Triangulum vero recipit eandem illam vim motricem *x* in directione M*t*; quæ decompoſita in collaterales ſecundum ML & MN, dat eam, ſecundum directionem ML, $= \frac{ax}{c}$, & alteram, ſecundum directionem MN, $= \frac{bx}{c}$. Dividendo autem has vires motrices per ſuas reſpective maſſas movendas, habebimus ſingulorum corporum vires acceleratrices, nimirum $\frac{m - x}{M} =$ vi acceleratrici corporis M, in directione *p*M. Quia vero vis collateralis $\frac{ax}{c}$ in directione ML movere debet ſimul Triangulum & corpus *L*, ſicuti etiam altera collateralis $\frac{bx}{c}$ movenda habet ſimul Triangulum & corpus N; erit vis acceleratrix in directione ML $= \frac{ax}{c(T + L)}$, & altera acceleratrix in directione MN $= \frac{bx}{c(T + N)}$. Habebit igitur Triangulum duas vires acceleratrices, in diverſis directionibus ML & MN; quæ ut referantur ad communem directionem M*t* corporis M; faciendum eſt, ut ſe habet AC ad AB, ſeu ut *c* ad *a*, ita $\frac{ax}{c(T + L)}$ ad quartam $\frac{aax}{cc(T + L)}$; item, ut ſe habet AC ad CB, ſeu *c* ad *b*, ita $\frac{bx}{c(T + N)}$ ad quartam $\frac{bbx}{cc(T + N)}$. Significabunt hæ duæ ſimul ſumptæ $\frac{aax}{cc(T + L)} + \frac{bbx}{cc(T + N)}$ vim acceleratricem communem expreſſam per M*q*, quæ ſimul denotat

notat vim acceleratricem $\frac{m-x}{M}$ corporis M, in eadem directione: nam corpus M inter movendum, ſemper adjacere ſupponitur hypothenuſæ Trianguli: unde hæc habetur æquatio $\frac{m-x}{M} = \frac{aax}{cc(T+L)} + \frac{bbx}{cc(T+N)}$; adeoque $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$.
Ut autem habeatur actualis directio, & quantitas vis acceleratricis ipſius Trianguli; oportet tantum conſtruere novum rectangulum, ſumendo ſuper M L partem $= \frac{ax}{c(T+L)}$, & ſuper MN aliam partem $= \frac{bx}{c(T+N)}$; quæ erunt latera rectanguli, cujus diagonalis, ex M ducta in angulum oppoſitum, deſignabit veram directionem, & vim acceleratricem ipſius Trianguli. Hæc autem diagonalis eſt utique $= \frac{x}{c} \sqrt{\left(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2} \right)}$; in quibus omnibus, ſi pro x ſubſtituatur ejus valor inventus $\frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ data erunt ſingula quæſita.

Exemplum I.

Sint corpora L & N æqualia, erit $x = \frac{m}{\frac{(aa+bb)M}{cc(T+L)}+1} = \frac{m}{\frac{M}{T+L}+1} = m \times \frac{T+L}{M+T+L}$. Hinc *primo* vis acceleratrix corporis M, in ſua permanente directione Mt, ſeu $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T+L}$. 2°. Vis acceleratrix corporis L, in ſua directione invariabili Ll, ſeu $\frac{ax}{c(T+L)} = \frac{am}{cM+cT+cL}$.
3°. Vis acceleratrix corporis N [quod æquale ponitur ipſi L] in ſua conſtante directione Nn, ſeu $\frac{bx}{c(T+N)} = \frac{bm}{cM+cT+cL}$

4°. ..

4°. Vis acceleratrix ipſius Trianguli, in directione ML, eſt eadem quæ corporis L, nempe $\frac{am}{cM+cT+cL}$; ejuſdemque Trianguli vis acceleratrix, in directione MN, eſt eadem quæ corporis N, nempe $\frac{bm}{cM+cT+cL}$; unde Trianguli vis acceleratrix actualis, in directione vera diagonalis dicti rectanguli $= \frac{m}{M+T+L}$.

Exemplum II.

Quod ſi jam ambo corpora L & N ſint infinite parva, hoc eſt æqualia o, liquet, eum caſum eſſe quo corpus directe, ſeu perpendiculariter, premit alterum omni vi motrici deſtitutum; cum quo per conſequens vim ſuam motricem partitur, ita ut utrumque accelerari debeat æqualiter, & in eadem directione, habeatque jam tota maſſa in unum coaleſcens eandem vim motricem, quam ante preſſionem habuerat ſolum corpus M: atque hoc eſt, quod docet, in hoc caſu, Regula noſtra generalis.

Fit enim $x = \frac{mT}{M+T}$; item $\frac{m-x}{M} = \frac{m}{M+T}$; ut & Trianguli vis acceleratrix actualis in directione diagonalis, quæ jam eſt ipſa Mt in prolongata pM $= \frac{m}{M+T}$.

Exemplum III.

In caſu, quo ponitur $L = o$ & ſimul $N =$ infinito; idem eſt, ac ſi trianguli baſis CB moveri vel fluere debeat ſuper plano immobili. Tunc erit $x = \frac{m}{\frac{aaM}{ccT}+1} = \frac{mccT}{aaM+ccT}$; hic enim, ob $N = \infty$, evaneſcit $\frac{bbM}{cc(T+N)}$; atque, ob eandem rationem, vera directio & vis acceleratrix Trianguli, parallela baſi CB, erit $= \frac{ax}{cT} = \frac{mac}{aaM+ccT}$: corporis vero M vis acceleratrix

leratrix in directione Mt, quæ eſt $\frac{m - x}{M}$, jam fit $= \frac{aax}{ccT}$ $= \frac{maa}{aaM + ccT}$; unde & ipſæ velocitates actuales, in ſuis propriis directionibus, Trianguli & corporis prementis M, erunt ut $\frac{mac}{aaM + ccT}$ ad $\frac{maa}{aaM + ccT}$; hoc eſt ut c ad a, ſeu ut AC ad AB.

COROLLARIUM.

Hic caſus complectitur etiam Solutionem Problematis olim *Petropoli* ad me miſſi; cujus tum dedi Solutionem aliunde petitam, quam videre eſt in *Comment. Petropol.* Tom. V *. Propoſitio huc redibat. Dato Triangulo rectangulo ABC materiali, in plano verticali, cujus baſis BC horizontalis liberrime fluere poſſit ſuper alio plano horizontali immobili: incumbat vero hypothenuſæ AC corpus aliquod grave M, quod vi ponderis ſui deſcenſum moliatur in directione verticali: unde id eveniet, ut Triangulum ab iſta preſſione retropellatur in directione horizontali CB; interea dum corpus M, quod pariter liberrime fluere poſſ- ponitur ſuper AC, deſcendet continuo a puncto M verſus C, adhærens nempe indeſinenter hypothenuſæ AC: Quærebatur itaque, quam habeant rationem celeritates Trianguli retrocedentis, atque corporis M oblique deſcendentis, quamque hoc habiturum ſit directionem actualem, utpote compoſitam ex directione ſecundum hypothenuſam, & ſimul ex ea ſecundum Mt priori normalem. Hoc Problema ex præſenti noſtro principio facillime ſolvitur. Decomponatur enim vis gravitatis ponderis M, cujus directio eſt verticalis, in duas collaterales, unam parallelam hypothenuſæ, alteram eidem normalem. Illa, durante actione, non mutatur; hæc vero agit in Triangulum, ſicuti ſupponitur in præcedentis Problematis ſolutione; unde habebitur celeritas Trianguli ſuper plano horizontali; ut & celeritas corporis M, ſed tantum in directione Mt normali ad hypothenuſam, cum qua componi de-

* N°. CXLVII. pag. 365, *Tom. III.* Confer. Numerum ſequentem.

bet illa, quæ generatur ex cognita vi motrice in directione parallela hypothenuſæ: compoſitione motus rite peracta, dabitur directio & celeritas actualis corporis M.

SCHOLIUM I.

Si Corpus M motu actuali moveatur in directione *p* M, data velocitate *v*, impingatque in Triangulum T, quod percuſſum ſimul pellat corpora L & N: erunt, poſito corpora non eſſe elaſtica, velocitates acquiſitæ in eadem ratione, quam hic determinavimus pro ſimplici preſſione. Effectus enim percuſſionis fit pariter per preſſionem, ſed promptiſſimam & quaſi momentaneam. Erit igitur *m*, ſeu vis motrix, conſideranda tanquam velocitas *v* multiplicata per maſſam *M*; ut ſit ante conflictum quantitas motus $= Mv =$ vi motrici. Poſito itaque hic etiam $x =$ vi illi immateriali, quæ in conflictu generabitur; invenietur eodem ratiocinio, quo ſupra factum $x = \frac{m}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$ hoc eſt $= \frac{Mv}{\frac{aaM}{cc(T+L)} + \frac{bbM}{cc(T+N)} + 1}$; qui valor ſubſtituatur in $v - \frac{x}{M}$, ut habeatur velocitas actualis corporis M, poſt conflictum, in ſua propria directione M*t*. Idemque ſubſtitutus in $\frac{ax}{c(T+L)}$ & in $\frac{bx}{c(T+N)}$, dabit velocitates actuales corporum L & N, in directionibus ſuis propriis L*l* & N*n*: ipſius vero Trianguli *T* directio, & velocitas actualis, erit quæ ex illis duabus componitur $= \frac{x}{c} \sqrt{(\frac{aa}{(T+L)^2} + \frac{bb}{(T+N)^2})}$. Hac occaſione, oſtendendum eſt quam facile inveniatur Regula generalis pro communicatione motus duorum corporum, datis velocitatibus ſibi mutuo directe occurrentium. Sit enim corpus *A*, ejuſque velocitas *a*, directe inſequens corpus *B*, cujus velocitas minor *b* verſus eandem plagam; erit corporis *A* quantitas motus, ſeu vis

vis motrix $= Aa$, corporis *B* vis motrix Bb. Ponatur jam vis immaterialis per conflictum genita $= x$; manebit ergo in corpore *A*, vis motrix $= Aa - x$, & in corpore *B* producetur vis motrix $= Bb + x$, quæ, diviſæ per maſſas *A* & *B*, dabunt utriuſque velocitates poſt ictum $a - \frac{x}{A}$ & $b + \frac{x}{B}$; quæ, ſi corpora non ſunt elaſtica, debent eſſe æquales, adeoque $a - \frac{x}{A} = b + \frac{x}{B}$. Unde prodibit $x = \frac{a-b}{A+B}$; quo ſubſtituto in alterutro habebitur $\frac{Aa+Bb}{A+B}$, pro velocitate communi, quam ambo corpora habebunt poſt ictum. Amittit adeoque corpus velocius *A* aliquem gradum ſuæ velocitatis, qui erit $a - \frac{Aa+Bb}{A+B} = \frac{(a-b)B}{A+B}$, & corpus tardius *B* acquiret novum velocitatis gradum, qui utique erit $\frac{Aa+Bb}{A+B} - b = \frac{(a-b)A}{A+B}$. Quod ſi jam corpora fuerint elaſtica; deſiderenturque eorum velocitates poſt conflictum; conceptu ſane haud difficile eſt, duplicandos eſſe effectus oriundos a compreſſione elaterii, hoc eſt, a vi illa immateriali *x*, quæ in utramque partem æqualiter ſe exerit; ita ut quantum velocitatis deſtruitur in velociori, & quantum velocitatis additur in tardiori per compreſſionem, tantundem quoque de novo fiat in utroque corpore per reſtitutionem elaterii. Erit proinde jactura velocitatis in corpore velociori $A = \frac{(a-b)2B}{A+B}$, & augmentum velocitatis in tardiori $B = \frac{(a-b)2A}{A+B}$; unde, poſt colliſionem peractam, habebit corpus *A* velocitatem $= a - \frac{(a-b)2B}{A+B} = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$, & corporis *B* velocitas erit $= b + \frac{(a-b)2A}{A+B} = \frac{Bb - Ab + 2Aa}{A+B}$.

Notandum, ſi moveatur ante conflictum corpus *B* in plagam contrariam, idem eſt ac ſi dicatur eſſe *b* negativum; mutanda

 per

per conſequens ſunt ſigna terminorum, in quibus reperitur *b*. Atque ſic prodibit, poſt ictum in corporibus non elaſticis, communis velocitas $= \frac{Aa - Bb}{A + B}$. Sed in elaſticis, velocitas corporis $A = \frac{Aa - Ba - 2Bb}{A + B}$, & corporis *B* velocitas $= \frac{-Bb + Ab + 2Aa}{A + B}$. Quæ omnia pulchre conſpirant cum Regulis motuum dudum exhibitis, tum a nobis, tum ab aliis, ſed per diverſas omnino vias erutis.

SCHOLIUM II.

Ad noſtram hanc Theoriam quoque ſpectat Theorema NEWTONI, propoſitum in *Princ. Mathematicis Philoſ. Natur.* Vid. Coroll. IV. Legis III. Libro primo præmiſſum, quod ita ſonat: *Commune gravitatis Centrum corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter ſe, non mutat ſtatum ſuum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in ſe mutuo agentium [excluſis actionibus & impedimentis externis] commune Centrum gravitatis, vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum.*

Etſi hoc Theorema, elegantiſſimum quidem, in generali ſenſu ſit propoſitum; demonſtratio tamen NEWTONI minime eſt generalis. Lector quippe attentus examinaturus longam ratiocinationis *Newtoniana* deductionem, percipiet, ſine magna difficultate, ſupponi in illa demonſtratione, concurſum fieri non niſi duorum corporum una vice, mox alia vice duorum aliorum, vel unius eorum, cum tertio; percipiet, inquam, nullo in loco, per totum ſermonem, in conſiderationem trahi caſum, quo tria plurave corpora, eodem momento ſimul, in diverſis directionibus in ſe invicem impingunt; cujus caſus neglectio relinquit ſane demonſtrationem NEWTONI longe imperfectiſſimam; quæ vix particulam præſtat ejus quod promittitur in Propoſitione generali. Qui defectus ut ſuppleatur, alia via ineunda eſt, quam quæ a NEWTONO eſt tentata. Hanc in rem, noſtra idea de viribus immaterialibus inter corpora ſibi invicem collidentia concipiendis commodiſſime adhibetur. Poſtquam enim oſtendimus illas

Digitized by Google

illas vires nihil aliud eſſe, quam preſſiones, ſeu vires motrices ſubitaneas, effectus ſuos in momento abſolventes; res utique referri poterit ad ordinariæ Dynamices principia; ubi duntaxat debito modo applicanda eſt Propoſitio illa generalis, cum a nobis, tum ab aliis, dudum demonſtrata, quæ hæc eſt:

Si dati corporis ABC centrum gravitatis O ſollicitetur a pluribus potentiis, ſeu viribus motricibus, quarum directiones & quantitates, deſignentur per rectas datas OD, OE, OF, OG &c. ſitque punctum P centrum commune gravitatis punctorum D, E, F, G, inſtar ponderum æqualium conſideratorum; Dico rectam OP fore directionem, ſecundum quam movebitur centrum gravitatis O corporis ABC, & quidem motu ſibi ſemper parallelo, ſive accedendo verſus P, ſive ab eodem recedendo, prout vires motrices ſunt vel trahentes vel pellentes. TAB. LXXXVII. N°. CLXXIX. Fig. 2.

Nunc quidem non eſt ex inſtituto noſtro, generalem facere applicationem hujus Propoſitionis, ad demonſtrandum Theorema *Newtonianum*, in omni extenſione ſumtum; ſufficit indicaſſe rei fundamentum, ut alii, quibus vacat & volupe eſt, laboris & calculi moleſtiam ſubeant.

N°. CLXXX.

CONTINUATIO TRACTATIONIS

De deſcenſu corporis gravis, ſuper hypothenuſa Trianguli rectanguli mobilis ſuper plano horizontali immobili.

Videatur Numerus CXLVII, pag. 365 & ſeq. *Tom. III.*

SEnſus hujus Problematis, cujus Solutio a me petebatur, in hoc conſiſtebat, quod ita ſonat: „ Sit ACK triangulum materiale, rectangulum in K, quod ſuper plano horizontali DH, „ ſine omni frictione, moveri poſſit. Sit etiam corpus grave *m*, „ quod ſuper hypothenuſa AC poſitum ſua gravitate deſcendat, „ pariter ſine frictione; quo fiet ut, deſcendente corpore *m*, TAB. LXXXVII N°. CLXXX.

Digitized by Google

„ Triangulum jugiter ab eo preſſum retrocedere cogatur. Quæ-
„ ritur tum corporis, tum Trianguli velocitas; tum etiam via
„ AP, quam corpus ex motu compoſito deſcribit, atque utriuſ-
„ que Lex accelerationis?

Solutio, quam ſtatim exhibueram in *Comment. Petrop.* Tom. V. pag. 11 & ſeq. anno ſcilicet 1730, placuit Eruditis, deditque quibuſdam, ut audio, occaſionem ſolvendi Problema in majori extenſione. Solutiones autem eorum, quæ nuſquam adhuc extant, quantum ſcio, nondum vidi. Aſſumſeram in ſolutione mea hypothenuſam AC eſſe lineam rectam; deinde velocitatem initialem utriuſque, tam corporis, quam Trianguli, eſſe nullam; hoc eſt, utrumque incipere motum ſuum a quiete; contentus equidem tractaſſe Problema ſub ea, qua proponebatur, conditione, neque tum cogitans de conditionum amplificatione. Nunc ſupperadduntur duæ conditiones, quæ Problema reddunt generalius: prima hæc eſt, ut pro recta hypothenuſa AC ſubſtituatur linea curva qualiſcunque data: conditio altera, ut corpus m habeat velocitatem initialem datam, quando incipit deſcendere. Id quod facit duo nova Problemata; quibus ut ſatisfacerem, non operoſum mihi fuit obſervare Formulas meas, pro determinatione virium acceleratricium corporis & Trianguli, accommodari poſſe ad præſens negotium. Ibi enim demonſtratum dedi, quod vis acceleratrix corporis m, in directione hypothenuſæ, ſit $= \frac{gacM}{ccM - bbm}$, & vis acceleratrix Trianguli, in directione horizontali, ſit $= \frac{gabm}{ccM - bbm}$, ubi ſupponitur $g =$ vi acceleratrici naturali corporum gravium, item a, b, & $c =$ tribus lateribus Trianguli, nimirum altitudini, baſi, & hypothenuſæ, tandemque $M =$ aggregato maſſarum Trianguli & corporis m.

Cum autem, ob rectitudinem hypothenuſæ, conſtans maneat ejus inclinatio ad horizontem, ubicunque in illa reperiatur corpus m; patet hujus corporis vim acceleratricem, in directione hypothenuſæ, fore uniformem, per totum decurſum ſuper hypothenuſa.

Aliter

Aliter ſe res habet, ſi hypothenuſa non eſt linea recta, ſed curva: tunc enim inclinatio ejus ad horizontem eſt variabilis. Unde variabilis etiam erit vis acceleratrix, in decurſu corporis m per hypothenuſam curvililineam; ut & altera vis acceleratrix ipſius Trianguli in directione horizontali; utpote quæ etiam variabilis fiet. Hoc non obſtante, inſervire poſſunt noſtræ Formulæ ad determinandas iſtas vires, pro quolibet deſcenſu ſuper hypothenuſa curvilinea. Analyſis noſtra infiniteſimalis huic negotio ſuccurrit. Ecce quomodo.

Ponamus Triangulum rectangulum AKC, mobile ſuper plano horizontali DH, habere pro hypothenuſa lineam curvam quamcunque datam AEC, ſuper qua deſcendens corpus grave m pervenerit jam ad E, percurſurum porro particulam Ee, quæ tanquam elementum curvæ pro recta cenſetur. Ductis igitur applicatis EN, en, ad axem AK, huicque parallela EF; ſit $AN = x$, $NE = y$, Nn vel $EF = dx$, $eF = dy$, $Ee = dr$; habebimus Triangulum rectangulum EFe, cujus hypothenuſa eſt lineola recta Ee, quam dum percurrit corpus grave m, conſiderari poterit [durante hoc tempuſculo, quod vocetur dt] Triangulum EFe, tanquam repræſentans partem figuræ triangularis rectilineæ AKC, mobilis ſuper plano immobili horizontali DH. Hinc, ſi in Formulis, pro caſu vulgari in *Commentariis Petropolit.* ſoluto, ſubſtituantur pro a, b, c, earum repræſentantes dx, dy, dr, prodibunt $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2}$ & $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2}$; quæ, durante tempuſculo dt, exprimunt vires acceleratrices; prior nempe corporis m deſcendendi per lineolam Ee, & altera ſyſtematis M, retrocedendi in directione horizontali DH.

Determinatis ita viribus acceleratricibus, reliqua omnia inde dependent. Dicatur enim, brevitatis gratia, vis acceleratrix inventa $\frac{gMdxdr}{Mdr^2 - mdy^2} = A$, & altera $\frac{gmdxdy}{Mdr^2 - mdy^2} = B$; item velocitas, qua corpus m percurrit Ee vel $dr = u$; & velocitas, quam tum habebit Triangulum in directione horizontali $= v$, tempuſculum quo incrementa velocitatum du & dv generan-

nerantur $= dt$; unde ex Principiis Dynamicis fluunt ſequentia. 1°. $Adt = du$, & $Bdt = dv$; adeoque $A : B = du : dv$; unde $dv = \frac{Bdu}{A}$; 2°. Ob $dt = \frac{dr}{u}$, erit $\frac{Adr}{u} = du$, ſeu $Adr = udu$; id quod dat $u = \sqrt{\int 2Adr}$, & differentiando, $du = \frac{Adr}{\sqrt{\int 2Adr}}$. 3°. Subſtituto hoc valore habebimus $\frac{Bdu}{A}$, ſeu $dv = \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, ipſamque proin $v = \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

Ordo nunc poſtulat, ut determinemus viam ipſam, quam corpus m motu complicato ſequitur inter deſcendendum; hoc eſt lineam veram ABP quam actualiter deſcribit. Hunc in finem, reſolvenda eſt velocitas per Ee in velocitatem verticalem per EF, & horizontalem per Fe; faciendo itaque, ut ſe habet Ee ad EF, ſeu ut dr ad dx, ita u ſeu $\sqrt{\int 2Adr}$ ad quartam $\frac{dx\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati per EF; ſic pariter ut dr ad dy, ita $\sqrt{\int 2Adr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ = velocitati in directione horizontali; quæ velocitas eſt relativa ad mobilitatem Trianguli mixtilinei AKC. Ut vero habeatur velocitas realis, ſeu abſoluta, qua ſcilicet corpus m, reſpectu plani horizontalis immobilis, progreditur a plaga H ad plagam D, auferenda erit v, ſeu velocitas Trianguli, quæ eſt $\int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$, retrocedens in plagam contrariam a D verſus H, una cum ipſo corpore m; quo facto, habebimus corporis m velocitatem abſolutam, in directione horizontali HD $= \frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int \frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$.

His præmiſſis, natura lineæ quæſitæ ABP determinatur hunc in modum. Concipiamus Triangulum mobile AKC, in ſuo ſitu initiali, aliudque ſimile Triangulum, ſed immobile, accumbens & congruens cum priori AKC exiſtente in ſitu initiali; in hoc Triangulo immobili fingamus deſcriptam eſſe lineam ABP, cujus naturam quærimus. Sint in ea applicatæ proximæ BN, vel $bn = z$, differentialis $bb = dz$: eritque proin dx ad dz, ut velocitas per dx ad veloci-

locitatem per dz; hoc eſt, ut: $\frac{dz\sqrt{\int 2Adr}}{dr}$ ad $\frac{dy\sqrt{\int 2Adr}}{dr} - \int\frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; unde emergit æquatio $dz\sqrt{\int 2Adr} = dy\sqrt{\int 2Adr} - dr\int\frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$; exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m actualiter deſcribit in plano verticali immobili, quod ſuper DH erectum concipitur, & congruens cum plano mobili AKC in ſitu initiali. Diviſa æquatione per $\sqrt{\int 2Adr}$, prodit valor ipſius $dz = dy - \frac{dr}{\sqrt{\int 2Adr}} \times \int\frac{Bdr}{\sqrt{\int 2Adr}}$ generaliſſime pro qualibet linea AEC, ſive recta ſit, ſive curva.

COROLLARIUM I.

Si fuerint A & B quantitates conſtantes, incidimus in caſum Trianguli rectilinei AKC, reſoluti in *Commentariis* citatis. Revera hoc docebit æquatio inventa, quæ nunc hanc faciem induit $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}} \times \int\frac{dr}{\sqrt{\int 2dr}}$ vel [ſimplici integratione denominatoris $\sqrt{\int 2dr}$ adhibita] hanc $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int\frac{dr}{\sqrt{2r}}$; cui æquivalet iſta $dz = dy - \frac{B}{A} \times dr$. Quæ porro integrata ſimpliciter, dat, in terminis finitis, hanc æquationem $z = y - \frac{Br}{A}$, quæ evidenter monſtrat lineam ABP eſſe rectam. Ut autem pateat eandem eſſe cum illa quam dedimus in *Comment. Coroll.* 11 *; ponamus puncta E, B, N, perveniſſe ad loca infima C, P, K; & ita erit $z =$ PK; $y =$ CK, ſeu b; $r =$ AC, ſeu c, & cum præterea per *Coroll.* 1, ſit $B : A = bm : cM$; erit $PK = CK - \frac{bm \times AC}{cM}$; adeoque CK — PK, ſeu CP, $= \frac{bm \times AC}{cM} =$ [ob $AC = c$] $\frac{bm}{M} =$ [ob $CK = b$] $\frac{m}{M} \times CK$; quod prorſus conſpirat cum *Coroll.* 2 loci citati.

* Pag. 370, *Tom. III.*

COROLLARIUM II.

Poſito eodem caſu Trianguli rectilinei AKC; ut inveniatur æquatio inter coordinatas AN & NB, hoc eſt, inter x & z, exprimens naturam lineæ ABP, quam corpus m realiter deſcribit; id tantum agendum eſt, ut in æquatione modo ante inventa $dz = dy - \frac{B}{A} \times \frac{dr}{\sqrt{2r}} \times \int \frac{dr}{\sqrt{2r}}$, ſubſtituantur valores quantitatum dy, dr, r, & $\frac{B}{A}$; nempe $\frac{bdx}{a}$ pro dy, $\frac{cx}{a}$ pro r, $\frac{cdx}{a}$ pro dr, & $\frac{bm}{cM}$ pro $\frac{B}{A}$: quo facto, & reductione peracta, prodibit $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, ubi per ſimplicem integrationem quantitatis $\frac{dx}{\sqrt{2x}} \times \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, mutaretur æquatio in hanc $adz = bdx - \frac{bmdx}{M}$: rurſuſque ſimpliciter integrando, haberetur $az = bx - \frac{bmx}{M}$; ſeu $z = \frac{bx}{a} - \frac{bmx}{aM}$; quæ æquatio, reſpectu habito ad valorem litterarum, eſt eadem cum inventa $z = y - \frac{Br}{A}$, per quam denotari vidimus lineam ABP eſſe rectam.

COROLLARIUM III.

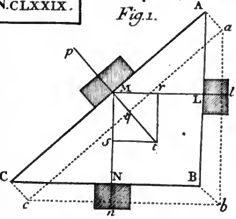
Quod ſi vero, in æquatione $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$, integretur $\frac{dx}{\sqrt{2x}}$ in tota ſua latitudine, ita ut fiat $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} - \sqrt{2q}$; auferendo ſcilicet a ſimplici integrali $\sqrt{2x}$ adhuc arbitrarium aliquod conſtans $\sqrt{2q}$; emerget inde $adz = bdx - \frac{bm}{M} \times \frac{dx}{\sqrt{2x}} \times (\sqrt{2x} - \sqrt{2q})$; ſeu $adz = bdx - \frac{bmdx}{M} \times \frac{bmdx\sqrt{2q}}{M\sqrt{2x}}$; quod ſimpliciter integratum, dat hanc æquationem

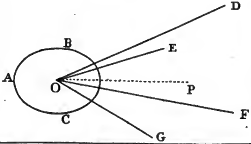
alge-

XXVIII

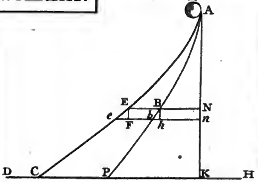
N.º CLXXIX.

Fig. 1.





N.º CLXXX.



NAPOLI

Digitized by Google

algebraicam $az = bx - \frac{bmx}{M} + \frac{2bm\sqrt{qx}}{M}$; quæ liberata ab aſymmetria, & poſito T pro maſſa Trianguli quæ eſt $M - m$; dat $aaM^2zz - 2abMTxz + bbT^2xx = 4bbmmqx$; ſeu $(aMz - bTx)^2 = 4bbmmqx$.

Obſervabunt Analyſtæ, ſi calculum inire voluerint, hanc æquationem eſſe ad Parabolam; quæ autem degeneret in lineam rectam, in caſu quo aſſumta $q = 0$.

Ponamus igitur velocitatem initialem corporis m non eſſe nullam; ſed eam eſſe, quam acquireret in directione hypothenuſæ, in caſu ſimplici a me olim ſoluto, poſtquam ſuper ea percurriſſet partem reſpondentem altitudini verticali $= q$; quam velocitatem nominemus $= v$: Dico, ſi hac velocitate initiali v, corpus m incipiat moveri ſuper hypothenuſa Trianguli rectilinei; eo momento, quo ipſum Triangulum eſt adhuc in quiete: dico, inquam, fore ut corpus m, ſuo motu vero continuo, ſequatur prædictam Parabolam.

N°. CLXXXI.

PROBLEMA NEWTONIANUM

Generaliter conceptum & ſolutum.

Vide Princip. Phil. Nat. *Lib.* 2. *Prop.* 10. p. 252. Edit. 3.

aut

Numerum LXXXVII. pag. 481. *Tom. I.*

Tendat vis gravitatis data quacunque lege variabilis, ad punctum datum quodcunque; ſitque reſiſtentia qualiſcunque. Requiritur tum Medii denſitas in locis ſingulis [ſi nimirum reſiſtentia ex denſitate, & velocitate, quocunque modo detur], quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur; tum corporis velocitas, & Medii reſiſtentia ipſa in locis ſingulis.

Confer *Acta Lipſ.* 1713. pag. 121. & ſeq. aut Numerum XC, pag. 542 & ſeq. *Tom. I.*

Typus Solutionis Analyticæ.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 1.

Sit diſtantia $= x =$ XC, Cc $= ds$, bc $= dy$, Cb $= dx$; velocitas in C $= v$, vis centralis $= fx$: Erit vis tangentialis $= \frac{fdx}{ds}$; vis normalis $= \frac{fdy}{ds}$. Sit item reſiſtentia $= R$; denſitas $= D$; radius evolutæ $= r =$ CO; angulus contactus $= c = \frac{\text{Cc}}{\text{CO}} = \frac{ds}{r}$. Erit vis centrifuga $=$ vi normali, hoc eſt, $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; unde $vv = \frac{frdy}{ds} = \frac{fdy}{c}$. Ergo jam inventa eſt velocitas, ex data vi centrali & natura curvæ.

Porro ex natura accelerationis patet, fore [ſumtis ſignis ſuperioribus pro aſcenſu, & inferioribus pro deſcenſu] $fdx \pm Rds = -vdv = -\frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})$. Unde invenitur $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds}$. Adeoque etiam reſiſtentia habetur ex data vi & natura curvæ, & quidem independenter a lege denſitatis. Newtonus autem, non putans hoc fieri poſſe, determinandam ſuſcepit primo denſitatem, atque ex ea & ex velocitate poſtea quæſivit reſiſtentiam: quæ via, cum ſit inverſa & parum naturalis, illum præcipitem dedit in calculum longe operoſiſſimum & abſtruſum; etiamſi caſus quem proponit ſit particulariſſimus.

Ipſa vero denſitas D nunc nullo labore obtinetur. Ponatur enim $R = v^n D$, hoc eſt, reſiſtentia proportionalis non tantum quadrato velocitatis [ut ſupponit Newtonus] ſed cuicunque dignitati velocitatis multiplicatæ per denſitatem. Erit utique $D = \frac{R}{v^n} = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds(\frac{fdy}{c})^{\frac{1}{2}n}} = \frac{c^{\frac{1}{2}n} fdx}{\mp ds(fdy)^{\frac{1}{2}n}} \mp \frac{\frac{1}{2-n}d((\frac{fdy}{c})^{\frac{2-n}{2}})}{ds}$.

Hinc etiam tempus t facillime deducitur: nam $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$; adeoque $t = \int \frac{ds\sqrt{c}}{\sqrt{fdy}}$.

Eſto

Eſto exemplum NEWTONI [v. p. 254, aut pag. 485 *Tom. I.*] ubi curva PFQ eſt ſemicirculus; vis tendens perpendiculariter ad horizontem uniformis, adeoque invariabilis; $\frac{dx}{ds} = \frac{AC}{AQ}$; $\frac{dy}{ds} = \frac{HC}{AQ}$; $c = \frac{ds}{r} = \frac{HI}{AQ}$. Unde $v = \sqrt{\frac{fdy}{c}} = \sqrt{\frac{fdy \times AQ}{HI}} = \sqrt{f \times HC}$. Hoc eſt, ob datam f, erit velocitas v ut $\sqrt{CH}$; ſicuti habet NEWTONUS, p. 256. l. 4.* TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig. 2.*

Porro $R = \frac{fdx + \frac{1}{2} d(\frac{fdy}{c})}{\mp ds} = \frac{f \times MI + \frac{1}{2} d' f \times HC)}{\mp HI} = \frac{f. (MI + \frac{1}{2} MI)}{\mp HI}$ = [ſumtis proportionalibus in terminis finitis] $\frac{f \times (AC + \frac{1}{2} AC)}{\mp AQ} = \frac{3f \times AC}{\mp 2AQ}$. Adeoque $R : f = 3AC : \mp 2AQ$, ut NEWTONUS ibidem [ſed in prima Editione errabat †, nec animadvertit errorem, niſi me monente]. Ideoque tantum deſcenſus eſt poſſibilis phyſice.

Denſitas ita habetur $D = \frac{R}{vv} = \frac{3f. AC : \mp 2AQ}{CH}$, adeoque, ob datas f & AQ, erit D ut $\frac{AC}{CH}$; ſicuti NEWTONUS invenit, p. 255, l. ult., & p. 256, l. 1 ‡, ſed via inverſa quæſivit primo, quod noſtra naturali via ultimo datur ſponte.

Poterat etiam tempus determinari, quia nempe $dt = \frac{ds}{v} = \frac{HI}{\sqrt{CH}}$. Hinc $t = \int \frac{HI}{\sqrt{CH}} = \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(aax - x^3)}}$. cujus quantitatis integratio pendet a rectificatione curvæ Lemniſcatæ, ut olim docui in conſtructione Iſochronæ Paracentricæ §. Atque ex formula $t = \int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ patet tempus per arcum FH eſſe æquale tempori ſemi-oſcillationis Penduli ſuſpenſi ex

 cen-

* pag. 488. Col. 2. lin. 1. & 2. *Tom: I.*
† *Tom. I.* pag. 487. Col. 1. lin. 6, 5, 4 à fine.
‡ Ibid. Col 1 & 2.
§ N°. XIX. pag. 120. *Tom. I.*

centro A, & deſcribentis arcum HF; concipiendo figuram inverſam, ſive ſemi-peripheriam PFQ deſcriptam infra diametrum PQ.

Sit nunc curva propoſita Spiralis Logarithmica, inque ejus umbilico ſit centrum virium, quod unicum eſt exemplum a NEWTONO prolatum curvarum, in quibus centrum virium in diſtantia eſt finita. Hoc autem Exemplum per methodum noſtram eſt facillimum. Quia enim radius evolutæ Spiralis eſt PO,

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXI. *Fig.* 3.

[Vid. Fig. NEWT. pag. 275, vel 276] erit angulus contactus, ſeu $c = \frac{ds}{PO} = \frac{dy}{x}$. Hinc formula noſtra generalis . . . $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d\left(\frac{fdy}{c}\right)}{\mp ds}$ mutatur in hanc, $R = \frac{fdx + \frac{1}{2}d(fx)}{\mp ds} = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds}$ comprehendentem omnia quæ NEWTONUS octo paginis operoſe pertractat *. Ponatur primo $f = x^m$; ſitque ratio conſtans ds ad dx, ut 1 ad q; habebitur $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2}$. Hinc reſiſtentia eſt proportionalis vi centrali. Velocitas $v\left[\frac{fdy}{c}\right] = \sqrt{fx} = \sqrt{x^{m+1}}$. Ponatur porro D, ſeu $\frac{R}{v^n}$, ſeu $\frac{(3+m).qx^{(2m-mn-n):2}}{\mp 2} = \frac{1}{x} = x^{-1}$; faciendum erit $\frac{2m-mn-n}{2} = -1$, unde $n = \frac{2m+2}{m+1} = 2$. Ergo manente $f = x^m$, & $D = \frac{1}{x}$, ſupponendo cum NEWTONO reſiſtentiam eſſe in duplicata ratione velocitatum, & ſimplici denſitatum, corpus ſemper gyrari poteſt in Spirali Logarithmica; quæ eſt Propoſitio NEWTONI, ſed in omni amplitudine ſumta, quam ipſe nimis reſtrinxit præter neceſſitatem. Vid. *Act. Lipſ.* 1713, pag. 125 †.

* *Tom. I.* pag. 495, & ſeq. † N°. XC. pag. 548, *Tom. I.*

COROLLARIUM I.

Quia vis centrifuga $\frac{vv}{r} = \frac{fdy}{ds}$; erit $fdy = \frac{vvds}{r}$ = [in hoc caſu] $\frac{vvdy}{x}$; adeoque $f = \frac{vv}{x}$. Hoc eſt velocitas in loco quovis deſcenſus [ſi m eſt affirmativum, vel etiam negativum, ſed < 3] aut aſcenſus [ſi m eſt negativum & ſimul > 3] ea ſemper eſt, qua cum corpus, in medio non reſiſtente, eadem vi centripeta gyrari poteſt in circulo ad eandem a centro diſtantiam. Vide *Coroll.* 1. NEWT. pag. 277 †. Confer *Act. Lipſ.* 1713, pag. 126 *.

COROLLARIUM II.

Quia D, in ſuppoſitione NEWTONI, fit $= \frac{(3+m).q}{\mp 2x} = \frac{(3+m).qds}{\mp 2xds} = \frac{(3+m).dx}{\mp 2xds} = \frac{(3+m)\times OS}{\mp 2SP\times OP}$; manifeſtum eſt, ob datum $\frac{3+m}{\mp 2}$, denſitatem eſſe ut $\frac{OS}{SP\times OP}$; ceu habet NEWTONUS ibid. Coroll. 2 †. Conf. *Act. Lipſ.* loco cit.

COROLLARIUM III.

$R : f = \frac{(3+m).qx^m}{\mp 2} : x^m = \frac{(3+m).q}{\mp 2} : 1 = \frac{(3+m).qds}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)dx}{\mp 2} : ds = \frac{(3+m)}{\mp 2} OS : OP$. Et in caſu particulari NEWTONI, ubi $m = -2$; erit $R : f = \mp \frac{1}{2} OS:OP$; ut quidem habet NEWTONUS ibid. Coroll. 3 †. Sed non animadvertit deſcenſum tantum eſſe poſſibilem. Confer *Act. Lipſ.* loco cit.

COROL-

† *Tom. I. pag.* 497. * N°. XC. pag. 549, *Tom. I.*

COROLLARIUM IV.

Fiat reſiſtentia $= \frac{3+m}{+\frac{1}{2}} f$; fiet $OS = OP$; & Spiralis conveniet cum linea recta PS: velocitas vero cum ſemper ſit in Spirali $= \sqrt{x^{m+1}} = x^{(m+1):2}$; erit etiam in hac linea recta velocitas ut $x^{(m+1):2}$. Adeoque, in caſu NEWTONI, ubi $m = -2$, Velocitas illa ut $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Vide Coroll. 4 NEWT. pag. 277 †.

COROLLARIUM V.

Cum in velocitatis expreſſione $v = x^{(m+1):2}$ non ingrediatur littera q, quæ ſpeciem Spiralis diſtinguit; evidens eſt, in ſingulis Spiralibus Logarithmicis cujuſcunque ſpeciei, eſſe velocitates æquales in diſtantiis æqualibus. Quod itaque independenter a Corollario præcedente demonſtravimus, ſecus ac fecit NEWTONUS: Vide ejus Coroll. 5, p. 277 & 278. * Patet etiam per ſe, tempora per ſingulas Spirales eſſe ad ſe invicem, ut longitudines Spiralium. Vid. *Act. Lipſ.* ejuſdem an. p. 127 **.

Reliqua NEWTONI Corollaria pari modo per noſtra examinari poſſunt.

COROLLARIUM VI.

Si $m = -1$, erit velocitas $v = \sqrt{x^0} =$ conſtanti, adeoque uniformis; & tempora per quoſvis arcus erunt ipſorum arcuum longitudinibus proportionales. Vid. *Act. Lipſ.* 1713, p. 126 **.

Propoſitio NEWTONI XVI, p. 280 ‡ diſcrepat nunc ab ea quam in prima editione habuerat, edoctus eam falſam eſſe,

ſicuti

† *Tom. I*, pag. 497. * *Tom. I.* pag. 498. ** N°. XC. pag. 550, *Tom. I.*
‡ *Tom. I*, pag. 500.

ſicuti monſtravi in *Act. Lipſ.* 1713, pag. 125, Conſect. 3 † in hac vero, quam in editionibus poſterioribus ſubſtituit, fruſtra vult vim centripetam debere eſſe *reciproce* ut dignitatem quamlibet diſtantiæ; cum generalius dicere potuiſſet, *ſive reciproce*, *ſive directe*. Nam monſtravimus hic, ſi denſitas ſit diſtantiis reciproce proportionalis, poſſe ſemper eſſe $f = x^{m}$, ubi m denotat exponentem quemcunque, ſive affirmativum, ſive negativum.

Problema IV Newtoni, *p.* 281, ubi proponitur invenienda & vis centripeta & medii reſiſtentia, qua corpus in data Spirali, data velocitatis lege, revolvi poteſt: cujus Solutionem ipſam non exhibet, ſed modum tantum indicat, quo eo perveniri poſſe putat; ad cujus veſtigia ſi Solutionem tentare vellemus, multum temporis & ſudoris impendendum eſſet. Noſtra vero methodo rem ludendo peragemus. Nam v ſeu $\sqrt{\frac{fdy}{c}}$ cum ſit æquale $\sqrt{fx}$, erit $\frac{vv}{x} = f$: ergo jam determinavimus vim centripetam. Nunc valor ipſius f, ut & valor ipſius df, qui eſt $= \frac{2vxdv - vvdx}{xx}$ ſubſtituatur in $R = \frac{\frac{3}{2}fdx + \frac{1}{2}xdf}{\mp ds} = \frac{3fxxdx + x^3 df}{\mp 2xxds} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; prodibit $R = \frac{vvdx + vxdv}{\mp xds} =$ [quia $dx = qds$] $\frac{qvv}{\mp x} + \frac{vdv}{\mp ds}$. Data igitur, per hypotheſin, v in x, datur f & R. Quorſum igitur tot intricatiſſimæ ambages?

Problema V Newtoni, ubi ex data lege vis centripetæ, invenienda eſt medii denſitas ad deſcribendam datam Spiralem. Newtonus prolixitate non neceſſaria, confugit ad inquiſitionem retardationis velocitatis. Nos ita facile rem abſolvimus. Quia $vv = fx$, vel $v = \sqrt{fx}$, habetur velocitas ex data vi centripeta.

† No. XC, pag. 548, 549, *Tom. I.*

Et quia NEWTONUS ſupponit $vvD = R$, quam invenimus $= \frac{d(fx^3)}{\mp 2xxds}$; erit utique $D = \frac{R}{vv} = \frac{d(fx^3)}{\mp 2fx^3ds} =$ [differentiando actu & ſubſtituendo qds pro dx] $\mp \frac{3q}{2x} \mp \frac{df}{2fds}$.

S C H O L I U M.

Videmus hæc duo Problemata nihil fere laboris requirere; ſi rite tractentur; ſed NEWTONUS præpoſtera methodo uſus, neſcio quid magni laboris metuens, vadum non tentavit.

N°. CLXXXII.

PROBLEMA BALLISTICUM.

I.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 1. *Ata velocitate initiali, expreſſa per* AC, *alicujus mobilis gravis, quod ex* A *verticaliter in altum exploditur, in medio uniformiter denſo; Quæritur altitudo* AK *ad quam aſcendit; item tempus quod tam in aſcenſum quam in deſcenſum impendit.*

S O L U T I O.

II.

Sit CGM Parabola, ſeu ſcala velocitatum; cujus nempe applicatæ CA, GI, gi &c. deſignent velocitates mobilis gravis in punctis A, I, i &c. ſi aſcenderet in vacuo, ſeu in medio non reſiſtente. Sit etiam curva CEF [quam Logarithmicam eſſe ex *Diſſertatione mea de Motu* † patet] ſcala velocitatum ejuſdem mobilis, ſi expers gravitatis cum velocitate initiali AC

† N°. CXXXV. Cap. XIII. pag. 74, & 75, Tom. III.

A C verticaliter aſcenderet; adeo ut applicatæ E N, e n, F B, &c. exprimant velocitates reſiduas in punctis N, n, B, &c. Sit tandem curva C H K, ſcala velocitatum mobilis gravitate præditi, in medio uniformiter denſo verticaliter aſcendentis, cum velocitate initiali A C: ita ut applicatæ C A, H L, h l, &c. deſignent velocitates reſiduas in punctis A, L, l &c.

I I I.

Per duo quævis puncta proxima R, S, ducantur axi A B parallelæ, ſecantes curvas prædictas in punctis H, G, E, & h, g, e, ex quibus deductæ intelligantur applicatæ H L, G I, E N, & h l, g i, e n, quarum priores ſecent S e in punctis P, Q, T.

Dicantur nunc $AC = n$, $AM = a$, $FB =$ unitati $= 1$, $AB = b$, ſubtangens Logarithmicæ $CEF = c$, velocitas $HL = GI = EN = v$; ſubtangens Logarithmicæ, quæ reſpondet Logarithmis in Tabulis vulgaribus *Vlacquianis* proſtantibus $= q = 4342945$. Erit, ſumendo Logarithmos ex iſtis Tabulis, $q : c = lv : \frac{clv}{q} = BN$, & $q : c = ln : \frac{cln}{q} = BA$. Eſt vero EN, ſeu $v : c = ET\,[dv]$: Te ſeu $Nn\,[\frac{cdv}{v}]$, adeoque $\frac{Nn}{EN} = \frac{cdv}{vv} =$ tempuſculo per Nn; integrando $\frac{c}{1} - \frac{c}{v} = tBN$ [intelligo per tBN tempus per BN] & $\frac{c}{1} - \frac{c}{n} = tBA$; hinc $\frac{c}{v} - \frac{c}{n} = tAN$. Porro vocetur R reſiſtentia medii, quando mobile gravitatis expers eſt in N; & G vis gravitatis ejuſdem mobilis gravitate præditi, cum aſcendit in vacuo: erit $\frac{R.\,cdv}{vv} = dv$ [quia nempe decrementa vel incrementa velocitatum, ſunt reſiſtentiis vel viribus motricibus in tempuſcula ductis proportionalia]; adeoque $R = \frac{vv}{c}$.

IV.

Nunc $AC^2 : IG^2$ $[= nn : vv] = AM\,[a] : MI\,[\frac{avv}{nn}]$. Ergo $Ii = Qg = \frac{2avdv}{nn}$, & $\frac{Ii}{GI} = \frac{2adv}{nn} = t\,Ii$; integrando $\frac{2av}{nn} = t\,IM$, unde $\frac{2a}{n} = t\,AM$. Jam quia $\frac{G.2adv}{nn} = dv$; habetur $G = \frac{nn}{2a}$. Ut nunc pro aſcenſu determinetur $t\,AK$, indeque ipſa curva CHK; notetur, ſummam virium $G+R$ retardare mobile aſcendens; voceturque $KL = z$, & Ll vel $Ph = dz$. Erit $\frac{dz}{v} = t\,Ll$, & $\frac{(G+R).dz}{v} = dv$; adeoque $\frac{vdv}{dz} = G+R = \frac{nn}{2a} + \frac{vv}{c}$. Hinc $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv}$, quæ exprimit naturam curvæ CHK, ope Logarithmorum conſtruendæ. Verum $t\,Ll\,[\frac{dz}{v}] = \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, & $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$, cujus integratio dependet a rectificatione arcus circularis, qui habet radium $= n\sqrt{\frac{c}{2a}}$, & tangentem $= v$, ut notum eſt. Sumta itaque HL, vel v, æquali ipſi CA, vel n; prodibit tempus per totam AK. Ut autem hoc tempus comparari queat cum tempore per AM aſcenſus in vacuo $= \frac{2a}{n}$, ſequentia ſunt obſervanda.

V.

Concipio medium uniformiter denſum, tanquam ex corpuſculis æqualibus & elaſticis, per ſpatium æqualibus interſtitiolis a ſe invicem diſſeminatis conſtans; cujus naturæ aërem eſſe valde eſt probabile. Oſtendi autem in *Diſſertatione mea de Legibus communicationis motus*, Cap. XII, §. 13 †, corpus conoidicum ADB [vid. Fig. ibid.] quod in tali medio ſecundum directionem axis

† pag. 72, *Tom. III*.

axis ID [vertice D antrorſum verſo] velocitate n moveri incipit in linea horizontali, vel in quacunque recta, ſi ſit gravitatis expers, percurriſſe ſpatium $= Cxxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2}$ [ponendo poſt integrationem $x = IA$], quando eo uſque pervenit, ut velocitas reſidua ſit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n. Intelligo autem per C, longitudinem cylindri recti aërei eandem cum Conoïde baſin, eandemque quantitatem materiæ, ſeu [ſi ponderoſa eſſe ſupponatur] idem pondus habentis; per ln intelligo Logarithmum ipſius n ex Tabulis uſitatis deſumtum; item per ds, intelligo elementum curvæ, ex cujus revolutione generatur. Si Conoïdes ADB ſit hæmiſphærium, cujus radius $= v$, erit [in caſu quo x evadit $= r$] $\int \frac{xdx^3}{ds^2} = \frac{1}{4}rr$, adeoque $Cxxln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2} = Crrln : 17371780 \times \frac{1}{4}rr$ $= \frac{Cln}{4342945}$.

VI.

Poſito nunc hemiſphærium eſſe ex ferro, & hoc eſſe 7000ies gravius vel denſius aëre; erit C, ſeu longitudo cylindri aërei æque gravis & ejuſdem baſis cum hemiſphærio $= \frac{2}{3} r \times 7000$ $= 4667r$. Ut autem habeatur C pro tota Sphæra, intelligatur alterum hemiſphærium poſterius, quod ab aëre allabente intactum manet, incorporari [ut ita dicam] in anteriori; ita ut hoc evadat duplo denſius: patet hoc hemiſphærium, duplo denſius quam ferrum, percurrere, eodem tempore, eandem viam quam integer globus ferreus; ergo prædictus numerus ſumendus tantum eſt duplus, vel pro radio r ſimpliciter ſcribenda eſt diameter globi, quæ vocetur D, atque ita erit $C = 4667D$.
Hinc $\frac{Cln}{4342945} = \frac{4667D \times ln}{4342945}$.

Sit ex. gr. $n = 2$, hoc eſt, ſi ſcire velimus, quouſque globus ferreus in linea horizontali moveri debeat, ut ab aëris reſiſtentia amittat dimidium ſuæ velocitatis initialis, in quo caſu

$ln = lz = 0.\ 3010300$; facto calculo prodibit $\frac{4667\, D \times ln}{4342945}$ $= 3235\, D$. In diſſertatione mea inveni $3700\, D$ pro globo plumbeo.

VII.

Sed ut ad rem redeam; invenienda eſt ante omnia c, vel ſubtangens Logarithmicæ CEF; quod fit faciendo, ut ln ad AB [$Cxx\,ln : 17371780 \int \frac{x\,dx^3}{ds^2}$, quæ pro globo ferreo eſt $\frac{4667\, D\, ln}{4342945}$] ita ſubtangens Logarithmicæ Tabularum, ſeu 4342945, ad ſubtangentem quæſitam c, quæ per conſequens $= 4667\, D$. Quia itaque per §. IV, $t\,LK = \int \frac{2acdv}{nnc + 2avv}$; ſcribatur pro c ejus valor $4667\, D$, & habebitur $t\,LK = \int \frac{9334\,aDdv}{4667\,nnD + 2avv}$. Hoc ut conſtruatur, ſit deſcriptus quadrans circuli DXY, cujus radius $OD = n \sqrt{\frac{c}{2a}} = n \sqrt{\frac{4667\, D}{2a}}$; & in tangente DZ ſumatur DV $= v$; erit, ducta OV, arcus $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,LK$. Hinc ſi DV, vel v, fit æqualis velocitati initiali $AC = n$, dabit $DX \times \frac{2a}{nn} = t\,AK$. Eſt autem, per §. IV, tempus per AM in vacuo $= \frac{2a}{n}$. Adeoque $t\,AM : t\,AK = \frac{2a}{n} : DX \times \frac{2a}{nn}$ $= n : DX = DV : DX =$ [quia $OD : DV = n \sqrt{\frac{c}{2a}} : n$ $= \sqrt{c} : \sqrt{2a} = c : \sqrt{2ac}$, ſumto radio $O\Delta = c$, & tangente $\Delta U = \sqrt{2ac}$] $= \Delta U : \Delta \xi$. Quod ſi vero comparare lubeat tempus per AK in medio reſiſtente, ad tempus per datam altitudinem IM in vacuo, erit $t\,IM : t\,AK = \frac{2av}{nn} : DX \times \frac{2a}{nn} =$ $v : DX = GI : DX$.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig. 2.*

VIII.

Notandum eſt, ex natura Parabolæ MGC [in *Fig.* 1], quadratum

dratum velocitatis GI in vacuo, ſemper eſſe proportionale altitudini IM, ad quam aſcendere poteſt; adeoque $\frac{vv}{IM} = \frac{nn}{AM} = \frac{nn}{a}$ = conſtanti; quæ dicatur $= e$. Quare jam erit, pro medio reſiſtente, tLK ſeu $\int \frac{9334 a D dv}{4667 m D + 2avv} = \int \frac{9334 D dv}{4667 eD + 2vv}$. Hinc [*Fig.* 2] quadrantis DXY radius OD, ſeu $n\sqrt{\frac{4667 D}{2a}} = \sqrt{\frac{4667 eD}{2}}$ $= \sqrt{2334 eD}$ = conſtanti. Sit igitur velocitas initialis, hoc eſt, AC [*Fig.* 1] vel DV [*Fig.* 2] in medio reſiſtente infinite magna, quo ipſo arcus DX abit in quadrantem DXY, quia ſecans OXV evadit parallela tangenti DV; unde tIM : tAK = IG : DXY, hoc eſt, ut finitum IG ad finitum DXY: eſt enim quadrans DXY finitus, ob radium OD finitum, ut pote $= \sqrt{2334 eD}$. TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 1. & 2.

Hinc patet veritas Paradoxi; globum ſcilicet in aëre uniformiter reſiſtente ſurſum exploſum, quamvis infinita velocitate, impendere tantum tempus finitum per totam altitudinem, ad quam aſcendere poteſt.

C O R O L L A R I U M I.

Per §. III, $tAB = \frac{c}{1} - \frac{c}{n}$ in medio reſiſtente, ſed ſine gravitate; & per §. IV, $tAM = \frac{2a}{n}$ in vacuo, ſed cum gravitate. Ergo $tAB : tAM = \frac{c}{1} - \frac{c}{n} : \frac{2a}{n} = nc - c : 2a =$ [in caſu globi ferrei] $(n - 1) \times 4667 D : 2a =$ [in caſu quo præterea $n = 2$] $4667 D : 2a$.

Hinc ſi diameter globi ſit 3 poll. ſeu $\frac{1}{4}$ ped., & ſit a, ſeu altitudo AM, ad quam hic globus in vacuo aſcendere poſſet = 1000 ped.; erit $tAB : tAM :: \frac{4667}{4} : 2000 = 4667 : 8000$. Supponendo igitur, ut HUGENIUS determinavit, grave in vacuo deſcendere $15\frac{1}{12}$ ped. menſuræ Pariſinæ in uno minuto ſecundo, requirentur [ad aſcendendum ad altitudinem 1000 ped. Pariſ.]

8

$8\frac{1}{6}$ ſecunda quam proxime : Faciendo itaque $8000 : 4667 = 8\frac{1}{6} : 4\frac{3}{4}$, paulo plus; prodibunt paulo plus quam $4\frac{3}{4}$ minuta ſecunda, quibus mobile gravitatis expers, aut globus 3 poll. Pariſ. in horizonte motus indiget, donec a reſiſtentia aëris amiſerit dimidium velocitatis initialis, qua cum aſcendere poſſet in vacuo, ad altitudinem mille pedum.

Corollarium II.

Supra §. IV inventum eſt Ll, vel $dz = \frac{2acvdv}{nnc + 2avv} =$ [ſubſtitutis pro nn, vv & $2vdv$, earum proportionalibus AM, IM, & Ii; & vocando IM $= y$, I$i = dy$] $\frac{cdy}{c + 2y}$; cujus integrale [ſumtis Logarithmis ex Tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}cl(c + 2y) - \frac{1}{2}clc}{4342945}$ $=$ KL. Hinc tota AK $= \frac{\frac{1}{2}cl(c + 2a) - \frac{1}{2}clc}{4342945} = \frac{cl(c + 2a) - clc}{8685890}$ $=$ [in præſenti caſu] $\frac{4667Dl(4667D + 2000) - 4667Dl(4667D)}{8685890}$ $=$ [ſuppoſito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{1166\frac{3}{4}l3166\frac{3}{4} - 1166\frac{3}{4}l1166\frac{3}{4}}{8685890}$ $= \frac{1166\frac{3}{4} \times 3.5006138 - 1166\frac{3}{4} \times 3.0669778}{8685890} =$ $\frac{1166\frac{3}{4} \times 433636}{868589} = \frac{4667 \times 108409}{868589} = \frac{505944803}{868589} = 582\frac{1}{2}$ ped. Pariſ. quam proxime.

Atque ita patet globum noſtrum ferreum, non multo plus quam ad dimidiam altitudinem in aëre aſcendere, ad quam totam aſcenderet in vacuo.

IX.

Pergimus nunc ad determinandum deſcenſum ex altitudine KA, quem mobile grave finito aſcenſu inchoare debet. Sit curva KVγ ſcala velocitatum, cujus ſcilicet applicatæ $6v$, βV,

Aγ

Aγ denotent velocitates acquiſitas mobilis gravis deſcendendo in punctis ς, β, A. Per ſimile ratiocinium; quo uſus ſum in §. IV, conficitur, differentiam virium $G - R$ accelerare mobile cadens. Vocetur nunc K$\beta = z$, & $\varsigma\beta$ vel v$\alpha = dz$; erit [reliquis manentibus] $G - R = \frac{nn}{2a} - \frac{vv}{c} = \frac{vdv}{dz}$; unde $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{acdv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} - \frac{acdv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} =$ [ſubſtituendo pro nn, vv, $2vdv$, earum proportionales AM, IM, Ii] $\frac{cdy}{c - 2y}$; cujus integrale [ſumendo Logarithmos ex tabulis] $= \frac{\frac{1}{2}clc - \frac{1}{2}cl(c - 2y)}{4342945} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} =$ Kβ. Hinc elegantia fluunt Corollaria.

COROLLARIUM I.

Exiſtente MI $=$ MA, hoc eſt, ſi $y = x$, habetur K$\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquiſita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In noſtro exemplo, ubi $c = 1166\frac{2}{3}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{1166\frac{2}{3}l\,1166\frac{2}{3} - 1166\frac{2}{3}l - 833\frac{1}{3}}{8685890} =$ impoſſibili, quia Logarithmus quantitatis affirmativæ ad Logarithmum quantitatis negativæ tranſgredi non poteſt, quin tranſeat per lo qui eſt $= -$ infinito; atque adeo quin ultra infinitum [ſit venia dicto] globus deſcendat. Unde colligitur, globum noſtrum nunquam recuperare poſſe, recidendo, velocitatem ſuam initialem, etiamſi in infinitum deſcenderet.

COROLLARIUM II.

Sit autem $2y = c$; prodit $\frac{clc - clo}{8685890} =$ infinito $=$ Kβ. Unde ſi $y = \frac{1}{2}c$, hoc eſt, in noſtro caſu, ſi y vel MI $= 4667 \times \frac{1}{2}D = \frac{4667}{8}$ ped. $= 583\frac{3}{8}$ ped. aut circiter $=$ KA [quæ in Co-

roll. 2, §. VII, inventa eſt $= 582\frac{5}{8}$ ped.] habebit globus maximam ſuam poſſibilem velocitatem, ad quam autem nunquam pertingit, ſed data quavis quantitate propius accedit. Hinc ſumta $MI = 583\frac{5}{8}$ ped. erit ducta GR parallela ipſi MA, aſymtotos ſcalæ velocitatum KVγ.

COROLLARIUM III.

Sed ut inveniatur ipſa velocitas maxima *ad quam non*, fiat $MA : MI = AC^2 : IG^2$; hoc eſt, $1000 : 583\frac{5}{8} = nn : \frac{4667}{8000}nn = 160000 : 93340$, quorum radices ſunt quam proxime ut 40 ad $30\frac{1}{2}$. Dico itaque velocitatem initialem, eſſe ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 40 ad $30\frac{1}{2}$, ſeu ut 80 ad 61.

X.

Quod attinet ad tempus deſcenſus, illud ita determinatur. Per §. VIII, $\beta\mathfrak{C}$, ſeu $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv}$, proinde $\frac{dz}{v}$ ſeu $\iota\mathfrak{C}\beta$

$$= \frac{2acdv}{nnc - 2avv} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c} \times dv}{n\sqrt{c} + v\sqrt{2a}} + \frac{\frac{a}{n}\sqrt{c} \times dv}{n\sqrt{c} - v\sqrt{2a}} = \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac} \times dv}{n\sqrt{2ac} + 2av}$$

$$+ \frac{\frac{a}{n}\sqrt{2ac} \times dv}{n\sqrt{2ac} - 2av} = \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times 2adv}{n\sqrt{2ac} + 2av} + \frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times 2adv}{n\sqrt{2ac} - 2av}.$$

Hinc integrando, adhibitis Logarithmis ex Tabulis, $\iota K\beta =$

$$\frac{\frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times l(n\sqrt{2ac} + 2av) - \frac{1}{2n}\sqrt{2ac} \times l(n\sqrt{2ac} - 2av)}{4342945} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2ac}}{2nn} \times l\frac{+2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}.$$

XI.

Ut autem inveniatur commode tempus deſcenſus per totam KA, quærendus primo eſt valor ipſius v in puncto A, hoc eſt Aγ.

Quod

Quod ſic facio. Per *Coroll.* 2, §. VII, $AK = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$, & per §. VIII, $K\beta = \frac{clc - cl(c-2y)}{8685890}$, ut igitur $K\beta$ fiat æqualis ipſi KA, ponendum eſt $\frac{clc - cl(c-2y)}{8685890} = \frac{cl(c+2a) - clc}{8685890}$; unde $2lc = l(c-2y) + l(c+2a)$: reducendo Logarithmos ad numeros, habetur $cc = (c-2y) \times (c+2a) = cc + 2ac - 2cy - 4ay$. Hinc $y = \frac{ac}{c+2a} = MI$. Faciendo nunc $MA : MI = AC^2 : IG^2$, ſeu $a : \frac{ac}{c+2a} = nn : \frac{nnc}{c+2a} = IG^2 = vv$ in puncto $A = (A\gamma)^2$; erit $A\gamma = n\sqrt{\frac{c}{c+2a}}$. Quod ſi itaque hic valor ſubſtituatur pro v, in formula quæ in §. præced. exprimit $tK\beta$, prodibit $tKA = \ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \text{Log.} \frac{2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}{-2an\sqrt{\frac{c}{c+2a}} + n\sqrt{2ac}}}{4342945} = \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}{-\sqrt{\frac{4aac}{c+2a}} + \sqrt{2ac}}}{4342945}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times \text{Log.} \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}{-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}}}{4342945} \ldots\ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}ac} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))}{4342945}.$$

Hoc jam comparetur cum tempore per AM in vacuo, quod per §. IV eſt $= \frac{2a}{n}$, eritque $tAM : tKA = \frac{2a}{n} : \frac{\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{2}ac} \times (l \,\&c.}{4342945}$ $= 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l(\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}) - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))$. Applicetur hæc analogia ad propoſitum caſum, ubi $a = 1000$ ped., & $c = 4667\,D = \frac{4667}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped.; & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000}$:

$\surd 1166\frac{3}{4} \times (l(\surd 2000 + \surd 3166\frac{3}{4}) - l(-\surd 2000 + \surd 3166\frac{3}{4}))$ $= 868589 \times \surd 800000 : \surd 4667 \times (l(\surd 2000 + \surd 3166\frac{3}{4})$ $- l(-\surd 2000 + \surd 3166\frac{3}{4})) = 776808096 : \surd 4667 \times (l 101\frac{21}{70}$ $- l 11\frac{61}{70}) = 776808096 : 9311065 \times \surd 4667 = 776808096 :$ $636074871 = 258936032 : 212024957.$

X I I.

Quia itaque, per *Coroll.* I §. VII, t AM, hoc eſt, tempus aſcenſus in vacuo ad 1000 ped. eſt quam proxime $8\frac{1}{2}$ ſecundorum; fiat ut 258936032 ad 212024957, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 6\frac{177920957}{258936032}$, hoc eſt, quam proxime $6\frac{17}{25}$ ſecund. pro tempore deſcenſus per KA.

X I I I.

Reſtat ut determinemus quoque in numeris, pro caſu propoſito, tempus aſcenſus in aëre per AK. Hunc in finem, quæratur, ex Tabulis tangentium, angulus ΔOV [*Fig.* 2] faciendo ut OΔ ad ΔU, ſeu per § VII, ut c ad $\surd 2ac$, ita ſinus totus ad tangentem anguli ΔOU; adeoque, in noſtro caſu, ut $\frac{4667}{4}$ ad $\surd 2333500$, ſeu ut 4667 ad 6110 ita 10000000 ad 13070495 tang. ΔOU, qui per conſequens erit 52 gr. 38 min. Suppoſita nunc ARCHIMEDIS ratione diametri ad peripheriam, ut 7 ad 22, unde radius ad quadrantem ut 7 ad 11: Fiat 7 ad 11 = 10000000 : 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro 90 : $52\frac{38}{60}$ = 15714286 : $9189947\frac{7}{17}$ = numero partium arcus 52 gr. 38 min. pro radio = 10000000. Nunc tandem fiat ΔU.$\Delta\xi$ [= DV : DX] = 13070495 : $9189947\frac{7}{17}$ = tAM [$8\frac{1}{6}$ ſecund.] : tAK aſcenſus in aëre, quod tempus erit $= 5\frac{3}{4}$ ſecund. quam proxime. Ergo ambo tempora aſcenſus & deſcenſus in aëre ſimul ſumta $= 5\frac{3}{4} + 6\frac{17}{25} = 12\frac{85}{100}$ ſec. Quia autem in vacuo tempus aſcenſus & deſcenſus ſimul eſſet $= 16\frac{1}{3}$ ſec.,

ſec., patet reſiſtentiam aëris facere ut recidat globus noſter $3\frac{67}{100}$ ſec. citius quam recideret, ſi aër nihil reſiſteret.

XIV.

Mutata jam *a* ſucceſſive, ſumendò eam modo majorem, modo minorem, poterit per eandem methodum, inveniri tempus in aëre reſiſtente, tam pro aſcenſu quam pro deſcenſu, pro unaquaque *a*, adeoque etiam tempus totius curvæ, quam mobile grave aſcendendo & deſcendendo inſumit. Quæ omnia ſi in Tabellam conjiciantur, poterit eam conſulendo, ex obſervato tempore, quo globus exploſus in Terram recidit, determinari non tantum quouſque aſcenderit, ſed etiam quantum temporis pro aſcenſu, quantum item pro deſcenſu inſumſerit: quod olim ab aliquo deſiderabatur.

SCHOLIUM.

Hæc ita determinantur, intelligendo medium eſſe rarum & elaſticum in quo globus movetur: quale medium aërem eſſe, & uniformiter ſe ita habere in omnes partes, ſuppoſuimus in præcedentibus. Quod ſi autem nunc ſupponere lubet, medium in quo movetur globus non eſſe elaſticum, ſed compoſitum eſſe ex particulis, quæ ad allapſum non reſiliant; atque oporteat invenire, in hoc caſu, omnia quæ pro priori ſunt in præcedentibus inventa.

LEMMA I.

Si Corpus cylindricum vel priſmaticum M *qualecunque moveatur, baſi alterutra antrorſum verſa, velocitate V; quod occurrat, in directione perpendiculari ad baſin; particulis vel globulis quieſcentibus* m, m, m, *quarum omnium ſimul ſumtarum maſſa vocetur m. Quæritur velocitas, tam corporis cylindrici vel priſmatici* M, *quam particularum* m, m, m, *poſt factum impulſum?* TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 3.

Solutio.

Ex Regulis communicationis motus patet, velocitatem corporis M, & particularum, m, m, m, poſt impulſum eſſe $= \frac{MV}{M+m}$.

Corollarium I.

Decrementum velocitatis corporis $M = V - \frac{MV}{M+m} = \frac{mV}{M+m}$.

Corollarium II.

In caſu quo m infinities minus quam M; erit decrementum velocitatis $= \frac{mV}{M}$.

Lemma II.

TAB. LXXXVIII N°. CLXXXII Fig. 1. *Sit nunc fluidum vel medium non elaſticum, compoſitum ex moleculis per totam longitudinem* AB *æqualibus intervallulis diſſeminatis; in quo moveatur corpus cylindricum M, ſecundum directionem perpendicularem ad baſin in* AB.

Sit C longitudo cylindri hujus fluidi, qui contineat quantitatem materiæ æqualem ipſi corpori cylindrico M, cujus longitudo ſit L; adeo ut denſitas fluidi ſit ad denſitatem corporis cylindrici M, ut L ad C. Unde ſi $C \times m$ exprimat cylindrum fluidi æquale corpori cylindrico M, atque ſi Nn ſit intervallulum, quo ſtrata particularum fluidi a ſe invicem diſtant, exprimet $\mathrm{Nn} \times m$ maſſulam unius ſtrati particularum, quibus corpus cylindricum M una vice occurrit. Quando itaque corpus cylindricum M [a cujus gravitate abſtrahitur] pervenerit in N, ubi velocitas reſidua ſit EN; erit decrementum velocitatis ET $= \frac{mV}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times m \times V}{M} = \frac{\mathrm{Nn} \times \mathrm{EN} \times m}{M}$. Quia autem ET : Te

[Nn]

[Nn] = EN: ſubtangentem curvæ velocitatum CEF; habetur ſubtangens $= \frac{EN \times Nn}{ET} = \frac{EN \times Nn \times M}{Nn \times EN \times m} = \frac{M}{m}$. Hinc patet ſcalam, ſeu curvam velocitatum CEF, in hoc caſu, eſſe Logarithmicam, cujus ſubtangens $= \frac{M}{m} =$ [ob $C \times m = M$] $\frac{C \times m}{m} = C$.

LEMMA III.

Invenire rationem reſiſtentiæ plani in fluido moti, in directione perpendiculari ad planum, ad reſiſtentiam ſuperficiei alicujus conoïdicæ, ejuſdem cum plano amplitudinis, & in eodem fluido motæ, ſecundum directionem axis perpendicularis ad planum, & eadem velocitate.

Sit DO curva aliqua, ex cujus revolutione circa axem DP, generetur ſuperficies conoïdica, quam tangat in vertice D planum DF, in quod allabatur fluidum, ſecundum directionem ad planum perpendicularem, & parallelam axi DP. Vocetur *R* reſiſtentia abſoluta, quam planum a fluido allabente patitur. Sint duæ applicatæ proximæ OP, op, ſuper DP; & aliæ OF, of, ſuper DF; voceturque DF, vel PO $= x$, adeoque Ff, vel Oq $= dx$; & elementum curvæ Oo $= ds$. Erit vis reſiſtentiæ ſuper Ff $= R\,dx$. Eſt vero hæc vis [per decompoſitionem virium] ad vim qua filum fluidi OF agit normaliter ſuper Oo, ut Oo ad Oq, ſeu ut *ds* ad *dx*; adeoque vis qua premitur normaliter elementum Oo $= \frac{R\,dx^2}{ds}$. Reſolvatur hæc porro in duas laterales, quarum una perpendicularis ad axem altera eidem parallela; fiatque iterum ut *ds* ad *dx*, ita $\frac{R\,dx^2}{ds}$ ad $\frac{R\,dx^3}{ds^2}$; erit hæc vis, qua urgetur elementum Oo, a filo allabente fO ſecundum eandem directionem parallelam axi DP. Quia autem annulus a revolutione elementi Ff circa axem DP genitus, eſt ad zonulam eadem revolutione elementi Oo deſcriptam, TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. Fig. 4.

ſcriptam,

criptam, ut xdx ad xds, & cum reſiſtentia ſuper annulum ſit ad reſiſtentiam ſuper zonulam, ut reſiſtentia ſuper Ff ad reſiſtentiam ſuper Oo; faciendum eſt $Rdx : \frac{Rdx^3}{ds^2} = Rxdx . \frac{Rxdx^3}{ds^2}$;

adeoque integrando $\frac{1}{2} Rxx : R\int \frac{xdx^3}{ds^2} = xx : 2\int \frac{xdx^3}{ds^2}$, dabit rationem reſiſtentiæ ſuper circulum cujus radius DF, ad reſiſtentiam ſuper ſuperficiem conoïdicam, ab arcu DO revolvendo deſcriptam.

Corollarium I.

Si DO eſt circulus, cujus radius $= a$, Conoïde hoc caſu exiſtente Sphæra; erit ſumta DP, vel $x = a$, $2\int \frac{xdx^3}{ds^2} = 2 \times \frac{\frac{1}{2} aax^2 - \frac{1}{4} x^4}{aa} = xx - \frac{x^4}{2aa} = \frac{1}{2} aa$; adeoque, in hoc exemplo, reſiſtentia in planum ad reſiſtentiam in Sphæram, hoc eſt xx ſeu $aa : \frac{1}{2} aa = 2 : 1$; Unde patet veritas Propoſitionis 34, Lib. II, Newt. *Princip. Philoſ. Nat.* pag. 298, Edit. ſecundæ; quæ ita ſonat. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris deſcripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem diſtantias libere diſpoſitis conſtante, ſecundum plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur, erit reſiſtentia globi duplo minor quam reſiſtentia cylindri.*

Corollarium II.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig. 1.* Hinc quoque evidens, curvam velocitatum CEF pro globo eſſe Logarithmicam, cujus ſubtangens erit dupla ſubtangentis Logarithmicæ, quæ inſervit pro cylindro, adeoque illa $= 2C$, quia hæc $= C$, per *Lem. II.* Nam generaliſſime ſumtis, tam velocitatibus, quam decrementis velocitatum æqualibus duorum corporum, in eodem vel diverſis fluidis motorum, quibus reſiſtitur in ratione f ad φ, erit, vocando ſpatiola percurſa dz & dy, dum æqualia patiuntur decrementa in velocitatibus v æquali-

Digitized by Google

æqualibus, $\frac{fdz}{v}=dv=\frac{\phi dy}{v}$; adeoque $dz:dy=\phi:f=$ [in hoc exemplo] $2:1$, unde $dz=2dy$. Eſt vero $dv:dz$ [$2dy$] $=v$: ſubtangentem [$\frac{2vdy}{dv}$] in una curva velocitatum, & $dv:dy=v$: ſubtangentem [$\frac{vdy}{dv}$] in altera. Quare conſtat propoſitum.

LEMMA IV.

Ut nunc inveniatur longitudo viæ, quam Sphæra percurrere debet in medio non elaſtico, ita ut velocitas reſidua ſit ad velocitatem initialem, ut 1 ad n; Quæratur id primo generaliter pro quolibet corpore conoïdico?

Illud ſic peragitur: Quia reſiſtentia in planum, eſt ad reſiſtentiam in ſuperficiem conoïdicam ejuſdem cum plano amplitudinis, ut xx ad $2\int\frac{xdx^3}{ds^2}$; erit, per ea quæ in *Coroll.* præced. dicta ſunt, $2\int\frac{xdx^3}{ds^2}:xx=$ ſubtangens curvæ velocitatum pro cylindro, quæ eſt C, per *Lemma* II, ad ſubtangentem curvæ velocitatum pro Conoïde, quæ adeo erit $=\frac{Cxx}{2\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$. Fiat itaque ut ſubtangens Tabularum, quæ eſt 4342945, ad $\frac{Cxx}{2\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$, ita ln, ſeu Logarithmus ipſius n ex Tabulis ſumtus, ad quartum $\frac{Cxxln}{8685890\int\frac{xdx^3}{ds^2}}$ quod erit æquale ſpatio quæſito AB. Ex quo patet, hoc AB eſſe duplum ejus quod in *Diſſertatione mea de Motu* inventum eſt, & ſupra in §. V adhibitum pro Conoïde in medio elaſtico progrediente; adeoque pro globo in medio non elaſtico erit jam $AB=\frac{2Cln}{4342945}$.

 His

His ita præmiſſis, omnia quæ in ſequentibus paragraphis determinata ſunt pro medio elaſtico, mutatis mutandis, facile accommodantur ad medium non elaſticum. Hunc in finem percurram omnes eodem, ut ibi ſunt, ordine paragraphos.

(V I.)

Valor ipſius C manet hic pro globo ferreo, nempe $= 4667 D$; ſed $AB = \frac{2 Cln}{4342945} = \frac{9334 Dln}{4342945}$. Hinc longitudo viæ quam percurrere debet globus ferreus, ita ut dimidium velocitatis ſuæ initialis amittat, erit $= 6470\ D$: ſed pro globo plumbeo invenietur $7400\ D$.

(V I I.)

Quia, per *Lemma* IV, AB in medio non elaſtico, inventa eſt dupla ipſius AB in medio elaſtico; liquet ex operatione in hoc paragrapho inſtituta, fore c, ſeu ſubtangentem curvæ CEF, etiam duplam ſubtangentis illius curvæ, in caſu medii elaſtici, adeoque jam $c = 9334\ D$. Ergo in determinationibus reliquis, ubicunque reperitur c, ſcribendum eſt ejus duplum. Et ſic

TAB. LXXXVII N°. CLXXXII. *Fig.* 2. habebitur $t\,LK = \int \frac{18668\ a\,D\,d\,v}{9334\,m\,D + 2avv}$. Ad hujus conſtructionem, ſit deſcriptus quadrans circuli DXY, cujus radius OD $= n \sqrt{\frac{9334\,D}{2a}}$; & reliqua fiant ut in §. VII præſcriptum; unde determinabitur $t\,AK$.

(V I I I.)

Cum itaque $n : \sqrt{a} = GI : \sqrt{IM}$; erit OD, ſeu $n\sqrt{\frac{9334\,D}{2a}}, = GI \sqrt{\frac{9334\,D}{2\,IM}} = GI \sqrt{\frac{4667\,D}{IM}} =$ [ſumta IM $= 15\frac{1}{12}$ ped. quam grave in vacuo cadens uno ſecundo emetitur, & ſubſtituto pro D ejus valore $= \frac{1}{4}$ ped.] $GI \sqrt{\frac{4667}{60\frac{1}{3}}} =$

GI $\sqrt{}$

$GI\sqrt{\frac{14001}{181}} = GI \times \frac{1592}{181}$. Fiat itaque ut radius ad quadrantem, hoc eſt, $7 : 11 = \frac{1592}{181} \times GI$ ſeu $OD : DXY$; habebitur $DXY = \frac{17512}{1267} \times GI = t\,AK$, in caſu quo n, ſeu velocitas exploſionis eſt infinita. Quia itaque $GI : DXY = t\,IM : t\,AK$, faciendum eſt $GI : \frac{17512}{1267} \times GI$ [$= 1267 : 17512$] $= 1$ ſec. $13\frac{5}{6}$ ſec. Ergo in aëre non elaſtico, globus ferreus noſter, exploſus velocitate infinita, impenderet in totum aſcenſum $13\frac{5}{6}$ ſecunda. Sed in aëre elaſtico [ſimili operatione obſervata] inveniretur pro tempore totius aſcenſus tantum $9\frac{4}{5}$ ſecund.

COROLLARIUM I.

Quia, per *Lemma* IV, globus ſine gravitate duplum ſpatium percurrit, in medio non elaſtico, ejus quod percurrit in medio elaſtico, ad eandem jacturam velocitatis initialis faciendam; & cum globus noſter ferreus [per *Coroll.* 1. §. VIII ſuper.] indigeat $4\frac{3}{4}$ ſecund. ad id ut velocitas reſidua ſit redacta ad dimidium velocitatis initialis in aëre elaſtico; indigebit idem ille globus $9\frac{1}{2}$ ſecund. in aëre non elaſtico, ad amittendum dimidium velocitatis initialis.

COROLLARIUM II.

Ad inveniendam totam altitudinem AK, ad quam aſcendere poteſt globus noſter ferreus, in aëre non elaſtico; ſumamus ejus valorem, in hoc *Corollario* §. VIII datum $\frac{cl(c+2n) - clc}{8685890}$, qui, in hoc caſu quo $c = 9334\,D$, eſt $= \frac{9334\,Dl(9334\,D + 2000) - 9334\,Dl\,9334\,D}{8685890}$ $=$ [ſuppoſito $D = \frac{1}{4}$ ped.] $\frac{2333\frac{1}{2}\,l\,4333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,2333\frac{1}{2}}{8685890}$

$$= \frac{2333\frac{1}{2} \times 2688310}{8685890} = \frac{4667 \times 2688310}{17371780} = \frac{1254634277}{1737178} = 722\tfrac{1}{4}$$

ped.

ped. Pariſ. quam proxime. Hinc apparet globum noſtrum $277\frac{1}{2}$ ped. infra totam altitudinem mille pedum aſcendere.

(IX.)

Pro determinando deſcenſu, habetur hic iterum $dz = \frac{2acvdv}{nnc - 2avv} = \frac{cdy}{c - 2y} = \frac{clc - cl(c - 2y)}{8685890} = K\beta$. Sed recordandum pro c ſumendum eſſe duplum, nempe $= 9334\,D = 2333\frac{1}{2}$ ped. Pariſ.

COROLLARIUM I.

Exiſtente $MI = MA$, hoc eſt ſi $y = a$, habetur $K\beta = \frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890}$, ad id ut velocitas acquiſita recidendo, fiat æqualis velocitati initiali. In noſtro exemplo, ubi $c = 2333\frac{1}{2}$ ped. erit $\frac{clc - cl(c - 2a)}{8685890} = \frac{2333\frac{1}{2}l2333\frac{1}{2} - 2333\frac{1}{2}\,l\,333\frac{1}{2}}{8685890} = 2270$ proxime. Ergo $K\beta$ ſumenda eſt $= 2270$ ped. Hoc eſt, ſi globus infra A ceciderit 2270 ped. $- 964\frac{1}{2}$ ped., vel $1305\frac{1}{2}$ ped., recuperaverit tunc ſuam velocitatem initialem.

COROLLARIUM II.

Pro maxima velocitate, quam nunquam decidendo attingit, ſed tamen data quavis propius accedit; ponendum eſt iterum $2y = c = 9334\,D = \frac{9334}{4}$ ped., adeoque $y = \frac{9334}{4}$ ped. $= 1166\frac{3}{4}$ ped. Hoc eſt, MI ſumenda eſt dupla in aëre non elaſtico, ejus quæ inventa eſt pro elaſtico.

COROLLARIUM III.

Ipſa velocitas maxima *ad quam non* habetur, faciendo $MA : MI = AC^2 : IG^2$, hoc eſt $1000 : 1166\frac{3}{4} = nn : \frac{4667}{4000}\,nn =$

40000:

40000 : 46670, quorum radices ſunt quam proxime ut 200 ad 216, ſeu ut 25 ad 27. Dico itaque velocitatem initialem eſſe ad velocitatem *ad quam non*, valde prope ut 25 ad 27.

(X.)

Tempus deſcenſus ita determinatur: Supra in §. hujus numeri, inventum eſt $t\,K\beta = \dfrac{\sqrt{\frac{ac}{2nn}} \times \log. \frac{2av + n\sqrt{2ac}}{-2av + n\sqrt{2ac}}}{4342945}$. Quod & hic valet, conſiderando c ut duplum.

(XI.)

Tempus deſcenſus per totam K A habetur ex §. hujus numeri. $tAM : tKA = 8685890\sqrt{2a} : \sqrt{c} \times (l\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)} - l(-\sqrt{2a} + \sqrt{(c+2a)}))$. Applicetur hoc ad præſentem caſum, ubi $a = 1000$ ped. & $c = 2333\frac{1}{2}$ ped., & habebitur $tAM : tKA = 8685890 \times \sqrt{2000} : \sqrt{2333\frac{1}{2}} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + \sqrt{4333\frac{1}{2}})) = 8685890 \times \sqrt{4000000} : \sqrt{46670} \times (l\sqrt{(2000 + \sqrt{4333\frac{1}{2}})} - l(-\sqrt{2000} + 4333\frac{1}{2})) = 1737178000 : 216\frac{1}{30} \times (l\,110\frac{5}{9} - l\,21\frac{1}{10}) :: 1737178000 : 1554300856 = 217147250 : 194287607$.

(XII.)

Quia itaque tAM, hoc eſt tempus aſcenſus, in vacuo, ad 1000 ped. eſt $8\frac{1}{6}$ ſecund. proxime; Fiat, ut 217147250 ad 194287607, ita $8\frac{1}{6}$ ad quartum, qui reperietur $= 7\frac{66651374}{217147250}$, hoc eſt $7\frac{2}{7}$ proxime; adeoque globus noſter, in aëre non elaſtico, impendit in deſcenſum $7\frac{2}{7}$ ſecunda quam proxime.

(XIII.)

Determinandum nunc reſtat tempus aſcenſus, in aëre non

elaſtico. Per methodum in §. hujus numeri, faciendum eſt ut c ad $\sqrt{2ac}$, ita ſinus totus ad tangentem anguli ΔOU. Adeoque in hoc caſu ut $\frac{9334}{4}$ ad $\sqrt{4667000}$, ſeu ut 4667 ad 4321, ita 10000000 ad 9258624 = tang. ΔOU; qui angulus ergo erit 42 gr. 48 minuta. Fiat nunc ut radius ad quadrantem, ſeu ut 7 ad 11, ita 10000000 ad 15714286 = numero partium quadrantis, quarum radius continet 10000000. Fiat porro $90 : 42\frac{48}{60} = 15714286 : 7473016$ = numero partium arcus 42 gr. 48 minut. pro radio 10000000. Nunc tandem fiat $\Delta U : \Delta \xi$ $[= DV : DX] = 9258624 : 7473016 = t\,AM$ ($8\frac{1}{6}$ ſec.): $t\,AK$, tempus aſcenſus in aëre non elaſtico, quod tempus erit $= 6\frac{3}{5}$ ſecund. quam proxime. Ergo ambo tempora aſcenſus & deſcenſus, in aëre non elaſtico, ſimul ſumta $= 6\frac{3}{5} + 7\frac{2}{7} = 13\frac{31}{35}$ ſec. Unde patet, globum noſtrum, in aëre non elaſtico, morari circiter uno ſecundo diutius quam in aëre elaſtico.

TAB. LXXXVIII. N°. CLXXXII. *Fig.* 2.

N°. CLXXXIII.

DE

OSCILLATIONIBUS PENDULI

In medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatis.

PROBLEMA.

Grave a quocunque dato puncto in Cycloïde inverſa deſcendens, & reſiſtentiam patiens proportionalem ſimplici velocitati, quaeritur quouſque ab altera parte in eadem Cycloïde aſcendere poſſit?

SOLUTIO.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIII. Sit Cycloïs in rectam lineam AB extenſa, cujus punctum medium C, repraeſentet punctum infimum Cycloïdis. Sit initium deſcen-

Digitized by Google

N.° CLXXXI.

Fig. 2.

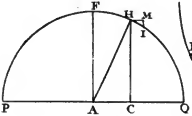


Fig. 3.

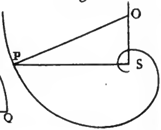




Fig. 2.

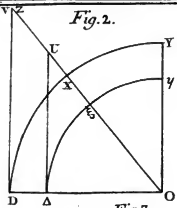


Fig. 3.

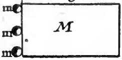
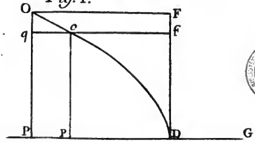


Fig. 4.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

deſcenſus in E, & finis aſcenſus in F: concipiatur curva EHDF; cujus applicatæ GH, CD &c. deſignent velocitates acquiſitas, in punctis G, C, &c. Dicantur $CE = \alpha$, $CF = \beta$; abſciſſa quælibet $CG = s$, $GH = v$; vis a gravitate oriunda, quæ proportionalis eſt diſtantiæ CG, etiam dicatur $= s$, reſiſtentia $= gv$. Quibus poſitis, patet naturam curvæ hac æquatione $sds - gvds + vdv = 0$ exprimi.

Ad ſeparationem inſtituendam, ponatur $v = zs$, & $dv = zds + sdz$, & mutabitur æquatio in hanc $\frac{ds}{s} + \frac{zdz}{zz - gz + 1} = 0$ aut integrando $ls + \int \frac{zdz}{zz - gz + 1} =$ conſt. Eſt vero $\frac{zdz}{zz - gz + 1} = \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} + \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; & $\int \frac{(z - \frac{1}{2}g)dz}{zz - gz + 1} = \frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$: Reſtat igitur integranda $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$. Hunc in finem, ponatur $z = t + \frac{1}{2}g$, erit $\frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1} = \frac{\frac{1}{2}gdt}{tt + 1 - \frac{1}{4}gg} = \frac{2gdt}{4tt + 4 - gg}$
$= \frac{\frac{2g}{4 - gg}dt}{1 + \frac{4}{4 - gg}tt}$. Deſcripto itaque arcu circuli, cujus radius $= 1$, & tangens $= \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}}$, qui arcus dicatur A; erit $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}} A = \int \frac{\frac{1}{2}gdz}{zz - gz + 1}$; cui addatur $\frac{1}{2}l(zz - gz + 1)$ $=$ [ſubſtituto pro z ejus valore $\frac{v}{s}$) $\frac{1}{2}l(\frac{vv}{ss} - \frac{gv}{s} + 1) = \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) - ls$; cui porro addatur ls; habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4 - gg)}} A + \frac{1}{2}l(vv - gsv + ss) =$ conſt. pro æquatione integrata propoſitæ $sds - gvds + vdv = 0$. Quia autem tangens arcus $A = \frac{2t}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2z - g}{\sqrt{(4 - gg)}} = \frac{2v - gs}{s\sqrt{(4 - gg)}}$ $= (\frac{2v}{s} - g) \times \frac{1}{\sqrt{(4 - gg)}}$, addo [pro rectificanda æquatione integra-

integrata] $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}B$; intelligo autem per B, arcum cujus tangens $=\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}$, & ſimul ſubtraho $l\alpha$: hoc nempe modo fiet, ut vera æquatio integrata ſit $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times(A+B)$ $+\frac{1}{2}l(vv-gsv+ss)-l\alpha=0$; quia in caſu quo G cadit in E, id eſt quo $v=0$, tota evaneſcit. Hinc quia in puncto C, ubi $s=0$, tangens arcus A eſt infinita, erit arcus ipſe $A=$ quadranti circuli; qui vocetur Q & habebitur $\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}$ $\times(+Q+B)+lv-l\alpha=0$; adeoque in puncto C, erit $lv=l\alpha-\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times(+Q+B)$. Simili modo invenitur, mutatis mutandis, pro aſcenſu, $lv=l\beta+\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times$ $(+Q-B)$. Quoniam autem ultima velocitas deſcenſus $=$ primæ velocitati aſcenſus, erit $l\alpha-\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times(+Q+B)$ $=l\beta+\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times(+Q-B)$, & facta reductione $l\beta=l\alpha$ $-\frac{g}{\sqrt{(4-gg)}}\times 2Q$, vel $=l\alpha-\frac{2g}{\sqrt{4-gg}}\times Q$; adeoque $l\alpha-l\beta$, ſeu $l\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2gQ}{\sqrt{(4-gg)}}$.

COROLLARIUM I.

Velocitas in puncto infimo C $=\frac{\alpha}{n^{g(Q+B):\sqrt{(4-gg)}}}$; ponendo ſcilicet n, pro numero cui reſpondet unitas pro Logarithmo.

COROLLARIUM II.

Ex æquatione ipſa $sds-gvds+vdv=0$, habetur ſupponendo $dv=0$, velocitas maxima $=\frac{s}{g}$.

COROL-

COROLLARIUM III.

Hinc in æquatione generali inventa $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)$ $+\frac{1}{2}l(vv-gsv+ss)-la=0$; ponatur $\frac{s}{g}$ pro v, & mutabitur illa in hanc $\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+\frac{1}{2}l(\frac{ss}{gg}-ss+ss)$ $-la=\frac{g}{\surd(4-gg)}\times(A+B)+l\frac{s}{g}-la=\frac{g}{\surd(4-gg)}$ $\times(A+B)+ls-lg-la=0$; unde $ls=lga-\frac{g}{\surd(4-gg)}$ $\times(A+B)$ & $s=\frac{ga}{n^{g(A+B):\surd(4-gg)}}$.

Quia vero, in caſu maximæ velocitatis, arcus A pro tangente habet $(\frac{2}{g}-g)\times\frac{1}{\surd(4-gg)}=\frac{2-gg}{g\surd(4-gg)}$, vocetur hic arcus C, & prodibit s, ſeu CG, cui maxima velocitas GH reſpondet, $=\frac{ga}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}$. Ergo ipſa velocitas maxima GH, ſeu $\frac{s}{g}=\frac{a}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}$. Unde maxima velocitas GH, ad ultimam velocitatem CD $=\frac{a}{n^{g(C+B):\surd(4-gg)}}$: $\frac{a}{n^{g(Q+B):\surd(4-gg)}}=\frac{1}{n^{gC:\surd(4-gg)}}:\frac{1}{n^{gQ:\surd(4-gg)}}=$ $1:\frac{1}{n^{g(Q-C):\surd(4-gg)}}$. Ex quo fluit, illas duas velocitates habere conſtantem rationem, ubicunque deſcenſus initium ſumat; quod quidem aliunde jam patet; ſcilicet ex ſimilitudine omnium curvarum EHDF.

N°. CLXXXIV.

DE CORPORIS GRAVIS
ASCENSU ET DESCENSU PER ARCUS ÆQUALES IN MEDIO RESISTENTE.

PROBLEMA.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV *Fig.* 1.

Ad axem verticalem AO *conſtruere curvam* AFL, *ejus natura, ut mobile ſua gravitate deſcendens per arcum quemvis* AK *curvæ data* ABKR, *ad punctum imum* A *impetu concepto, aſcendat per arcum* AL *æqualem ſemper arcui* AK; *idque in medio reſiſtente ſecundum quadrata velocitatum.*

LEMMA.

Exiſtente $n =$ numero unitatis, ſeu $ln = 1$, erit $d(n^{fq:b})$ $= \frac{f}{b} n^{fq:b} dq$.

Patet ex calculo exponentialium.

SOLUTIO.

Fingamus mobile perveniſſe ad B delapſum ex K, & poſtea aſcendens ab A pervenire ad F, iturum ad L uſque; ita ut tam AK ſit æqualis AL, quam AB æqualis AF. Sit itaque $AK = AL = a$, $AO = b$, $AS = c$, invariabiles pro quolibet deſcenſu & aſcenſu, ſed variabiles pro mutatione initii & finis. Sit porro $AB = AF = s$, $BC = FG = ds$; $AM = x$, $MN = BP = dx$, $AD = z$, $DE = FH = dz$: velocitas in $B = v$, velocitas in $F = V$; vis gravitatis naturalis $= g$, vis reſiſtentiæ in $B = \frac{vv}{2c}$, vis reſiſtentiæ in $F = \frac{VV}{2c}$. Erit

æquatio

æquatio pro deſcenſu $2gdx - \frac{vvds}{e} = -2vdv$, & pro aſcenſu $2gdz + \frac{VVds}{e} = -2VdV$; quæ ita diſponantur $2vdv - \frac{vvds}{e} = -2gdx$, & $2VdV + \frac{VVds}{e} = -2gdz$. Ut autem harum duarum æquationum partes priores, litteras v & V quæ velocitates ſignificant continentes, integrare poſſimus, eaſque adeo terminis finitis exprimere, multiplicemus priorem æquationem per $\frac{1}{n^{s:e}}$ & alteram per $n^{s:e}$; prodibunt hæ duæ integrabiles $\frac{2vdv - \frac{vvds}{e}}{n^{s:e}} = \frac{-2gdx}{n^{s:e}}$, & $2n^{s:e}VdV + \frac{1}{e}n^{s:e}VVds = -2gn^{s:e}dz$; ſumtis enim integralibus, emergent $\frac{vv}{n^{s:e}} = -2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $n^{s:e}VV = -2g\int n^{s:e}dz$; cujus veritas exploratur per Lemma præmiſſum. Sed ut vv & VV evaneſcant in punctis K & L, addendæ ſunt ad valores inventos debitæ quantitates conſtantes, hunc in modum $\frac{vv}{n^{s:e}} = 2g\int\frac{db}{n^{a:e}} - 2g\int\frac{dx}{n^{s:e}}$, & $n^{s:e}VV = 2g\int n^{a:e}dc - 2g\int n^{s:e}dz$; ubi per $\int\frac{db}{n^{a:e}}$ & $\int n^{a:e}dc$, intelligo functiones conſtantes eodem modo compoſitas ex AK, AO, & ex AL, AS, ut ſunt variabiles $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ compoſitæ ex AB, AM & ex AF, AD. Quia vero in puncto infimo A eſt $s = 0$, ideoque $n^{s:e} = 1$; ipſæque functiones $\int\frac{dx}{n^{s:e}}$ & $\int n^{s:e}dz$ evaneſcunt; atque v evadit $= V$; erit $2g\int\frac{db}{n^{a:e}} = 2g\int n^{a:e}dc$. Hoc ve-

Digitized by Google

ro cum contingat pro quolibet puncto initiali K & finali L; licebit jam conſiderare a, b, & c tanquam variabiles; unde habebimus differentiando $\frac{db}{n^{a:c}} = n^{a:c}\, dc$; proinde $dc = \frac{db}{n^{2a:c}}$; ſeu $ldc = ldb - \frac{1}{c} \times 2a$. Reponantur nunc pro litteris a, b & c, priſtinæ aſſumtæ s, x & z, habebimus $ldz = ldx - \frac{1}{c} \times 2s$; id quod naturam curvæ quæſitæ AFL determinat ex data curva AK. Ex his habetur conſtructio curvæ quæſitæ AFL: Quia enim $dc = \frac{db}{n^{2a:c}}$, hoc eſt, $dz = \frac{dx}{n^{2s:c}}$, erit $\surd(FG^2 - FH^2) = HG = dv = \surd(ds^2 - dz^2) = \surd(ds^2 - \frac{dx^2}{n^{4s:c}})$. Atqui, ob datam curvam ABKR, datur dx per ds: ſit itaque $dx = S\,ds$; Unde $dz = \frac{S\,ds}{n^{2s:c}}$, & $dy = ds\surd(1 - \frac{SS}{n^{4s:c}})$, ipſæque adeo coordinatæ $AD = z = \int \frac{S\,ds}{n^{2s:c}}$ & $DF = y = \int ds\surd(1 - \frac{SS}{n^{4s:c}})$.

Sed facile conſtruitur $n^{2s:c}$ ejuſque quadratum $n^{4s:c}$, ſumendo tantum in Logarithmica communi [cujus nempe ſubtangens $= 1$] applicatam, quæ diſtat a prima applicata, ſive ab unitate, intervallo $= 2s:c$, erit enim illa $= n^{2s:c}$, & altera applicata quæ diſtat duplo intervallo $= 4s:c$, erit $n^{4s:c}$. Hinc formando ſuper communi axe $\alpha\beta$, in quo abſciſſa $\alpha\gamma$ capiatur $= s$, duas curvas $\alpha\delta$ & $\alpha\varepsilon$, quarum unius $\alpha\delta$ applicata $\gamma\delta$ ſit $= \int \frac{S\,ds}{n^{2s:c}}$, & alterius $\alpha\varepsilon$ applicata $\gamma\varepsilon$, ſit $= \int ds\surd(1 - \frac{SS}{n^{4s:c}})$. Dico, $\gamma\delta$ & $\gamma\varepsilon$ dare coordinatas curvæ quæſitæ.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXIV. Fig. 2.

SCHO-

SCHOLIUM I.

In caſibus particularibus conſtructio ſæpe facilior redditur. Sic ſi Linea data ACK ſit ipſa recta verticalis ANO; æquatio generalis ſupra inventa $ldz = ldx - \frac{2s}{e}$, abit in hanc $ldz = ldx - \frac{2x}{e}$, quæ differentiata, ſumendo dz pro conſtante, dat $o = \frac{ddx}{dx} - \frac{2dx}{e}$; quo multiplicato per $\frac{dz}{dx}$, erit $\frac{dzddx}{dx^2} = \frac{2dz}{e}$ atque integrando $\frac{a}{e} - \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{e}$; unde $adx - edz = 2zdx$; hoc eſt, $dx = \frac{edz}{a - 2z} = \frac{\frac{1}{2}edz}{\frac{1}{2}a - z} =$ [ponendo $\frac{1}{2}a - z = t$] $\frac{-\frac{1}{2}edt}{t}$, adeoque $x = -\frac{1}{2}alt$; ex quo patet x, ſeu arcum AF, eſſe proportionalem Logarithmo negativo abſciſſæ TD, faciendo $AT = \frac{1}{2}a$. Hæc autem proprietas convenit Tractoriæ *Hugeniana*; quæ ſuam convexitatem habet verſus ſuperiora, eſtque recta tranſiens per T & applicatis parallela, Tractoriæ aſymtotos. Nam $dt : dx = t : \frac{1}{2}e =$ tangenti conſtanti.

SCHOLIUM II.

Ope *Lemmatis* hiſce præmiſſi, ſolvi poteſt Problema a Fratre meo propoſitum [vid. *Act. Lipſ.* 1697, p. 115*] ſine aſſumtione novarum indeterminatarum. Separandæ nimirum proponantur indeterminatæ hujus æquationis $ady = ypdx + by^n qdx$ [ubi a & b quantitates datas & conſtantes, n poteſtatem quamvis literæ y, p & q quantitates utcunque datas per x denotant.] Tranſponatur terminus ſecundus, ut habeatur $ady - ypdx = by^n qdx$, vel [diviſo per y^n] $ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx = bqdx$; porro dividendo utrumque membrum per $c^{(1-n)\int pdx:a}$, c denotante numero unitatis, ſeu $lc = 1$; prodibit hæc altera

* Vide Solutionem Auctoris noſtri, N°. XXXV, pag. 175, *Tom. I.*

æquatio $\frac{ay^{-n}dy - y^{1-n}pdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}} = \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}}$; ita enim membrum prius abſolute integrari poteſt, & habebitur $\frac{ay^{1-n}}{(1-n)c^{(1-n)\int pdx : a}} = \int \frac{bqdx}{c^{(1-n)\int pdx : a}} = X$, ſeu alicui functioni datæ ipſius x. Erit proinde $y^{1-n} = \frac{1-n}{a} \times c^{(1-n)\int pdx : a} X$. *Q. E. F.*

N°. CLXXXV.

DU PENDULE COMPOSÉ

Dans un milieu reſiſtant.

CAlcul pour déterminer la viteſſe ou la réſiſtance d'un Pendule rectiligne, compoſé de deux globes A & B, qui ſe mouvroient dans un milieu qui réſiſteroit comme le quarré de la viteſſe.

SOLUTION.

On ſuppoſe que a & b ſoient les diſtances de A & B au point de ſuſpenſion ou d'appui, & x & s les abſciſſes & les arcs du cercle que décrit A. Soient nommées la gravité abſolue $= g$, la viteſſe de $A = v$; $c =$ au nombre dont le Logarithme eſt 1, c'eſt-à-dire, $lc = 1$; $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{n}$ ſoient les intenſités des réſiſtances des globes A, B.

Soit f la force immaterielle, miſe entre les deux verges qui enfilent les deux globes A & B, deſquels le premier A eſt conçu comme le plus proche du point d'appui, & B le plus éloigné; enſorte que le globe A, étant retardé par la verge du globe B, ſans lequel il deſcendroit plus vite, & le globe B, étant

étant acceleré par la preſſion du globe *A*, ſans lequel il deſcendroit moins vite; il ſe fait entre le globe *A* & la verge du globe *B*, une eſpece de compreſſion, comme s'il-y-avoit un reſſort entre deux; l'effort donc de ce reſſort à écarter les deux verges, doit être contrebalancé par les deux verges, qui tendent à ſe rapprocher juſqu'a l'entiere coincidence: c'eſt cet effort du reſſort que j'appelle la force immaterielle $= f$.

TYPE DU CALCUL.

La force acceleratrice du globe $A = \frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$

La force acceleratrice du globe $B = \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB}$.

Or afin que les deux verges deſcendent ou circulent conjointément, il faut que ces deux forces acceleratrices ſoient comme les longueurs des verges, c'eſt-a-dire il faut que $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{bbvv}{naa} + \frac{af}{bB} = a : b$. Par cette analogie, on trouve $f = \frac{gAB(bb - ab)dx}{(aaA + bbB)ds} + \frac{bABvv(mbb - nab)}{mna(aaA + bbB)}$. Mais on ſait que la force acceleratrice, multipliée par l'élement de l'eſpace à parcourir ds, donne vdv; ainſi ſubſtituant cette valeur de f, dans l'équation $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{fds}{A} = vdv$, on trouvera $gdx - \frac{vvds}{m} - \frac{gmnaB(bb - ab)dx - bBvv(mbb - nab)ds}{mna(aaA + bbB)} = vdv$; ce qui étant demelé & reduit en ordre, il viendra $\frac{(gaaA + gabB)dx}{aaA + bbB} = \frac{(na^3A + mb^3B)vvds}{mna(aaA + bbB)} + vdv$. Pour abreger; nommons $\frac{g(aaA + abB)}{aaA + bbB} = L$, & $\frac{na^3A + mb^3B}{mn(a^3A + abbB)} = R$, cela nous donnera cette equation $Ldx = Rvvds + vdv$. Pour l'integrer, on poſera $c^{2Rs} = z$: par conſequent $2Rs = lz$, & $Rds = \frac{dz}{2z}$, Donc $Ldx = \frac{vvdz}{2z} + vdv$; multipliez

le

Digitized by Google

le ſecond membre par zz, & le premier par ſon egal $2c^{2Rs}$, il viendra $2Lc^{2Rs}dx = vvdz + 2zvdv$; ainſi en l'integrant, on aura $2L\int c^{2Rs}dx = vvz = vvc^{2Rs}$; ce qui donne $vv = 2Lc^{-2Rs}\int c^{2Rs}dx$. Il n'y a donc qu'à remettre les valeurs de L & R; ce qui étant exécuté, on obtiendra finalement $vv = \frac{2g(aaA + ibB)}{aaA + bbB} c^{-2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} \times \int c^{2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} dx$.

SCHOLIE I.

Il faut remarquer qu'un corps peſant, qui tombe dans un milieu réſiſtant, le long d'une courbe qui touche une ligne horizontale dans ſon plus bas point, s'accelere depuis le commencement de ſa chute juſqu'à un certain terme, avant que d'arriver au point le plus bas de ſa deſcente; ce terme paſſé le corps grave commence à ſe retarder: il faut donc ſavoir que la valeur trouvée de vv, n'eſt que pour la viteſſe du corps quand il a paſſé ce terme. Donc, pour avoir la valeur de vv, pour quand le corps n'eſt pas encor arrivé au terme de la plus grande viteſſe, il faut dans l'opération du calcul mettre par tout $-vdv$ au lieu de vdv: ainſi la derniere équation à integrer ſera celle ci $2Lc^{2Rs}dx = vvdz - 2zvdv$; mais pour la rendre intégrable, il faut diviſer le ſecond membre par zz, & le premier par ſon égal c^{4Rs}, & on aura $2Lc^{-2Rs}dx = \frac{vvdz - 2zvdv}{zz}$; dont l'intégrale eſt $2L\int c^{-2Rs}dx = -\frac{vv}{z} = -vvc^{-2Rs}$; d'où on tire $vv = -2Lc^{2Rs} \times \int c^{-2Rs}dx$: en ſubſtituant comme auparavant les valeurs de L & R, on aura maintenant $vv = \frac{2g(aaA + abB)}{aaA + bbB} \times c^{2(na^3A + mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} \times \int c^{-2(na^3A - mb^3B)s : mn(a^3A + abbB)} dx$.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLIE II.

On remarquera encor, que par la gravité abſolue g on n'entend pas la gravité naturelle, comme elle anime les corps terreſtres dans le vuide, mais la gravité ſpécifique des corps diminuée de celle du milieu réſiſtant : car c'eſt cette gravité diminuée qui doit être cenſée animer les corps plongés dans un milieu peſant lui-même. Ainſi donc, dans cette ſolution, on ſuppoſe que les deux globes *A*, *B* ſont faits d'une même matiere, par exemple l'un & l'autre de fer, ou l'un & l'autre de plomb; mais ſi l'un étoit de fer & l'autre de plomb, il y auroit à conſiderer deux differents g, que l'on déſigneroit par g & g', l'un pour le globe *A* & l'autre pour le globe *B*. Cette ſuppoſition rendroit le Probléme un peu plus difficile, & la formule plus longue.

SCHOLIE III.

Si on veut déterminer le Centre d'oſcillation de nôtre Pendule compoſé de deux globes *A*, *B*, oſcillant dans un milieu réſiſtant; c'eſt-à-dire, ſi on veut trouver la longueur d'un Pendule ſimple, qui ſoit iſochrone avec le Pendule compoſé ; il y a deux cas à conſiderer : En ſuppoſant 1°. que le Pendule ſimple faſſe ſes oſcillations dans le vuide, ou dans un milieu ſans réſiſtance. 2°. Que le Pendule ſimple oſcille dans le même milieu réſiſtant, dans lequel oſcille le compoſé.

Le premier cas eſt fort facile, car il n'y a qu'à prendre la quatriéme proportionnelle de la force accélératrice du premier globe, laquelle force a été trouvée ci-deſſus $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A}$, de la force accélératrice naturelle ſur un arc ſemblable, qui eſt $\frac{Gdx}{ds}$, en nommant G la gravité naturelle abſoluë, & de la longueur du premier rayon a; & ainſi on aura la longueur cher-

chée du Pendule ſimple $= \frac{Gadx : ds}{gdx : ds - vv : m - f : A}$, où on ſubſtituera les valeurs trouvées de f & de vv.

Quant au ſecond cas, le Probléme eſt indéterminé : car la longueur cherchée du Pendule ſimple ſynchrone avec le compoſé, dépend de la quantité de matiere, de la groſſeur de ſon globe, & partant auſſi de l'intenſité de la réſiſtance. Pour plus de facilité du calcul, ſuppoſons que le troiſiéme globe, que nous voulons employer pour le Pendule ſimple ſynchrone, ſoit de même matiere que les deux autres globes, & qu'il ait la même groſſeur que le globe A; par conſéquent auſſi la même intenſité de réſiſtance $\frac{1}{m}$. Cela poſé, nommons la longueur cherchée du Pendule ſimple $= y$. Sa viteſſe ſera $= \frac{yu}{a}$, & ſa réſiſtance dans le même milieu $= \frac{yyuu}{aam}$; donc la force accélératrice $= \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam}$; ainſi, par la nature du ſynchroniſme, on aura cette analogie $\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A} : \frac{gdx}{ds} - \frac{yyuu}{aam} = a : y$; ce qui nous fournit cette équation quarrée $(\frac{gdx}{ds} - \frac{vv}{m} - \frac{f}{A})y = \frac{gadx}{ds} - \frac{yyuu}{am}$; d'où l'on déduira la valeur cherchée de y; dans laquelle il faudra ſubſtituer les valeurs trouvées de f & de v, pour avoir le tout en termes connus.

JOAN.

Digitized by Google

N°. CLXXXVI.

JOHANNIS BERNOULLI HYDRAULICA

Nunc primum detecta ac demonſtrata directe ex fundamentis pure mechanicis.

ANNO 1732.

Digitized by Google

Digitized by Google

LEONHARDUS EULERUS

MATHEMATICUS ACUTISSIMUS

AD AUCTOREM.

J*AM ante quidem, maximi feci Theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram & genuinam Methodum, quam Tu,* Vir Excellentiſſime, *primus atque ſolus aperuiſti ad hujus generis Problemata ſolide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum Meditationum parte, penitus obſtupui fœcundiſſima principiorum Tuorum applicatione ad perplexiſſima Problemata reſolvenda, quo utiliſſimo pariter ac profundiſſimo invento Nomen Tuum celeberrimum apud poſteros perpetuo erit ſacrum. Obſcuriſſimam autem atque abſtruſiſſimam quaeſtionem, de preſſione quam latera vaſorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam diſtincte & enucleate enodaſti, ut nihil amplius in hanc tam difficili re ſuperſit, quod deſiderari queat. Ut enim nemo, præter Filium Tuum celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus ſeſe jam ad ſtatum permanentem compoſuerit, preſſionem via ſatis indirecta definivit; Ita Tu ſtatim, methodo genuina patefacta, preſſionem in omni aquæ ſtatu accuratiſſime determinaſti, de quo Te digniſſimo invento Tibi,* Vir Excellentiſſime, *ex animo gratulor, & pro communicatione maximas gratias ago.*

Digitized by Google

DISSER-

Digitized by Google

DISSERTATIO HYDRAULICA

De Motu Aquarum per vaſa aut per canales quamcunque figuram habentes fluentium.

****

P R Æ F A T I O.

HYDROSTATICA, quæ agit de aquis ſtagnantibus in vaſis inferius clauſis, habet ſuas leges demonſtratas, atque principia ex ratione deducta; unde effectus & phænomena clare & dilucide explicantur: ita ut circa hanc Scientiam vix amplius quid deſiderari poſſit. Aliter ſe res habet in *Hydraulica*, ubi non tantum de gravitatione aquarum earumque preſſionibus agitur, ſed praterea motus, qui inde naſcitur, ſi aquæ per datam aperturam poſſunt effluere, aut ſi ex uno tubo in alium diverſæ amplitudinis tranſire coguntur, atque alii effectus admirandi, qui eum motum comitantur, demonſtrative determinari debent. Hæc certe Scientia, vulgo *Hydraulica* dicta, admodum eſt ardua, neque

Digitized by Google

neque adhuc ad leges regulaſque mechanicas revocata habetur. Quicquid Autores ea de re ſcripſerunt, vel ſola nituntur experientia, vel rationibus incertis omnino, parumque ſoliditatis habentibus.

In Opere Hydrodynamico, quod non ita pridem in lucem edidit Filius meus †, felicioribus auſpiciis aggreſſus eſt materiam iſtam, ſed fundamento nixus indirecto, conſervatione ſcilicet virium vivarum, licet veriſſimo atque a me demonſtrato, nondum tamen ab omnibus Philoſophis recepto. Primus ego hanc hypotheſin exhibui in Dynamicis ſolidorum [poſtquam HUGENIUS ſimili principio pro centro oſcillationis determinando uſus eſt] oſtendique eandem conſtanter ex illa hypotheſi ſolutionem elici, quam dant ordinaria principia dynamica ab omnibus Geometris admiſſa *; quæ ſane perpetua ſolutionum utraque via erutarum conformitas, vel ſola ſufficeret ad convincendam Adverſariorum obſtinationem. Directam methodum, qua a priori & per ſola Dynamices principia, inveſtigari poſſit natura motus aquarum ex vaſis per foramina erumpentium, aut per canales non uniformis amplitudinis fluentium, hactenus dedit nemo.

Miratus unde tanta difficultas, ut in fluidis, non æque ac in ſolidis, ſuccedat principiorum dynamicorum applicatio; tandem rem acrius animo volvens, detexi veram difficultatis originem; quam in eo conſiſtere deprehendi, quod pars quædam virium prementium impenſa in formandum *gurgitem*, [a me ita dictum ab aliis non animadverſum] tanquam nullius momenti fuerit neglecta, & inſuper habita, non aliam ob cauſam quam quia gurges conflatur ex quantitate fluidi perexigua, ac veluti infinite parva, qualis formatur quotieſcunque fluidum tranſit ex loco ampliori in anguſtiorem, vel vice verſa ex anguſtiori in ampliorem. In priori caſu fit gurges ante tranſitum, in altero poſt tranſitum.

Demonſtrabo autem ad formandum gurgitem, quantumvis parvam habeat moleculam, requiri tamen vim prementem non inſen-

† *Danielis* BERNOULLI Hydrodynamica, ſive de viribus & motibus fluidorum Commentarii. *Argentorati*, 1738.

* Vide Numeros CXXXV, CXXXVI, CXL.

inſenſibilem, nedum infinite parvam, ſed finitam ac determinatam, adeoque neutiquam contemnendam, ſed dignam omnino ut in computum veniat. Nam vis illa ad hunc effectum requiſita, quod mirum videri poteſt, plane non dependet ab extenſione gurgitis, qui major minorve concipi poteſt, modo concipiatur ut valde parvus; ſemper eandem ad ſui formationem abſumit partem virium prementium, manentibus cæteris circumſtantiis.

Quid ſit gurges, ac quomodo formetur, ex ipſa rei tractatione intelligetur; ſimulque patebit formationem gurgitis peragi ſine diſpendio ſenſibili virium vivarum, reſpectu quantitatis earum quæ eſt in totali maſſa aquea. Hinc eluceſſit ratio, cur tuto & ſine errore adhiberi poſſit Theoria virium vivarum in Hydraulicis; etiamſi ad gurgitem non attendant illi qui hac theoria utuntur; dummodo gurgitis exiſtentiam non ignorent, videantque illum nihil derogare virium vivarum conſervationi: ſecus enim contendere non poſſunt, ſe rei veritatem perfecte & ſcientifice conſecutos eſſe.

Diſquiſitionem hanc abſolvam duabus partibus: In prima conſiderabo phænomena aquarum fluentium, & effluentium per vaſa cylindrica aut priſmatica, ſive ſint ſimplicia, ſive ex pluribus compoſita, ut ſunt canales ex variis diverſæ amplitudinis tubis, ſeu ſiphonibus cylindricis coagmentatis. In altera parte, perſcrutabor omnia univerſaliſſime, cujuſcunque ſint figuræ, tam regularis quam irregularis, vaſa perforata, ipſiſque adaptati canales ac tubi.

Ad clariorem rerum intelligentiam, præmitto Definitiones atque Lemmata ſequentia, quorum veritas, cum ex Dynamicis, tum ex Hydroſtaticis eſt manifeſta.

I. Vis *acceleratrix* uniformis eſt, quæ dato corpori, dato tempore, datam velocitatem imprimit.

II. Vis *motrix* eſt, quæ quando agit in corpus quieſcens, illud in motum concitat, aut quæ corpus jam motum vel accelerare, vel retardare, vel ejus directionem mutare poteſt.

III. Vires motrices, ſunt in ratione compoſita, ex ratione maſſarum & virium acceleratricium. Sic ex. gr. ad movendam

maſſam duplam, cum vi acceleratrice tripla, aut, quod idem eſt, ad movendam maſſam triplam, cum vi acceleratrice dupla, requiritur vis motrix ſextupla.

IV. Vis motrix diviſa per maſſam, dat vim acceleratricem; per hanc vero diviſa, dat maſſam.

V. Gravitas abſoluta g, ſeu cauſa gravitatis, quæcunque illa ſit, eſt vis acceleratrix, quæ cum animat determinatam maſſam corporis m, producit in illa vim motricem $= gm$. Licebit autem in mente noſtra eam ſeparare a corpore, & ita conſiderare tanquam extrinſecus in corpus ageret: concipimus utique idem illud corpus, gravitatis expers, a vi motrice externa gm eadem lege acceleratum iri, qua acceleratur naturaliter. Illam autem vim gm, tanquam extra materiam exiſtentem, vocare lubet vim motricem *immaterialem:* unde ſi illa aliorſum tranſlata, agat in aliam maſſam M, accelerabitur hæc, vi acceleratrice $= gm : M$.

VI. Vis motrix immaterialis atque invariabilis, agens ſine impedimento in corpus, eodem modo illud accelerat, ſive adhuc quieſcat, ſive jam ſit in motu: cum enim vis illa ſemper comitetur corpus, nullum inter ſe habent motum relativum, adeoque vis motrix eodem modo agit in corpus motum, ac ſi utrumque omnino quieſceret. Hæc cauſa eſt, cur corpora gravia, inter cadendum, continuo & uniformiter accelerantur ſecundum tempora; ſuppoſito ſcilicet intenſitatem vis acceleratricis non mutari inter agendum, hoc eſt, neque augeri neque minui; ſicuti revera vis gravitatis, eandem continuo ſervat intenſitatem, in corpore gravi deſcendente, æque ac ab initio deſcenſus.

VII. *Intenſitas* vis motricis invariabilis, dicitur menſura, ſecundum quam in corpore movendo producitur major minorve vis acceleratrix: Sic gravitas, in corpore verticaliter cadente, majorem habet intenſitatem, quam ea in eodem corpore ſuper plano declivi delabente; in priori enim caſu, major producitur vis acceleratrix quam in altero; in utroque autem gravitas eſt invariabilis.

VIII. *Vis motrix variabilis* eſt, cujus intenſitas mutatur in agendo. Sic ex. gr. vis elaſtri tenſi, ab initio relaxationis majorem habet

habet intenſitatem, per conſequens, majorem imprimit corpori propellendo vim acceleratricem, quam in progreſſu relaxationis. De his hæ habentur Regulæ: Sit ſpatium a corpore percurſum $= x$; maſſa corporis propulſi $= m$; vis motrix in fine ſpatii percurſi $= p$; velocitas acquiſita $= v$; tempus per $x = t$; proinde $dt = \frac{dx}{v}$; erit $\frac{pdt}{m}$, ſeu $\frac{pdx}{mv} = dv$, ideoque $\int pdx = \frac{1}{2} mvv$, id quod notiſſimum eſt.

IX. Partes inferiores aquæ in vaſe aliquo contentæ, premuntur a ſuper incumbente maſſa aquea, ſecundum ſolam profunditatem, quamcunque vas habeat figuram; hoc eſt, ſi maſſa aquea cogitatione dividatur in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitiei, unumquodque ex illis ſtratis tantumdem premitur, ac ſi illi incumberet cylindrus aqueus ejuſdem altitudinis, quam eſt ea, quæ in vaſe reſpondet profunditati ipſius ſtrati.

X. Hinc recte colligitur: Si amplitudines ſtratorum, eandem craſſitiem infinite parvam habentium, ſint m, m', m'', m''', &c. eorumque adeo ponduſcula propria ſint etiam ut m, m', m'', m''', &c., ſeparari poterunt per mentis abſtractionem, a ſtratis ipſorum gravitationes; ita ut eorum ſola ſuperſit materia ſine pondere: ſed ſi ablatarum gravitationum loco, totidem aliæ ſubſtituantur, quæ junctim premant ſupremam aquæ ſuperficiem, obſervando nimirum in ſingulis hanc analogiam, ut ſit amplitudo cujuſlibet ſtrati ad amplitudinem ſupremæ ſuperficiei, ita gravitatio propria ſtrati ad gravitationem ſubſtituendam: orietur inde in ſingulis ſtratis eadem preſſio, ac ſi manſiſſent in ſtatu ſuo naturali.

XI. Voco *Tranſlationem*, ſubſtitutionem illam mentalem. Ut me explicem, habeat ſtratum aliquod ex inferioribus amplitudinem $= m$, ejus gravitatio, vel ponduſculum proprium $= \pi$; amplitudo ſtrati ſupremi $= b$, erit *gravitatio tranſlata* ad ſuperficiem ſupremam $= \frac{b}{m}\pi$, quæ, cum reliquis omnibus ita *tranſlatis*, conſtituit totam vim motricem immaterialem, qua omnis aqua in vaſe deorſum urgetur, eodem modo ac fit naturaliter.

Digitized by Google

MONITUM.

Monere jam convenit in anteceſſum, me, per totam hanc tractationem de motu aquarum fluentium, abſtrahere a conſideratione impedimentorum peregrinorum & accidentalium, quæ alterare poſſunt motum per regulas determinatum. Talia impedimenta ſunt aquarum imperfecta fluiditas, item illarum adhæſio, atque frictio ad latera vaſorum, nimia tuborum gracilitas, foraminum ſeu luminum anguſtia, tenacitas particularum fluidarum, ob quam non facillime a ſe invicem ſecedunt, & quæ ſunt alia ejuſmodi, ad quæ non attendo.

Hoc quoque notari velim, non eſſe abſolutæ neceſſitatis, ut ſemper aquarum ſtrata in ſitu horizontali concipiantur: commodius illa finguntur, perpendicularia ad directionem motus aquæ. Sic ex. gr. cum aqua ex vaſe ampliori, transfluit in tubum anguſtiorem horizontalem, cujus orificii vel luminis area ſit in plano verticali, & ad latus tubi recto; aqua in tubo contenta rectiſſime dividi concipitur in ſtrata verticalia, & plano luminis parallela; eoque magis, quod ipſa natura hunc quaſi ſitum affectat: videmus enim columnam aqueam in tubo aliquo, duas lineas in diametro non multum excedente, habere ambas ſuas ſuperficies extremas diſpoſitas ad ſitum perpendicularem lateribus tubi, quamvis tubus ipſe ſit ad horizontem obliquus, vel omnino horizontalis. Linea conjungens centra gravitatis ſtratorum, ſive ſit recta ut in tubis rectilineis, ſive curva ut in tubis curvilineis, vocabitur *linea centrica*, vel ſimpliciter *centrica*: ſingula quippe ſtrata, quoad materiam in centris ſuis collecta, eum habere motum cenſentur quem ipſa habent ſtrata.

DISSER-

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ

PARS PRIMA,

Agens de motu aquarum per vaſa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis ſibi invicem adaptis ſunt conflati.

I.

DEtur primo canalis, (Fig. 1) ABCFDE, compoſitus ex duobus tubis cylindricis, diverſæ amplitudinis AGDE & GBCF, quorum ille fundum GD apertum habeat foramine GF, per quod communicet cum tubo anguſtiori BF. Sit vero totus canalis BE plenus liquore homogeneo, per ſe nullius gravitatis, ſed urgeatur a parte orificii AE, data vi motrice $=p$, quæ, æqualiter premendo, expandatur per totam ſuperficiem liquoris AE; quæritur lex accelerationis, qua liquor per canalem profluet? Suppono autem canalem ſemper manere plenum liquore, quod fit concipiendo ſuppeditari jugiter aliunde novam materiam liquoris, eadem quovis momento velocitate in tubum GE ſubingredientis, ad reſarciendum id quod per alterum orificium GF egreditur in tubum GC, atque ex hoc ipſo per lumen BC in auras dilabitur.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI *Fig.* 1.

II.

Ex Hydroſtaticis aſſumpſi vim motricem p immaterialem, qua premitur ſuperficies liquoris AE, propagari in inſtanti, ad ſuperficiem GF liquoris in tubo BF contenti; idque ſive ſtagnet liquor in toto canali, ſive fluat; dummodo plenus maneat.

III.

Dum tranſit liquor ex uno tubo in alterum, mutabitur utique velocitas in ratione reciproca amplitudinum; at nulla mutatio eſt ſubitanea, ſed ſucceſſiva & gradualis, procedens per omnes poſſibiles gradus intermedios a minori ad majorem, vel a majori ad minorem.

IV.

Hinc quando fluit liquor motu parallelo, ita ut quolibet momento, eadem inſit velocitas ſingulis partibus liquoris, in directione ab AE verſus GD, antequam partes ipſi GF proximæ, perveniant ad orificium GF, oportet ut per diſtantiam ſaltem minimam HG, incipiant accelerari, & accelerando pergant, donec in ipſo ingreſſu GF, acquiſiverint velocitatem liquoris per tubum BF fluentis motu pariter parallelo, ſinguliſque partibus communi.

V.

Formatur itaque, pro latitudine indefinite parva HG, aliquis quaſi gurges IFGH, ex lato in anguſtum coarctandus, per quem liquor, continua acceleratione ſed tamen per gradus adaucta, perlabi debet, manente portiuncula quam minima liquoris (quæ replet ſpatiolum IFD) in quiete perpetua.

VI.

Sit curva IMF, terminans gurgitem, cujuſcunque naturæ, neque enim neceſſe eſt, eum ſupponere alicujus determinatæ figuræ; mox enim demonſtrabo, eandem ſemper requiri vim motricem, ad id unice deſtinatam ut liquor per gurgitem cogatur, qualemcunque habeat latitudinem HG, modo ſit infinite parva, & cujuſcunque ſit naturæ linea IMF, quæ connectit extremitates I & F.

VII.

V I I.

Nemo putet vim illam motricem [quæ exiguam adeo, imo infinite parvam, portiunculam liquoris per gurgitem protrudit] debere & ipſam eſſe infinite parvam, adeoque contemni poſſe. Eſt enim omnino finitæ quantitatis illa vis motrix; ideo quia ſi quantitas materiæ movendæ eſt infinite parva, ex altera parte, vis acceleratrix debet eſſe infinite magna, ad id nimirum, ut tempuſculo infinite parvo, quo liquor percurrit ſpatiolum HG, generari tamen poſſit mutatio finita in velocitate, utpote ea quæ fuerat velocitas in H ad eam quæ jam eſt in G, ſe habet ut GF ad HI.

V I I I.

Neglectio hujus vis motricis, tanquam nullius momenti, in cauſa fuit, cur nemo ad hunc uſque diem extiterit, qui ex principiis ſtaticis & pure mechanicis, dare potuerit leges liquorum per canales non uniformes fluentium; ſed quicunque ſuſceperunt illas exacte determinare recurrerunt, meo quidem exemplo, ad principium virium vivarum, de cujus applicatione ad hoc negotium aliaque in ſolidis æque ac in fluidis, forſan nunquam cogitaſſent, ſi me præeuntem non habuiſſent, quippe qui primus docui, hunc uſum derivare ex conſervatione virium vivarum. Sed ipſe ego non ſatis contentus indirecta hac methodo, utpote fundata in theoria illarum virium a multis nondum admiſſa, non deſtiti inquirere in methodum directam, quæ niteretur unice principiis dynamicis a nemine negatis; donec tandem, poſt meditationem longiuſculam, anno jam 1729 voti compos factus, vidi totius rei cardinem verſari in contemplatione gurgitis, antea a nemine animadverſi. Nunc itaque inventa mea, Amicis quibuſdam privatim explicata, etiam cum publico communicare conſultum duco. Hunc in finem, gurgitis generatione jam indicata, inceptum lubet, qua potero perſpicuitate, proſequi.

I X.

IX.

Concipiatur abſciſſa $HL = t$, applicata $LM = y$, atque prioris elementum $Ll = dt$, dicaturque tubi HE amplitudo AE ſeu $HI = h$, tubi GC amplitudo BC ſeu $GF = m$, liquoris in tubo GC velocitas $= v$, adeoque liquoris in tubo HE velocitas erit $\frac{m}{h} v$; ſunt enim velocitates amplitudinibus reciproce proportionales: ob eandem rationem, erit, in quolibet gurgitis loco, liquoris $LMml$ velocitas $= \frac{m}{y} v$, quod dicatur $= u$. Jam ergo ſit vis acceleratrix, qua animatur ſtratum liquoris $Lm = \gamma$; erit, ex natura accelerationis $\gamma dt = u du$, proinde $\gamma y dt = y u du$, hoc eſt, vis motrix qua urgetur ſtratum liquoris $LMml = y u du$. Hæc vero vis motrix, per §II, generatur a vi motrice partiali in tubo HE exiſtente, & expanſa per totam amplitudinem AE; quæ ut innoteſcat, faciendum eſt ut LM ad HI, ſeu ut y ad h, ita $y u du$ ad $h u du$, erit $h u du$ [tranſlata nempe ipſius $y u du$] vis motrix particularis in tubo HE, quæ producere poteſt vim motricem $y u du$, in gurgitis ſtrato $LMml$; & integrando per totum gurgitem habetur $\frac{1}{2} h \left(vv - \frac{mm}{hh} vv \right)$ ſeu $\frac{hh - mm}{2h} vv$, quæ deſignat vim motricem requiſitam in tubo HE, ad id unice, ut in gurgite fiat acceleratio neceſſaria ad mutandam velocitatem minorem in majorem, qua opus eſt, ut tranſeat liquor in tubum anguſtiorem GC.

Corollarium I.

Hinc patet naturam curvæ IMF, ut & latitudinem gurgitis HG, non ingredi in vis motricis determinationem, ad generandum motum gurgitis. Datis enim amplitudinibus extremis HI & GF, ſeu h & m, & velocitate v, ſemper habetur vis motrix in tubo $HE = \frac{hh - mm}{2h} vv$, pro motu in gurgite generando.

Corol-

Corollarium II.

Quod ſi, continuante fluxu liquoris, ejus velocitas v in tubo BF maneat ſemper conſtans, manifeſtum eſt, etiam alteram velocitatem in tubo HE manere conſtantem; adeoque vim motricem, vel preſſionem p, nihil amplius conferre ad motum in utroque tubo accelerandum: unde liquet totam illam vim p unice adhiberi ad formandum gurgitem, eumque in ſtatu ſuo conſervandum; erit propterea $p = \frac{bb - mm}{2b} vv$.

Corollarium III.

Fingamus tubum HE, vel GE, eſſe verticaliter erectum inſtar vaſis cylindrici, & communicare cum tubo horizontali GC, atque vim p eſſe ipſum pondus columnæ liquoris contenti GE; ita ut [poſito g deſignare vim naturalem acceleratricem gravium, atque HA vel GA $= a$] habeatur $p = gab$ = ponderi liquoris in GE contenti; unde $gba = \frac{bb - mm}{2b} vv$. Sed ut v determinetur per altitudinem verticalem z, per quam grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem v; faciendum eſt $gdz = vdv$, proinde $gz = \frac{1}{2} vv$; ſubſtituendo igitur gz pro $\frac{1}{2} vv$; habebimus $gba = \frac{bb - mm}{b} \times gz$; unde emergit $z = \frac{bb}{bb - mm} a$, id quod dat hoc Theorema hydraulicum.

X.

Theorema.

Sit, (*Fig.* 2) *vas cylindricum AGFE verticaliter erectum*, *inſtructumque ad fundum tubo cylindrico horizontali FB utrinque aperto*: *Sit item*, *tam vas quam tubus*, *aqua jugiter plenus*, *ut nimirum tantum aquæ*, *eadem velocitate quam habet aqua in vaſe*, TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 2.

 con-

Digitized by Google

continuo ſuppeditetur per AE, quantum effluit per lumen BC. Dico velocitatem aquæ effluentis [ſi illa naſcatur ex quiete] convergere citiſſime, ad eam quæ acquiritur a gravi libere cadente per altitudinem $= \frac{hh}{hh - mm}\, a$.

Cujus veritas patet ex *Coroll.* 3 præced.

COROLLARIUM I.

Unde ſi lumen BC ſit valde parvum, reſpectu amplitudinis vaſis AE, adeo ut m negligi poſſit reſpectu h, prodibit $z = a$; hoc eſt, velocitas aquæ effluentis ex tubo, erit æqualis ei quam grave libere delapſum ex altitudine EF acquirit: Quod eſt Theorema notiſſimum; ſed ex principiis dynamicis nondum hucuſque demonſtratum; præſertim ſi adſuerit tubus BF adaptatus: cum antea creditum fuerit Theorema valere tantum pro parvo foramine ad F ſuppoſito.

COROLLARIUM II.

Quo majus eſt lumen BC, reſpectu amplitudinis vaſis AE, eo major fit velocitas maxima aquæ effluentis; aucto enim m, augetur valor fractionis $\frac{hh}{hh - mm}$, donec evadente $m = h$, velocitas maxima ſit infinita; quod verum eſſe vel hinc quoque patet, quia tunc & vas & tubus ſunt ejuſdem amplitudinis, formantque unum continuum tubum reflexum; adeoque vis ponderis aquæ, in parte AF ſemper plena, continuo accelerat totam maſſam aqueam, ut tandem ejus velocitas, tempore infinito generata, fiat & ipſa infinita. Nam dicendo longitudinem tubi FC $= b$, maſſa omnis aquæ in tubo reflexo AGC, erit $= ha + hb$; eaque non aliter accelerabitur, quam corpus aliquod ſolidum, quod animaretur vi acceleratrice $= \frac{gha}{ha + hb} = \frac{ga}{a + b}$: tale utique corpus, cadendo per tempus infinitum, acquireret velocitatem infinitam.

CO-

COROLLARIUM III.

Si vero m majus eſſet quam h, id eſt, ſi tubus horizontalis amplior eſſet quam vas verticale; velocitas maxima nunquam & nequidem tempore infinito daretur: foret enim $\frac{hh}{hh - mm}$ negativum; indicio quod, durante fluxu in æternum, acceleratio aquæ effluentis incrementum capere non deſinet. Hoc enim in caſu, fiet in tubo gurges inverſus, reſpiciens orificium BC, qui, ut ex ſequentibus patebit, eam habet naturam, ut vim motricem adjuvet potius quam diminuat, dum ſeſe quaſi ſubducit preſſioni a tergo venienti, quo aqua in vaſe liberius deſcendere queat.

SCHOLIUM.

Hucuſque conſideravimus vas & tubum aqua conſtanter plenum, atque effluentem aquam in maxima ſua velocitate, adeoque æquabili ſeu uniformi; quo fit, ut nulla amplius requiratur vis motrix ad aquam accelerandam, neque per vas, neque per tubum; ſed vis motrix p tota uſurpetur ad coërcendum gurgitem, qui formatur ante ingreſſum ex ſpatio ampliori in anguſtius. Nunc contemplabimur velocitatem fluxus aquæ tanquam creſcentem, atque initium ſuum a quiete ſumentem; ita ut ad accelerationem procurandam, tam in vaſe quam in tubo, ſua pariter peculiaris pars vis motricis p requiratur. Examinabimus primo caſum, quo vas cum tubo conſtanter plenum ſupponitur.

X I.

Sit x longitudo ſpatii quam aqua ex quiete in tubo percurrit, erit $\frac{m}{h}x$ longitudo quam eodem tempore percurrit in vaſe. Sic pariter, exiſtente velocitate in tubo $= v$, erit quoque velocitas in vaſe $= \frac{m}{h}v$; unde vis acceleratrix in tubo $= \frac{v\,dv}{dx}$,

eaque multiplicata per maſſam aquæ mb, dabit vim motricem $= \frac{mbvdv}{dx}$, quæ (per §. 2) tranſlata in vas, dabit æquipollentem $\frac{hbvdv}{dx}$, a qua nimirum illa in tubo $\frac{mbvdv}{dx}$ produci poteſt. Ita quoque vis acceleratrix in vaſe $= \frac{mm}{hh} vdv : \frac{m}{h} dx = \frac{mvdv}{hdx}$, quæ ducta in maſſam ha, dat vim motricem $= \frac{mavdv}{dx}$ ad aquam in vaſe propellendam, atque ſic ſumma trium iſtarum virium motricium per gurgitem, per tubum, & per vas, debet æquare vim motricem totalem p: unde hæc nobis reſultat æquatio $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{hbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$. Eſto igitur, ut ante, p ipſum pondus columnæ aqueæ $= gha$, & fiat, ut in *Coroll.* 3, §. IX, $gz = \frac{1}{2} vv$, quibus ſubſtitutis, prodibit hæc æquatio $\frac{hh - mm}{h} z + \frac{hbdz}{dx} + \frac{madz}{dx} = ha$; ſeu $(hh - mm) zdx + (hhb + hma) dz = hhadx$, unde $dx = \frac{hhb + hma}{hha - hhz + mmz} dz$, quæ debite tractata & integrata per logarithmos, dabit $x = (\frac{hhb + hma}{hh - mm}) \times l (\frac{hha}{hha - hhz + mmz})$; unde progrediendo ad numeros [aſſumendo $1 = lf$] $z = (\frac{hha}{hh - mm}) \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)})$.

Quod ſi aqua in vaſe [quod, brevitatis gratia, ſine tubo annexo tantum habeat foramen amplitudinis m] animetur gravitate g' diverſa a gravitate naturali g, invenietur $z = \frac{g'hha}{g(hh - mm)} \times (1 - 1 : f^{(hh - mm)x : (hhb + hma)})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$; id quod dat caſum maximæ velocitatis, ad quam fluxus con-

convergit, erit $1:f^{(bb-mm)x:(bbb+bma)} = 0$, adeoque $z = \frac{bba}{bb-mm}$ pro gravitate naturali g, quod omnino conforme eſt *Coroll.* 3, art. IX; atque ſi præterea m eſt infinite parvum reſpectu ipſius b, provenit $z = a$, prorſus ut habetur in *Coroll.* 1, §. X, quæ methodum egregie confirmant.

X I I.

Expendamus nunc caſum, ubi vas AF [Fig. 2] aqua non manet plenum, ſed pro menſura aquæ effluentis paulatim exinanitur, ejuſque ſuperficies AE continuo deſcendit.

Finge aquam in tubo horizontali percurriſſe longitudinem x, proinde ex eo effluxiſſe [ſuppono enim vas & tubum ab initio plenum eſſe] quantitatem aquæ $= mx$, hoc eſt = cylindro aqueo, cujus baſis eſt m & longitudo x. Quod ſi igitur in EF, ſumatur pars $EI = \frac{m}{b}x$, perſpicuum eſt, horizontalem HI, eſſe locum ſuperficiei ſupremæ, ad quam aqua deſcendit in vaſe, poſtquam aquæ pars mx effluxit per tubum. Reſtabit ergo in vaſe columna aquea $GI = ba - mx$, cujus pondus $g(ba - mx)$ jam eſt id ipſum quod vocavimus p. Sic itaque vis acceleratrix aquæ reſtantis in vaſe [quæ in §. XI generaliter inventa eſt $= \frac{mvdv}{bdx}$] ſi ducatur in maſſam aqueam, quæ nunc eſt $ba - mx$, habebimus vim motricem $= \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx)$, quæ competit aquæ per vas detrudendæ; unde jam colligendo tres vires per gurgitem, per tubum, & per vas, aggregatumque æquando ipſi p, hoc eſt, ipſi $g(ba - mx)$ lucrabimur hanc æquationem $\frac{bb-mm}{2b}vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = g(ba - mx)$; ubi ſubſtituendo gdz pro vdv, & gz pro $\frac{1}{2}vv$, ut fecimus in *Coroll.* 3, §. IX, mutabitur noſtra æquatio in hanc aliam $\frac{bb-mm}{b}z + \frac{bbdz}{dx} + \frac{mdz}{bdx}(ba - mx) = ba - mx$; & multiplicando per bdx in hanc, $(bb - mm)zdx + hbbdz + mdz(ba - mx) = (bba - bmx)dx$.

dx. Quæ vera eſt æquatio, ex qua ſi eruatur valor ipſius z, habebitur altitudo, per quam grave libere delapſum acquiret velocitatem quæſitam, nempe æqualem illi quam habebit aqua in tubo, poſtquam quantitas mx ex eo effluxit.

Poteſt autem æquatio inventa, in qua indeterminatæ permixtæ reperiuntur, per regulas noſtras, ope Lemmatis mox ſequentis integrari; atque ita innoteſcet valor ipſius z in terminis finitis. Interim hoc loco ei negotio diutius non eſt immorandum: ſufficit mihi Problema reduxiſſe ad æquationem differentialem, utendo principiis pure mechanicis, quod an a quoquam alio ante me præſtitum fuerit, haud recordor me unquam vidiſſe. Sciendum vero ipſiſſimam hanc æquationem inveniri per methodum virium vivarum; ita ut, & hoc nomine, uſus illarum atque bonitas ſeſe commendet contra Adverſarios.

COROLLARIUM I.

Ut determinetur maxima velocitas liquoris effluentis, tum & ea in vaſe deſcendentis, ponendum eſt tantum $dz = o$: quo facto, æquatio noſtra ſuppeditabit $(bb - mm)z = bba - bmx$, proinde $z = \frac{bba - bmx}{bb - mm}$, quod cum adhuc ipſum x incognitum in ſe contineat, nihil quidem determinat, niſi valor ipſius z ſimul etiam ex æquatione generali eruatur.

COROLLARIUM II.

Si m ſit valde parvum reſpectu ipſius b; æquatio generalis hanc induit formam $zdx + bdz = adx$; unde $dx = \frac{bdz}{a-z}$: quod dat $z = a - a : f^{x:b}$. Ergo ut in hoc caſu z ſit *maximum*, oportet x eſſe infinitum, & tunc fiet $z = a$; quod quidem ex ipſo $dx = \frac{bdz}{a-z}$, ſeu ex $dx\ (a - z) = bdz$ ſtatim colligi poteſt; faciendo enim propter maximum z ipſum $dz = o$, erit etiam $a - z = o$, ac proinde $z = a$. Unde iterum

Digitized by Google

rum liquet, in vaſe ampliſſimo, aquam per anguſtiſſimum tubum effluentem ſtatim acquirere velocitatem maximam, ac poſtea ſemper æquabilem, atque æqualem ei quam grave libere cadens ex altitudine vaſis acquireret, ut ſupra in *Coroll.* 1, §. X, invenimus; hoc quippe in caſu, vas conſiderari poteſt tanquam ſemper plenum, quia, ob vaſis infinitam quaſi amplitudinem, reſpectu habito ad tubi anguſtiam, requireretur utique tempus etiam quaſi infinitum, antequam in illo deſcendat aqua ſenſibiliter.

XIII.

Ecce nunc alium caſum: Sit tubus [qui ab initio ante fluxum uſque ad C aqua plenus ponitur,] indefinite continuatus, ita ſcilicet, ut deſcendente aqua in vaſe, nihil extra tubum effluere poſſit, ſed ſemper quicquid liquoris ex vaſe deſcendit in tubum, id una cum eo quod jam ineſſe ſupponitur, junctim propulſum intra tubum fluere cogatur. Quæritur lex accelerationis & velocitas ipſa, pro quolibet ſpatio intra tubi cavitatem percurſo? Vis acceleratrix in tubo hic etiam, ut in §. XI oſtenſum eſt, erit $= vdv : dx$; ſed maſſa aquæ propellendæ nunc eſt $= mb + mx$, per quam vis acceleratrix $vdv : dx$ multiplicata, dat vim motricem in tubo $(mbvdv + mxvdv) : dx$, quæ tranſlata ad amplitudinem vaſis, dat vim motricem æquipollentem in vaſe $= (bbvdv + bxvdv) : dx$. Atque ſic, conjunctis tribus viribus motricibus per gurgitem, per tubum & per vas; iiſque æquatis vi motrici totali p, prodibit, pro vaſe ſemper pleno ab affluente nova aqua, hæc æquatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv + bxvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p = gba$ [conf. §. XI]: ſed pro vaſe nihil novi liquoris accipiente, hæc altera $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{bbvdv + bxvdv}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = p = g(ba - mx)$, [conf. §. XII]: ſubſtituto gz pro $\frac{1}{2} vv$, æquatio prior dat hanc $(bb - mm) zdx + (bbb + bma + bbx) dz = bbadx$; poſterior vero hanc

(bb

Digitized by Google

$(hh - mm)zdx + (hhb + hma + hhx - mmx)dz = (hha - hmx)dx$. Utraque autem æquatio integrari poteſt per Lemma ſupra promiſſum, quod nunc demonſtro.

X I V.

L E M M A.

Sit æquatio integranda, [& quidem ſine neceſſitate ſeparandi indeterminatas] $\alpha z dx + (\beta + \gamma x) dz = (\varepsilon + \theta x) dx$; ſcribo y pro $\beta + \gamma x$, unde $dx = dy : \gamma$, & æquatio mutatur in hanc $\frac{\alpha}{\gamma} z dy + y dz = (\varepsilon + \theta x) dx$; qua multiplicata per $y^{\alpha:\gamma - 1}$ habebitur $\frac{\alpha}{\gamma} z y^{\alpha:\gamma - 1} dy + y^{\alpha:\gamma} dz = (\varepsilon + \theta x) dx \times y^{\alpha:\gamma - 1} = (\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx$. Integrando prodibit $y^{\alpha:\gamma} z = \int((\varepsilon + \theta x) \times \frac{1}{\gamma} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma - 1} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \int(\frac{\theta}{\gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \gamma dx) = \frac{1}{\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma} \times (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \beta^{\alpha:\gamma} + \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma + 1}$. Notetur hic duos poſtremos terminos datos adjectos eſſe, more ſolito, ad rectificandam æquationem; ut nimirum evaneſcente x, etiam evaneſcat z. Dividatur nunc æquatio per $y^{\alpha:\gamma}$, hoc eſt $(\beta + \gamma x)^{\alpha:\gamma}$, & emerget valor verus ipſius z, nempe $z = \frac{1}{\alpha} (\varepsilon + \theta x) - \frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} (\beta + \gamma x) + (\frac{\theta}{\alpha\alpha + \gamma\alpha} \beta^{\alpha:\gamma + 1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \beta^{\alpha:\gamma}) \times (\beta + \gamma x)^{-\alpha:\gamma}$.

X V.

Ut igitur hujus applicatio fiat ad priorem æquationem $(hh - mm) zdx + (hhb + hma + hhx) dz = hhadx$, erit hic $\alpha = hh$

$bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb$, $\epsilon = bba$ & $\theta = 0$, quibus ſurrogatis obtinebitur $z = \frac{bba}{bb - mm} - \frac{bba}{bb - mm}(bbb + bma)^{(bb - mm):bb} \times (bbb + bma + bbx)^{(-bb + mm):bb}$, vel quod idem eſt $z = \frac{bba}{bb - mm} \times (1 - (\frac{bb + ma}{bb + ma + bx})^{(bb - mm):bb})$. Sin vero ad poſteriorem, ubi $\alpha = bb - mm$, $\beta = bbb + bma$, $\gamma = bb - mm$, $\epsilon = bba$, $\theta = -bm$, reſultat $z = \frac{bba - bmx}{bb - mm} + \frac{bm}{2(bb - mm)^2} \times (bbb + bma + bbx - mmx) + (\frac{-bm}{2(bb - mm)^2} \times (bbb + bma)^2 - \frac{bba}{bb - mm}(bbb + bma)) \times (bbb + bma + bbx - mmx)^{-1}$, quibus in ordinem digeſtis, rite procedendo, emerget tandem $z = (\frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bbb + bma + bbx - mmx})$.

COROLLARIUM I.

Si m reſpectu b eſt valde parvum, habebitur pro vaſe ſemper pleno $z = \frac{ax}{b + x}$; pariter pro altero caſu prodit $z = \frac{ax}{b + x}$ quod quidem omnino ita evenire debet; quia enim, ob m infinite parvum, aqua tempore infinito opus habet ad effluendum, antequam ſuprema ejus ſuperficies in vaſe ampliſſimo ſenſibiliter deſcendat; patet utique perinde eſſe ac ſi ſemper plenum maneret vas, ac proinde hi duo caſus in eundém prorſus recidunt.

COROLLARIUM II.

Si $b = 0$, hoc eſt, ſi in tubo horizontali indefinite longo FB, ab initio fluxus nihil aquæ continetur; erit pro caſu vaſis ſemper pleni $z = \frac{bba}{bb - mm} \times (1 - (\frac{ma}{ma + bx})^{(bb - mm):bb})$; ſed pro altero caſu nihil novi liquoris accipientis, erit $z =$ bbax

$\frac{bbax - \frac{1}{2}bmxx}{bma + bbx - mmx}$. In hoc poſtremo caſu hoc quoque notari dignum eſt, quod eo momento, quo ſuperficies liquoris ad fundum uſque vaſis deſcenderit, id quod fit ſumendo $x = \frac{b}{m} a$; futurum ſit $z = \frac{1}{2} a$, hoc eſt, velocitas aquæ in tubo, poſt totalem vaſis depletionem, erit ea quam grave acquireret cadendo ex dimidia vaſis altitudine.

X V I.

De Canali trium pluriumve Tuborum.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 3.

Sit nunc (Fig. 3) canalis A L, conſtans tribus tubis A D, G C, B L, ac totus aqua plenus: Sitque vis motrix p, quæ expanſa uniformiter per ſuperficiem A E, eandem premat vel urgeat. Quæritur acceleratio & velocitas actualis, qua cum aqua ex tubo B L erumpit?

Ante omnia hic notandum, duos fieri gurgites breviſſimos; unum in tranſitu per G F, alterum in tranſitu per B K, qui ſinguli ſuam propriam requirunt vim motricem, transferendam ad amplitudinem A E, quibus dein addendæ ſunt vires motrices columnarum aquearum in ſingulis tubis contentarum, poſt tranſlationem earum virium ad amplitudinem A E: quo facto, ſumma omnium earum virium tranſlatarum æquanda eſt vi motrici totali p, unde reſultabit æquatio quæſita.

X V I I.

Sint igitur longitudines tuborum $AG = a$, $GB = b$, $BM = c$; eorumque amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$. Dicatur hic etiam velocitas in tubo ultimo $BL = v$, velocitas in tubo ſecundo $GC = u = \frac{n}{m} v$. Erit itaque, per ratiocinium §. IX adhibitum, vis motrix in ſuperficie A E, requiſita pro

pro formando gurgite per GF $= \frac{bb - mm}{2b} uu =$ [ſubſtituendo valorem ipſius uu qui eſt $\frac{nn}{mm} vv$] $\frac{bbnn - mmnn}{2bmm} vv$; item vis motrix in tubo GC requiſita pro gurgite per BK $= \frac{mm - nn}{2m} vv$, hæc vero tranſlata ad amplitudinem AE, faciendo ut m ad b, ita $\frac{mm - nn}{2m} vv$ ad $\frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, dat vim motricem in tubo primo AD, ad gurgitem producendum per BK, adeoque ambæ vires ſimul ſumptæ $\frac{bbmm - mmnn}{2bmm} vv + \frac{bmm - bnn}{2mm} vv$, hoc eſt $\frac{bbmm - mmmm}{2bmm} vv$, ſeu $\frac{bb - nn}{2b} vv = p$. Atque ita determinata eſt velocitas fluxus per tres tubos, poſtquam illa ad æquabilitatem pervenit.

C o r o l l a r i u m.

Hinc patet aquam per tres tubos eodem modo moveri, ac ſi, ſecundo remoto, tertius immediate primo eſſet adaptatus; poſito ſcilicet, fluxum ad ſummam & æquabilem velocitatem perveniſſe: imo porro nunc liquet, quotquot ſupponantur tubi, vires motrices per gurgites ſingulos tranſlatas ad tubum primum, & junctim ſumptas, æquivalere vi motrici unicæ in tubo primo adhibendæ ad gurgitem unicum, qui fieret, adaptando immediate tubum ultimum ad tubum primum; adeoque eandem, in utroque caſu, ſequi æquabilem velocitatem, ad quam convergit fluxus, ſive tranſeat aqua per totum canalem ex omnibus tubis compoſitum, ſive tantum omiſſis intermediis per primum & ultimum ſibi invicem immediate connexos. Omnia igitur, quæ ſupra de æquabili velocitate per duos tubos demonſtravimus, applicanda ſunt ad canalem ex quot libuerit tubis conſtantem.

X V I I I.

Conſideranda nunc venit acceleratio per canalem multorum

tuborum, quando nimirum fluxus aquæ incipit a quiete; primo tamen tubo ſemper pleno exiſtente, per affluxum novæ aquæ deſcendenti eadem velocitate ſuccedentis. Hanc in rem, nihil aliud faciendum, quam ut vis motrix pro maſſa aquea protrudenda per ſingulos tubos ſumpta, transferatur ad amplitudinem tubi primi; aggregatum harum virium motricium tranſlatarum, ſi addatur ad vim motricem per gurgites, hoc eſt, per illum unicum qui fieret ſi ultimus tubus immediate primo adaptetur; habebitur vis omnium, quæ æqualis eſt facienda ipſi p.

X I X.

Ut hanc regulam applicemus ad canalem trium tuborum, quorum longitudines ſint a, b, c; amplitudines h, m, n: ſitque x longitudo ſpatii quam aqua in tubo ultimo, ſeu tertio, ex quiete incipiens percurrit, & v velocitas acquiſita in hoc tubo. Erit, ad imitationem operationis §. XI, $\frac{n}{m}x$ longitudo quam aqua eodem tempore percurrit in tubo ſecundo, & $\frac{n}{m}v$ ejus velocitas acquiſita. Item $\frac{n}{h}x$ longitudo percurſa in tubo primo, & $\frac{n}{h}v$ velocitas acquiſita. Hinc vis acceleratrix in tubo tertio $= \frac{v\,dv}{dx}$, eaque multiplicata per maſſam aqueam in hoc tubo nc, dabit vim motricem $= \frac{ncvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, dabit æquipollentem $= \frac{hcvdv}{dx}$. Sic quoque vis acceleratrix in tubo ſecundo $= \frac{nn}{mm}vdv : \frac{n}{m}dx = \frac{nvdv}{mdx}$, quæ ducta in maſſam aquæ mb tubi ſecundi, dat vim motricem $\frac{nbvdv}{dx}$, quæ tranſlata in tubum primum, gignit $\frac{hnbvdv}{mdx}$. Sic tandem etiam vis acceleratrix in tubo primo $=$

$\frac{nn}{hh}vdv$:

$\frac{nn}{bb}vdv : \frac{n}{b}dx = \frac{nvdv}{bdx}$, ducta in maſſam tubi primi ha; dat vim motricem aquæ in tubo primo $= \frac{navdv}{dx}$, quæ cum jam ſit in tubo primo, ulterius non eſt transferenda; tres illæ vires ſunt igitur $\frac{bcvdv}{dx}$, $\frac{bnbvdv}{mdx}$, $\frac{navdv}{dx}$, quarum ſumma addita ad vim per gurgites, habebitur $\frac{bb - nn}{2b}vv + (bc + \frac{bnb}{m} + na)\frac{vdv}{dx} =$ vi totali p.

X X.

Sint nunc quatuor tubi, quorum longitudines a, b, c, e; amplitudines h, m, n, q, ſitque x longitudo in ultimo tubo percurſa, v velocitas acquiſita in ultimo tubo. Ad obſervandam uniformitatem, & legem progreſſionis ab uno tubo ad alterum, incipiam a primo, in quo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx$, eſt enim velocitas $= \frac{q}{h}v$, & elementum velocitatis $= \frac{q}{h}dv$; ut & elementum ſpatii percurrendi $= \frac{q}{h}dx$; habetur itaque ex lege accelerationis, vis acceleratrix $= \frac{qq}{hh}vdv : \frac{q}{h}dx = \frac{qvdv}{hdx}$ eamque multiplicando per maſſam aquæ movendæ, hæc oritur vis motrix $hqavdv : hdx$, quæ quia jam eſt in primo tubo, non indiget ulteriori tranſlatione; ſed in tubo ſecundo, vis acceleratrix $= \frac{qq}{mm}vdv : \frac{q}{m}dx = \frac{qvdv}{mdx}$, ducta in maſſam aqueam mb, dat vim motricem in tubo ſecundo $mqbvdv : mdx$, quæ tranſlata in tubum primum, dat æquipollentem $= hqbvdv : mdx$; eodem modo vis motrix tranſlata ex tubo tertio in primum, erit $hqcvdv : ndx$, & vis motrix tranſlata ex quarto in primum $= hqevdv : qdx$. Omnes ergo ſimul ſumptæ $= \frac{hqavdv}{hdx} + \frac{hqbvdv}{mdx} + \frac{hqcvdv}{ndx} + \frac{hqevdv}{qdx}$

$= (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q}) \times \frac{bqvdv}{dx}$. Ergo generaliter pro quocunque tuborum numero, quorum longitudines ſint a, b, c, . . . π, & amplitudines b, m, n, . . . ω, erit ſumma omnium virium motricium in tubum primum tranſlatarum $= (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} + \frac{e}{q} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx}$; cui ſi addatur vis motrix $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv$, pro gurgitibus univerſis, emerget vis motrix totalis ponenda æqualis ipſi p; unde reſultat hæc æquatio $\frac{bb - \omega\omega}{2b} vv + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega vdv}{dx} = p$; vel ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, hæc altera $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) \times \frac{b\omega dz}{dx} = \frac{1}{g} p$, vel $(bb - \omega\omega) z dx + (\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) bb\omega dz = \frac{b}{g} p dx$.

COROLLARIUM I.

Si longitudines a & π tuborum primi & ultimi, nec non ongitudines intermediorum manent invariabiles, primi nempe per continuum affluxum & ultimi per effluxum, erit ſeries $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$ conſtans, quæ vocetur M, & $p = gha$; unde hæc æquatio prodit $\frac{bb - \omega\omega}{b} z + \frac{Mb\omega dz}{dx} = ha$, vel $(bb - \omega\omega) z dx + Mbb\omega dz = bhadx$; cujus x conſtruitur per logarithmos in z datos, ipſum vero z, per numerales datos in x.

COROLLARIUM II.

Quod ſi vero, nulla affluente aqua nova, depleatur primus tubus, effluente nimirum per ultimum datæ longitudinis; ſicuti

fieret

fieret, ſi primus tubus inſtar vaſis verticaliter erecti, contineret liquorem proprio ſuo pondere preſſum, dum per canalem horizontalem quem reliqui conſtituunt expelleretur: erit, ſi x vocetur ſpatium per ultimum tubum ex quiete percurſum, altitudo liquoris reſtantis in vaſe cylindrico $= a - \frac{\omega x}{b}$, adeoque a ſerie $\frac{a}{b} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, auferendum jam eſt $\frac{\omega x}{bb}$ & pro $\frac{1}{g}p$ ſcribi debet $ba - \omega x$; id quod dat hanc æquationem $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz = (bba - b\omega x)dx$; quæ, per *Lemma* §. XIV, poteſt integrari.

COROLLARIUM III.

Porro ſi tubus ultimus ſit indefinite prolongatus, ita ut aquæ ſuperficie ſuprema deſcendente in vaſe, aqua ex tubo ultimo non quidem effluat, ſed in eo continuo magis magiſque protrudatur; ſcribendum eſt in ſerie, non tantum $a - \frac{\omega x}{b}$ pro a; ſed etiam $\pi + x$ pro π, & ita, pro hoc caſu, acquiremus hanc alteram æquationem $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz - \omega\omega x dz + bbxdz = (bba - b\omega x)dx$. Quæ per idem *Lemma* integrabilis eſt.

COROLLARIUM IV.

Si computando vas ipſum pro primo tubo, habeatur $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, hoc eſt, ſi longitudines tuborum, quorum numerus ſit N, ubique ſint proportionales ſuis reſpective amplitudinibus; generalis noſtra æquatio mutatur in hanc $(bb - \omega\omega)zdx + Nba\omega dz = \frac{1}{g}bpdx$.

COROL-

COROLLARIUM V.

Si vero, excepto vaſe vel tubo primo, habeatur $\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \ldots = \frac{\pi}{\omega}$, ſitque numerus reliquorum tuborum $= N$, erit utique $(bh - \omega\omega)\, z\,dx + ba\omega dz + \frac{Nhb\omega dz}{m} = \frac{1}{g}\, hp\,dx$.

COROLLARIUM VI.

Eſto nunc numerus tuborum infinitus, ſed unuſquiſque eorum, excepto primo, longitudinis infinite parvæ, ita ut omnes ſimul ſumpti repræſentent canalem conoidicum truncatum, cujus amplitudo antica $= m$, & poſtica $= \omega$, qualis eſt (Figura 4) RSTV, qui ſi concipiatur ſectus duobus planis proximis sr, tv, ipſis SR, TV, parallelis, erit $srvt$ unus ex iſtis tubulis, habens pro longitudine rv elementum longitudinis RV totius canalis, & pro amplitudine planum sr. Unde ut habeatur ſumma ſeriei $\frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$, integrari debet $\frac{vr}{sr}$, quod in pluribus exemplis fieri poteſt algebraice, ex. gr. ſi ST ſit linea recta, hoc eſt, ſi SRVT ſit conus decurtatus ordinarius: Item ſi ST ſit arcus Hyperbolæ cujuſvis generis ad aſymptotum RV.

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 4.

XXI.

Illuſtremus rem ipſam in priori exemplo. Sit nempe SRVT conus decurtatus, cujus amplitudo antica $SR = m$, poſtica $TV = \omega$; proinde earum ſemidiametri ut $\sqrt{m}$ & $\sqrt{\omega}$: Porro dicatur ejus abſciſſa $Vv = t$; ejus elementum $vr = dt$; ſemidiameter amplitudinis $tv = y$; totaque tubi longitudo $RV = L$, invenietur $y = (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega}) : L$; ipſa vero amplitudo sr, quæ eſt ut yy, $= (t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2 : L^2$;

quare

quare $\frac{vr}{sr} = \frac{L^2 dt}{(t\sqrt{m} - t\sqrt{\omega} + L\sqrt{\omega})^2}$; cujus integrale debito modo rectificatum $= \frac{Lt}{t\sqrt{m\omega} - t\omega + L\omega}$, adeoque per totum canalem RSTV, ſumendo nempe Vv, ſeu $t =$ VR $= L$, habetur integrale quæſitum $= \frac{L}{\sqrt{m\omega}} = \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}$. Atque ſic æquatio noſtra generalis §. XX, $(hh - \omega\omega) z dx + (\frac{a}{h} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \ldots + \frac{\pi}{\omega}) hh\omega dz = \frac{h}{g} p dx$, dabit, pro canali ſeu tubo conico, cujus longitudo L, & duæ amplitudines extremæ ſunt m & ω, exiſtente vaſis altitudine a & amplitudine h, hanc æquat. $(hh - \omega\omega) z dx + ha\omega dz + \frac{hhL\omega dz}{\sqrt{m\omega}} = \frac{1}{g} hp dx$.

XXII.

Pro caſu *Coroll.* 1, §. XX, erit quoque $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz = hhadx$, ubi $M = \frac{a}{h} + \frac{L}{\sqrt{m\omega}}$. Pro caſu *Coroll.* 2, §. ejuſdem, erit ſumpto pro M eodem, $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz = (hha - h\omega x) dx$. Pro caſu *Coroll.* 3, intelligendum eſt tubum conicum, in extremitate ſibi adjunctum habere tubum cylindricum indeterminatæ longitudinis, & quidem amplitudinis ω, ita ut in eo aqua propulſa ſemper contineatur, atque percurrat ab initio motus ſpatium x; erit tunc $(hh - \omega\omega) z dx + Mhh\omega dz - \omega\omega x dz + hhx dz = (hha - h\omega x) dx$.

XXIII.

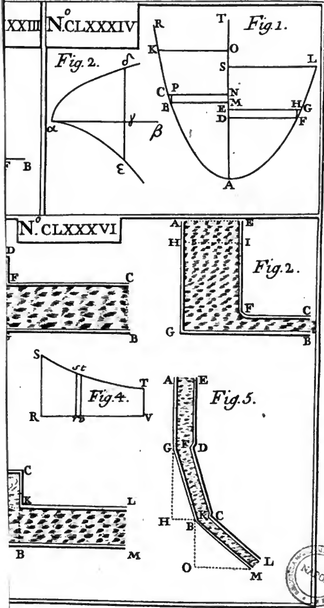
SCHOLIUM GENERALE.

Poſſent ex his derivari plura alia Corollaria, utilia non minus quam curioſa & elegantia. Nam quæ ad hanc ſpectant materiam, omne ſuum fundamentum habent in jam traditis & explicatis; licet id non indicaverim expreſſis verbis: ex. gr. ſup-

poſuimus quidem aquam, aliumve liquorem, in primo duntaxat tubo tanquam in vaſe gravitare, indeque urgeri per canalem ſitum horizontalem habentem, per quem dum movetur aqua, deſtituitur quaſi ſua propria gravitate. Interim ſi in ipſo canali, ſeu in tubis qui illum componunt, retineat quoque gravitatem ſuam, ſive totalem, ſive ſaltem partem, ſicuti accideret ſi tubi non eſſent horizontales, ſed vel verticales, vel diverſimode inclinati ad horizontem; id nullam prorſus habet difficultatem: poteſt enim aquæ propria gravitas ex quolibet tubo per §. II, transferri in vas vel in tubum primum, adeo ut aqua in reliquis tubis conſiderari poſſit tanquam deſtituta gravitate; ſed translatæ gravitationes, una cum pondere aquæ in vaſe vel tubo primo junctim ſumptæ, ſpectari queant pro eo quod vocavimus p, ſeu vim motricem fundamentalem, a qua fluxus totius maſſæ aqueæ generatur. Ut ſcilicet ſi canalis EGBL (*Fig.* 5) conſtaret tribus tubis diverſæ amplitudinis AD, GC, BL, quorum primus AD haberet amplitudinem AE vel GD, alter GC, amplitudinem GF vel BK, tertius BL amplitudinem BK vel ML: primus vero eſſet verticalis, ſecundus faceret cum horizonte angulum GBH, tertius angulum BMO: Sint amplitudines $AE = h$, $GF = m$, $BK = n$; vis gravitatis ſeu acceleratrix naturalis $= g$, & vis motrix in tubo AD aqua pleno $= gh \times AG$. Item $GB : GH = g : \frac{g \times GH}{GB} =$ vi acceleratrici liquoris in tubo GC. Item $BM : BO = g : \frac{g \times BO}{BM}$ $=$ vi acceleratrici aquæ in tubo BL. Hinc $\frac{g \times GH}{GB} \times m \times GB$, ſeu $gm \times GH$ dabit vim motricem aquæ tubi ſecundi, ſimiliter $gn \times BO$ dat vim motricem aquæ in tubo tertio. Sed transferendæ jam ſunt vires motrices ex tubis obliquis GC & BL in verticalem, faciendo $m : h = gm \times GH : gh \times GH$, & $n : h = gn \times BO : gh \times BO$. Hunc itaque in modum, conſiderari poteſt aqua univerſa in tubis tanquam carens gravitate, ſed ejus loco preſſa prima columna AD vi motrice expanſa uniformiter

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 5.

per


XXIII
N°. CLXXXIV
Fig. 2.
Fig. 1.
N°. CLXXXVI
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.

per ſuperficiem AE, quæ vis eſſet $= gh(AG+GH+BO)$ $=$ [ob $AG+GH+BO =$ toti altitudini verticali canalis, quæ ſit A] $gh \times A = p$. Atque ita reduximus hunc caſum alioſque ſimiles ad Methodum noſtram generalem.

Nota; ſi unus pluresve ex tubis oblique ſurſum dirigatur; erit, pro eo aut pro iis, vis motrix translata in tubum primum negativa, eritque ſumenda pro *A* exceſſus quo affirmativarum ſumma ſuperat ſummam negativarum, aut viciſſim. Uno verbo, *A* erit exceſſus vel defectus quo ſuperficies aquæ in primo tubo altior eſt humiliorve ſupra horizontalem, quam eſt ſuperficies aquæ in tubo ultimo. Hoc inſervit determinationi legis ſecundum quam liquores oſcillantur in tubis recurvis qualibuſcunque. Huc etiam refer Problema ſequens a Filio mihi propoſitum, ante ſex ſeptemve annos, ſed paulo generalius conceptum.

XXIV.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

ABCD eſt vas aqua plenum uſque ad EF; GI eſt tubus cylindricus, cujus pars KI aqua pariter plena eſt: Obducto pollice ſuper orificium GO, tubus immergitur aquæ in vaſe contentæ, ſed ita tantum, ut pars tubi MI, major quam KI, intra aquam externam penetret uſque ad MN: Remoto nunc pollice, aſcendet [ob prævalentem preſſionem aquæ externæ] ſuperficies KL, atque ab impetu concepto, pertinget ſupra ſuperficiem EF uſque ad PQ. Quæritur altitudo MP vel NQ, quouſque nempe aqua in tubo aſcendere valet? TAB. XC. Fig. 6.

SOLUTIO.

Dicatur pars tubi immerſa $HM = a$, pars ejus HK primitus aqua plena $= b$ minor quam a, amplitudo vaſis $EF = h$, amplitudo tubi GO, vel $HI = m$. Jam vero aqua tubum circumdans, & deorſum nitens ſuo pondere, per orificium apertum HI ingredi & aſcendere conatur, propellendo partem aquæ HL ſuperincumbentem. Actionem iſtam, atque effectum hoc

 modo

modo concipio. Sit ad orificium HI adaptatus alius tubus deorſim ſpectans, amplitudinis vaſis EF $= b$, & altitudinis HM $= a$. Sit hic tubus plenus aqua, ſed tali aqua, quæ levitaret, hoc eſt, quæ ſurſum niteretur, & quidem tanta vi præciſe quanta deorſum gravitat aqua [cujus loco illa in tubo per mentis fictionem ſubſtituitur] in vaſe altitudinis MH: proinde erit vis motrix aquæ in hoc fictitio tubo ſurſum tendentis $= gba$; & ſic, hujus reſpectu, erit vis motrix in tubo HO aquæ HL negativa $= gmb$, quæ tranſlata in tubum fictitium dat gbb, quæ utpote contraria ipſi gba, ab hac ſubducenda eſt, & relinquet $gba - gbb$, ſeu $gb(a - b)$ pro vi motrice quam vocavimus p; cui igitur æquandæ ſunt vires motrices, quæ a fluxu generantur per gurgitem formandum ad ingreſſum HI, per tubum HO fluendo, & per tubum fictitium aſcendendo. Hinc, ſi x vocetur ſpatium ab aqua intra tubum HO percurſum, incipiendo a KL, adeoque ſpatium quod ſuperficies aquæ in tubo fictitio percurrit aſcendendo $= \frac{m}{b} x$; ad imitationem ratiocinii §. XIII, habebimus vim acceleratricem in tubo HO $= \frac{vdv}{dx}$, quæ, multiplicata per maſſam aquæ ſurſum pellendæ $mb + mx$, dat vim motricem in hoc tubo $= (mb + mx)\frac{vdv}{dx}$, transferendam in tubum fictitium, ut inde habeamus vim motricem æquipollentem $= (bb + bx)\frac{vdv}{dx}$. Et cum præterea in tubo fictitio [in quo aqua aſcendit velocitate $\frac{m}{b} v$ per ſpatium $\frac{m}{b} x$] vis motrix propria, non amplius transferenda, fit $= (ba - mx)\frac{mvdv}{bdx}$, quibus ergo binis viribus, addita porro ea quæ ad formandum gurgitem requiritur, obtinebimus vim motricem totalem $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx)\frac{vdv}{dx} + (ba - mx)\frac{mvdv}{bdx}$. Verum quia hic p eſt $= gb(a - \frac{m}{b} x - b - x)$ ſeu $g(ba - bb - mx - bx)$, reſultabit

reſultabit æquatio pro determinanda velocitate v, nempe hæc $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx + ma - \frac{mm}{b} x) \frac{vdv}{dx} = g(ba - bb - mx - bx)$; qua reducta, ſcriptoque gz pro $\frac{1}{2} vv$, fiet $(bb - mm) zdx + (bbb + bbx + bma - mmx) dz = (bba - bbb - bmx - bbx) dx$, quæ per *Lemma* §. XIV eſt integrabilis. Si vas AC, vel tubus fictitius, eſt amplitudinis per quam magnæ, [qui Problematis tacitus eſt ſenſus] emergit æquatio multo ſimplicior [neglectis nempe terminis in quibus m reperitur, cæteriſque per bb diviſis] ſcilicet hæc $zdx + (b + x) dz = (a - b) dx - x dx$; quæ integrata dat $(b + x) z = (a - b) x - \frac{1}{2} xx$, unde ſi $z = 0$, hoc eſt, ſi ſuperficies KL ceſſat aſcendere, id quod fit, quando ad maximam, quouſque aſcendere poteſt, altitudinem PQ pervenit; oportet ut tunc etiam $(a - b) x - \frac{1}{2} xx$ ſit $= 0$, quocirca $a - b = \frac{1}{2} x$, ſeu $x = 2a - 2b$; ergo KP = 2KM.

X X V.

Idem Problema ſolvi poteſt facilius, ſi conſideretur tanquam caſus §. XIII. Concipiendo ſcilicet in *Fig.* 2 vas AF aqua plenum ab initio fluxus habere altitudinem $= a =$ MH in *Fig.* 6, & tubum FC, qui in *Fig.* 2 eſt horizontalis, jam eſſe verticaliter erectum, atque indefinite continuatum, in quo pars infima longitudinis $b =$ HK, in *Fig.* 6, ſit ab initio aqua plena. Jam ergo, ſi a prævalente preſſione columnæ aqueæ in vaſe, aqua in tubo ſupra b aſcendit per ſpatium $= x$, & proin in vaſe deſcendit per ſpatium $\frac{m}{b} x$, habebimus vim motricem in vaſe oriundam a pondere ſuperſtitis aquæ $= g(ba - mx)$, ac vim motricem in tubo verticali, priori oppoſitam, a pondere totius aquæ in tubo exiſtentis venientem $= g(mb + mx)$, quæ translata in vas dat $g(bb + bx)$, a priori $g(ba - mx)$ ſubtrahendum, & ita relinquetur $p = g(ba - bb - bx - mx)$, cui æquari debet ſumma trium virium motricium a motu generandarum per gurgitem, per tubum & per vas, ut inveni-

TAB. LXXXIX. N°. CLXXXVI. *Fig.* 2. TAB. XC. *Fig.* 6.

mus §. XIII; quo facto, hæc ſuppeditatur æquatio $\frac{bb - mm}{2b} vv + \frac{(bbvdv + bxvdv)}{dx} + \frac{mvdv}{bdx}(ba - mx) = p = g(ba - bb - bx - mx)$; quæ, conjunctis conjungendis, hanc habebit formam $\frac{bb - mm}{2b} vv + (bb + bx + ma - \frac{mmx}{b}) \frac{vdv}{dx}, = g(ba - bb - bx - mx)$, prorſus eandem quam modo ſupra invenimus.

X X V I.

Ex Theoria noſtra hucuſque expoſitâ, reddi poteſt ratio phyſica [quam nec Newtonus, nec quiſquam alius recte dedit, ex principiis nempe pure dynamicis] cur ſcilicet corpus cylindricum ſolidum, quod uniformiter movetur, baſi ſua antrorſum verſa, in fluido continuo infinito ejuſdem cum corpore denſitatis, offendat reſiſtentiam æqualem ponderi corporis cylindrici; poſito nimirum, velocitatem corporis eſſe æqualem illi quam grave, libere cadendo, ex altitudine æquali lateri cylindri poſſet acquirere. Ex pluribus, quæ mihi ſunt, demonſtrationibus, hanc dare lubet Theoriæ noſtræ Hydraulicæ in hoc ſcripto ſtabilitæ innixam.

TAB. XC. *Fig.* 7. Sit (Fig. 7) cylindrus RMNS, qui moveatur ſecundum directionem lateris MN, in fluido ſtagnante, æque denſo, continuo & infinito. Dicatur velocitas cylindri $= v$, latus MN $= a$, baſis ſeu amplitudo NS $= b$. Fingamus loco cylindri ſolidi eſſe tubum MS eadem materia fluida plenum, & per hunc tubum quieſcentem [ubi præter figuram nihil aliud conſidero] fluere, continua & æquabili velocitate v, integrum cylindrum fluidum, ita ut tubus ſemper plenus maneat, & quantum per NS effluit, tantundem per MR eadem promptitudine reſarciatur per novum affluxum; attendenti fit ſtatim manifeſtum, cylindrum hunc fluidum, in effluxu per NS, eandem prorſus offendere vim reſiſtentem, ab allapſu ad fluidum ſtagnans externum & motui oppoſitum, quam offenderet ipſe cylindrus ſolidus; quia cylindrus fluidus, dum movetur per tubum, haberi poteſt

poteſt pro ſolido, cæteræque omnes circumſtantiæ ſunt pares. Videndum ergo eſt ſolum modo, quanta ſit reſiſtentia quam patitur fluidum egrediens in ipſo egreſſus momento. Verum evidens eſt, hanc reſiſtentiam oriri a gurgite TNSV, qui formatur pone orificium tubi NS; cujus gurgitis figura hæc eſſe debet, ut, in diſtantia quantumvis parva, habeat aſymptoton FG perpendicularem ad directionem axis tubi; propterea quoniam, ob decreſcentem promptiſſime & omnino evaneſcentem motum fluidi egreſſi, amplitudines gurgitis viciſſim accreſcere, ac breviſſimo tempore veluti in infinitum dilatari debent: ſuppono enim fluidum ex tubo egrediens non eſſe permiſcibile cum altero extra ſtagnante. Hinc per ea quæ §. IX demonſtrata ſunt, & quia ultima velocitas in gurgite eſt $= v$; erit vis per gurgitem $= \frac{1}{2} hvv$: adeoque, ob conſtantem velocitatem in tubo, erit per *Coroll.* 2 §. IX, $\frac{1}{2} hvv = p = gha$, hoc eſt $\frac{1}{2} vv = ga$; hinc ſcribendo gz pro $\frac{1}{2} vv$, erit $z = a$. Oportet ergo velocitatem requiſitam fluidi in tubo, ad id ut fiat reſiſtentia æqualis ponderi cylindrici, eam eſſe debere, quam acquireret grave libere cadens ex altitudine $= a$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Ex demonſtrata hac fundamentali proprietate [antea nondum ſatis accurate ſtabilita] ſequuntur ultro omnia, quæ de reſiſtentiis fluidorum continuorum & non elaſticorum vulgo traduntur: Scilicet reſiſtentiæ, in hujuſmodi fluidis, perpendiculariter in plana oppoſita corporum exercitæ, ſunt in ratione compoſita ex duplicata velocitatis relativæ & ſimplici denſitatis fluidi. Ex hoc denique reliqua deducuntur.

XXVII.

De preſſione fluidi in fundum vaſis cylindrici (ſine annexo tubo) per foramen effluentis.

Eſto [Fig. 8) vas cylindricum AF fluido conſtanter plenum, cujus amplitudo $AE = b$, longitudo AG vel $EF = a$, amplitudo TAB. XC. *Fig.* 8.

plitudo foraminis GB $= m$. Habeat fluidum in egreſſu, poſtquam aliquandiu jam effluxit, velocitatem $= v$, ideoque in ipſo vaſe velocitatem $= \frac{m}{h} v$. Sit GL longitudo cylindri cujus baſis m, qui cylindrus deſignet quantitatem fluidi jam egreſſi $= x$. Sit nunc porro velocitas poſt futura $= u$, & longitudo prædicti cylindri fluidi ulterius egreſſuri $= y$; adeoque longitudo totalis tam egreſſi quam egreſſuri $= x + y$. Concipiamus autem fluidum carere omni gravitate, ac proin nullam aliam habere vim premendi fundum, quam eam quæ a motu pendet: Hæc vis offendit reſiſtentiam æqualem ab oppoſitione fundi, ob æqualitatem inter actionem & reactionem. Reſiſtentia vero invenitur, ſi more ſolito quæratur vis retardatrix, quæ velocitatem columnæ fluidi imminuit, illaque multiplicata per maſſam columnæ, id eſt, per ha, dabit reſiſtentiam vel preſſionem in fundum. Rem ita perago: Æquatio §. XI expoſita $\frac{hh - mm}{2h} \cdot vv + \frac{bbvdv}{dx} + \frac{mavdv}{dx} = p$, in præſenti caſu [ubi longitudo tubi, utpote abſentis, $b = 0$, & pondus columnæ fluidi in vaſe $p = 0$] mutatur in hanc æquationem particularem $\frac{hh - mm}{2h} vv + \frac{mavdv}{dx} = 0$; & ponendo u pro v in hanc ſimilem $\frac{hh - mm}{2h} uu + \frac{maudu}{dx} = 0$.

XXVIII.

Per reductionem, & ſcribendo dy pro dx [nunc enim x eſt conſtans, dum $x + y$ eſt longitudo indeterminata & variabilis cylindri fluidi egredientis) provenit æquatio ſub hac forma $\frac{hh - mm}{2h} dy + \frac{madu}{u} = 0$; atque integrando $\frac{hh - mm}{2h} (x + y) + malu = malv + \frac{hh - mm}{2h} x$. Hoc ita ſcribo adjiciendo duos poſtremos terminos conſtantes, rectificationis gratia, eum in finem, ut evaneſcente y & incipiente u ab v ipſa

ipſa æquatio fiat identica. Habebitur itaque $mal\,(\frac{u}{v}) = -(\frac{bb-mm}{2b})y$; unde tranſcundo ad numeros, & ponendo $1 = lf$, oritur $uu = vvf^{-(bb-mm)y:bma}$.

XXIX.

Differentiando probe inventam hanc æquationem [ſumpto nimirum v pro conſtante,] habebitur $udu = -vvdy\,(\frac{bb-mm}{2bma}) : f^{(bb-mm)y:bma}$. Eſt autem in vaſe vis acceleratrix negativa, hoc eſt, abit illa in vim retardatricem $-\frac{mudu}{bdy}$; quæ itaque erit $= vv\,(\frac{bb-mm}{2bba}) : f^{(bb-mm)y:bma}$.

XXX.

Hæc vis, quæ nobis uſui eſt in primo tantum momento poſt abolitionem vel ceſſationem ſuppoſitam gravitatis quam antea columna fluidi in vaſe verticaliter erecto habebat, erit utique $y = 0$, & $vv = 2gz$; adeoque vis illa inventa erit $= gz\,(\frac{bb-mm}{bba})$, vid. Art. XI, ubi $z = x\,(\frac{bba}{bb-mm}) \times (1 - 1 : f^{(bb-mm)x:bma})$, ac proinde multiplicando per maſſam fluidi ba, habetur reſiſtentia vel preſſio in fundum $= gba\,(1 - 1 : f^{(bb-mm)x:bma})$ a ſolo motu fluidi oriunda; cui ſi prætere addatur pondus columnæ fluidi gba, quod in ſitu verticali conſtanter agit in fundum, ſeu moveatur fluidum ſeu quieſcat, prodibit preſſio totalis $= gba + gba\,(1 - 1 : f^{(bb-mm)x:bma})$.

COROLLARIUM.

Si $x = \infty$, erit preſſio totalis $= gba + gba : f^{\infty} = 2gba$. Eſt enim $f^{\circ} = 1$. Si vero $x = 0$, preſſio fundi erit $= gba$

$+gha\,(1 - 1) = gha$; quod vel hinc quoque patet verum eſſe, quia ab initio fluxus, ſolum pondus cylindri fluidi agit in fundum, poſtea, creſcente x, creſcit etiam preſſio; ita tamen ut nunquam attingat $2gha$, nedum excedat; tametſi eo appropinquet data quavis quantitate propius.

S c h o l i u m.

Ne quis autem credat, ponderoſum liquorem in vaſe aliter forſan premere fundum, cum ipſe movetur, quam cum quieſcit: non obſtante quod contrarium facile pateat attendenti ad naturam virium immaterialium, ut eſt gravitatis cauſa extra corpus conſiderata, quæ vires agunt in inſtanti per totam maſſam animandam, adeoque eodem modo agunt, eandemque preſſionem exercent in obſtaculum, ac ſi liquor gravis ei incumbens quieſceret. Probabo tamen per calculum rei veritatem in noſtro caſu. Statim utique liquet, liquorem gravem deſcendendo in vaſe accelerari; debet autem ejus vis motrix, quantacunque illa ſit, duas habere partes, quarum una deſtinatur ad vim retardatricem a fundo oppoſitam contra ponderandam, altera vero pars reſidua impenditur in accelerationem deſcenſus actualis. Hæc vero poſterior illa ipſa eſt, quæ habetur ex æquatione §. XI petenda, nempe $z = \frac{bha}{bb - mm} \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x : bma})$, quam differentiando, & per g multiplicando, habebimus $gdz = vdv = \frac{b}{m}\, gdx : f^{(bb - mm)x : bma}$; idcirco vis acceleratrix reſidua in vaſe, ſeu $\frac{mvdv}{bdx} = g : f^{(bb - mm)x : bma}$; cui ſi addatur vis quam deſtruit retardatrix ſupra inventa $g(1 - 1 : f^{(bb - mm)x : bma})$, faciunt ſimul vim acceleratricem $= g$, ideoque paſſionem a pondere oriundam $= gha$, hoc eſt $=$ ipſi ponderi. *Q. E. D.*

Atque ita procedendum erit in reliquis caſibus, ubi unus pluresve tubi adaptati ſunt vaſi, ut ſcilicet, ante omnia, quæratur vis retardatrix ad fundum alicujus ex tubis datis, ſupponendo fluidum

dum ſubito amittere ſuam gravitatem, atque tum vi retardatrici inventæ addatur preſſio a ſolo pondere fluidi proveniens, [conſiderando illud tanquam in quiete conſtitutum & ſtagnans] atque propagata, vel immediate ad primum fundum, vel mediate per præcedentes tubos, ad quodcunque cupimus fundum.

A P P E N D I X.

Adumbratio calculi inſtituendi, pro determinandis ſingulari modo velocitatibus aquæ per plures tubos ex uno in alterum fluentis, acſi ſeorſim per ſingulos ſolitarios effluerent; atque hinc inveniendis preſſionibus in fundum ſingulorum exercitis.

In anteceſſum monere oportet, nos hic ſupponere canalem compoſitum ex variis tubis ad ſe invicem adaptatis, qualemcunque habentibus ſitum, verticalem, horizontalem, vel inclinatum. Supponimus porro, canalem aquæ conſtanter plenum eſſe, fluxumque perveniſſe ad æquabilitatem; dum tantum liquoris effluit ex quolibet tubo, quantum neceſſe eſt ad ſuppeditandum tubo proxime inferiori, ut adeo unuſquiſque conſtanter plenus eſſe, atque ſinguli ita conſiderari queant, ac ſi eſſent ſolitarii & ſeorſim poſiti.

Sit longitudo tubi primi & ſupremi $= a$, ſecundi proxime inferioris $= b$, tertii $= c$, &c. amplitudo primi $= h$, ſecundi $= m$, tertii $= n$, quarti $= q$, &c. foramen tubi primi $=$ amplitudini tubi ſecundi $= m$, foramen ſecundi $= n$, foramen tertii $= q$, &c. Gravitas naturalis $= g$, gravitas naturalis in diverſis directionibus obliquis $= \gamma', \gamma'', \gamma'''$, &c. Sit vero gravitas, ex actione mutua in tubis adaptatis oriunda, pro vaſe ſeu tubo primo $= g'$, pro ſecundo $= g''$, pro tertio $= g'''$, &c.; Longitudo cylindri aquei egreſſi per foramen primum $= x'$, ea per ſecundum $= x''$, per tertium $= x'''$, &c. altitudo unde grave naturale delapſum acquirit velocitatem aquæ egredientis per

foramen primum $= z'$, ea quæ per ſecundum $= z''$, per tertium $= z'''$, &c.

His itaque poſitis, & reliquis ut ſunt in Scripto hydraulico; habetur utique pro tubis ad ſe invicem adaptatis per translationem virium, & quidem pro canali duorum tuborum $gha + \gamma' bb = g'ha + g''bb$, vel $ga + \gamma' b = g'a + g''b$; pro canali trium tuborum $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$. Has æquationes voco fundamentales.

Porro clarum eſt haberi $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, &c : Item $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$, &c : Habentur autem per §. XI, æquationes ſequentes, pro tubis ſolitariis verticaliter erectis.

Pro tubo primo, $g(bb - mm)z'dx' + ghmadz' = g'bbadx'$

. . . . ſecundo, $g(mm - nn)z''dx'' + gmnbdz'' = g''mmbdx''$

. . . . tertio, $g(nn - qq)z'''dx''' + gnqcdz''' = g'''nncdx'''$.

& ita deinceps.

Nota ſi quis ex tubis eſſet horizontalis, in æquatione fundamentali evaneſceret γ ad ipſum pertinens, ſic ex. gr. ſi tres eſſent tubi, quorum primus tantum verticalis, ſed reliqui duo horizontales, foret æquatio fundamentalis hæc, $ga = g'a + g''b + g'''c$, ſin vero omnes tres eſſent verticales, hæc haberetur fundamentalis $g(a + b + c) = g'a + g''b + g'''c$. Quod nunc in hac inveſtigatione palmarium eſt, oportet definire vires gravitatum g', g'', g''', &c. ex mutua actione gravitatis naturalis reſultantium, unde poſtea tam velocitates, quam preſſiones in fundo tuborum innoteſcent. Hoc autem ita perago. Ad imitationem operationis adhibitæ in §. XI, invenietur pro ſingulis tubis ut ſequitur.

Pro tubo primo $z' = \frac{g'}{g} \left(\frac{bba}{bb - mm} \right) \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma})$

Pro tubo ſecundo $z'' = \frac{g''}{g} \left(\frac{mmb}{mm - nn} \right) \times (1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$

Pro tubo tertio $z''' = \frac{g'''}{g} \left(\frac{nnc}{nn - qq} \right) \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$

Atque ſic porro.

Quo-

Quoniam itaque z', z'', z''', ut &, x', x'', x''' per ſe invicem dantur, eſt enim $z' = \frac{nn}{mm} z'' = \frac{qq}{mm} z'''$, atque $x' = \frac{n}{m} x'' = \frac{q}{m} x'''$; ſubſtituantur valores ſingulorum z & x per unum expreſſos, & habebuntur tot æquationes, una pauciores, quot ſunt tubi, vel quot ſpecies gravitatis g', g'', g''', &c. nempe ex. gr. pro tribus, ſervato z' ad quod reliqua z'', z''' ſunt reducenda, ut & x'', x''' ad ſervatum x': habebuntur hæ duæ æquationes: z' vel $\frac{g'}{g}\left(\frac{bba}{bb - mm}\right) \times \left(1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma}\right) = \frac{nn}{mm} z''$ vel $\frac{nng''}{mmg}\left(\frac{mmb}{mm - nn}\right) \times \left(1 - 1 : f^{\frac{mm - nn}{mnb} \times \frac{n}{m} x'}\right)$, idemque illud primum etiam $= \frac{qqg'''}{mmg}\left(\frac{nnc}{nn - qq}\right) \times \left(1 - 1 : f^{\frac{nn - qq}{nqc} \times \frac{q}{m} x'}\right)$. Sed cum tres ſint quærendæ gravitatis ſpecies g', g'', g''', alia adhuc requiritur æquatio ad determinationem Problematis. Hæc autem peti debet ex æquatione fundamentali $ga + \gamma' b + \gamma'' c = g'a + g''b + g'''c$, aut [ſiquidem duo tubi ſupponuntur horizontales] ex hac tantum $ga = g'a + g''b + g'''c$, evaneſcunt enim γ', γ''.

Faciamus applicationem, brevitatis gratia, ad caſum ſimpliciſſimum, duorum tuborum aqua conſtanter plenorum, quorum primus ſit verticalis, alter horizontalis; ponamuſque fluxum perveniſſe ad uniformitatem, hoc eſt, x', x'', &c. eſſe $= \infty$. Prodibit una æquatio ex z' petita $g'\left(\frac{bba}{bb - mm}\right) = \frac{nng''}{mm}\left(\frac{mmb}{mm - nn}\right)$, altera vero ex fundamentali $ga = g'a + g''b$; ex quibus rite procedendo, elicitur $g' = \frac{gnn(bb - mm)}{mn(bb - nn)}$ & $g'' = \frac{gbba(mm - nn)}{mnb(bb - nn)}$.

Hinc omnia reliqua derivantur, nempe $z' = \frac{bbnna}{mm(bb - nn)}$ & $z'' = \frac{bba}{bb - nn}$, prorſus conſentanea iis quæ ſupra demonſtrata dedimus. Item preſſiones in fundum cujuſlibet tubi facillime eruuntur; quia enim ſinguli tubi conſiderari poſſunt tanquam eſſent ſolitarii, adhiberi debet formula, quam invenimus

 ſupra

ſupra pro tubo primo & unico, ſcribendo tantum litteras quæ cuilibet alii tubo, tanquam unico ſeu ſolitario conſiderato, conveniunt. Cum itaque pro illo unico inventa ſit preſſio totalis $= gha + gha(1 - 1 : f^{(bb - mm)x : bma})$, ſcribendum hic erit pro tubo primo, preſſio totalis $= g'ha + gha \times (1 - 1 : f^{(bb - mm)x' : bma})$; pro ſecundo $= g''mb + gmb(1 - 1 : f^{(mm - nn)x'' : mnb})$; pro tertio $= g'''nc + gnc \times (1 - 1 : f^{(nn - qq)x''' : nqc})$, atque ſubſtitutis valoribus ipſarum g', g'', g''', vel quia applicationem facimus ad duos tantum tubos, & quidem ubi $x = \infty$, nonniſi valores ipſarum g' & g'' ſubſtitui debent; qui ſunt $g' = gnn(bb - mm) : mm(bb - nn)$ & $g'' = gbba(mm - nn) : mmb(bb - nn)$, habebitur preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn(bb - mm)}{mm(bb - nn)}$, & preſſio ſecunda $= \frac{2gbba}{m} \times \frac{mm - nn}{bb - nn}$. Si præterea $b = \infty$, ſed m & $n =$ finito, erit preſſio prima $= 2gba \times \frac{nn}{mm} = \infty$, ut fieri par eſt, ſed preſſio ſecunda $= \frac{2ga}{m} \times (mm - nn) =$ finito.

Hac methodo probe obſervata, invenientur pro 5 tubis gravitates g', g'', g''', g^{IV}, g^{V}, ut ſequitur

$$
\begin{aligned}
g' &= gbbssa(bb - mm) : bbmma(bb - ss) \\
g'' &= gbbssa(mm - nn) : mmnnb(bb - ss) \\
g''' &= gbbssa(nn - qq) : nnqqc(bb - ss) \\
g^{IV} &= gbbssa(qq - rr) : qqrrd(bb - ss) \\
g^{V} &= gbbssa(rr - ss) : rrsse(bb - ss)
\end{aligned}
$$

Ex hoc laterculo, plus ſatis elucet lex progreſſionis pro quocunque numero tuborum. Adeoque in canali conoidico truncato
TAB. XC. *Fig.* 9. [*Fig.* 9] FB, vaſi cylindrico AF adaptato, qui canalis conſideratur tanquam conflatus ex innumeris tubis infinite parvæ longitudinis, invenietur, pro qualibet amplitudine NO, ſpecies gravitatis,

vitatis, qua ſtratum aquæ infinite parvæ craſſitiei animatur, quando ad æquabilem fluxum pervenerit: dicendo enim amplitudinem NO $= y$, craſſitiem ſtrati aquei $= dx$, reliquaſque litteras adhibendo, quas hactenus uſurpavimus, erit gravitas animans hoc ſtratum $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2y\,dy}{y^4 dx\,(bb - \omega\omega)} = \frac{gbb\omega\omega a \times 2dy}{y^3 dx\,(bb - \omega\omega)}$. Proin pondus ipſum hujus ſtrati, ſeu preſſio qua urgetur, prodibit ſi multiplicatur per quantitatem materiæ $y\,dx$, erit igitur hæc preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2dy}{yy\,(bb - \omega\omega)}$. Huic autem addendæ ſunt preſſiones omnium ſtratorum ſequentium, ab O uſque ad extremum B, ſed per translationem ad locum O collectæ, ſicuti poſtulat methodus noſtra ab initio expoſita. Hunc in finem ponatur tantiſper y conſtans, & alia amplitudo variabilis RS $= t$, erit hujus ſtrati $t\,dx$ preſſio $= \frac{gbb\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(bb - \omega\omega)}$ quæ transferatur ad locum invariabilem NO, faciendo ut t ad y, ita $\frac{gbb\omega\omega a \times 2dt}{tt\,(bb - \omega\omega)}$ ad $\frac{gbb\omega\omega ay \times 2dt}{t^3\,(bb - \omega\omega)}$, cujus integrale debite correctum dat $\frac{gbb\omega\omega ay}{\omega\omega\,(bb - \omega\omega)} - \frac{gbb\omega\omega ay}{tt\,(bb - \omega\omega)}$; ubi nunc ponendo $t = y$, habetur $\frac{gbba\,(yy - \omega\omega)}{y\,(bb - \omega\omega)} =$ preſſioni totali, qua nimirum aqua in NO comprimitur. Ut igitur reperiatur z, altitudo cylindri aquei cujus baſis eſt y, & pondus æquale huic preſſioni, faciendum eſt $gyz = \frac{gbba\,(yy - \omega\omega)}{y\,(bb - \omega\omega)}$, unde $z = \frac{bba\,(yy - \omega\omega)}{yy\,(bb - \omega\omega)}$. Ad hanc itaque altitudinem NM, hærebit aqua in fiſtula in loco N inſerta. Notandum vero, canalem FPBC conſiderari tanquam habentem diametros amplitudinum maximæ FP & minimæ CB ſatis parvas reſpectu longitudinis PB, ut nimirum hoc modo tangens curvaturæ FNC, in quolibet puncto N, faciat angulum acutiſſimum cum horizontali PB, ne alias, ex alliſione aquæ inter movendum ad canalis latus nimis curvum FNC, oriatur nova vis preſſionis [quam hic tanquam accidentalem neglegimus] quæ priori ſuperveniens, augeret

geret altitudinem NM; quemadmodum id revera accidit, ſi canalis FB deſinit in laminam perforatam foramine amplitudinis ω, cui laminæ aqua perpendiculariter impingens augere poteſt compreſſionem in partibus foramini vicinis; in remotioribus augmentum illud minus fit ſenſibile, variatque prout poſtulat curvatura gurgitis, quam autem a peculiari qualitate aquæ, aliuſve liquoris transfluentis dependere exiſtimo, adeoque generaliter indeterminabilem.

DISSERTATIONIS HYDRAULICÆ

PARS SECUNDA,

Continens Methodum directam & univerſalem ſolvendi omnia Problemata Hydraulica, quæcunque de aquis per canales cujuſcunque figuræ fluentibus formari ac proponi poſſunt.

I.

CAnalis eſto qualiſcunque ſive, ſit rectus, ſive curvus, ſive ſit continuus, ſive compoſitus ex pluribus tubis cylindricis, ſive denique ſit verticalis, ſive pro parte horizontalis, ſive in partibus ſuis diverſis diverſimode inclinatus. Plenus ſit hic canalis aqua, aliove liquore gravi, homogeneo, & fluidiſſimo. Incipiat autem pergatque accelerando [quantum & quouſque poteſt] fluere, & ita quidem, ut canalis conſtanter plenus maneat, ſuccedente ſcilicet aliunde aqua nova, quæ elabentem ex imo orificio ſingulis momentis reſarciat, influendo per ſummum orificium, ea cum velocitate qua ſuprema ſuperficies ſubſideret, ſi influxus ſubito ceſſaret. Hæc conditio additur facilioris calculi gratia; valet enim methodus, ſi nihil novi liquoris aquei ſubintraret, ad omnimodam uſque vaſis canaliſve depletionem. Quæritur primo velocitas liquoris effluentis, pro data qualibet quantitate liquoris, jam egreſſi? Quæritur deinde quantum latera canalis in ſingulis locis a transfluente liquore premantur; vel,

quod

quod eodem recidit, ad quantam altitudinem verticalem, liquor ejuſdem generis cum transfluente ſuſpenſus hærere debeat in fiſtula in aliquo loco inſerta, & verticaliter erecta?

I I.

Detur itaque canalis (Fig. 10.) qualiſcunque ECce; recta verticalis AB, tanquam abſciſſarum axis conſiderata, ad quam ordinatim applicatæ AEe, PFf, TNn, BCc; quarum partes Ee, Ff, Nn, Cc, deſignent amplitudines ſeu ſectiones horizontales canalis. Concipiatur liquor in eo contentus, diviſus in ſtrata horizontalia infinite parvæ craſſitudinis FMmf, NLln, &c. quorum puncta intermedia, ſeu centra gravitatis G, H, V, I, &c. faciant lineam, ſive rectam, ſive curvam, GHVI, quam vocabo *lineam centricam* ſeu ſimpliciter *centricam*; quæ utique data erit, ob datas curvas EFC, efc, quæ ex Figura data canalis determinantur. TAB. XC. *Fig.* 10.

Sit amplitudo prima Ee $= h$, amplitudo ultima Cc $= \omega$, amplitudo aliqua intermedia Ff $= y$, alia intermedia Nn $= r$, craſſities ſingulorum ſtratorum PR vel TS $= dt$. Erunt ſtrata ipſa Fm $= y\,dt$, Nl $= r\,dt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID, tangens centricam in I, quæ dicatur x, $=$ longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipſius ID, cujus cylindri eſt baſis Cc, & qui contineat quantitatem liquoris jam egreſſi. Velocitas liquoris eo ipſo momento elabentis $= v$. Sit gravitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando jam elementa lineæ centricæ Hh, &c,: $= ds$, erunt gravitates, quibus animantur ſtrata in directionibus Hh, Vu, &c:, $= \frac{g\,dt}{ds}$, adeoque pondera, vel vites motrices ipſorum ſtratorum in iſtis directionibus $= \frac{gy\,dt^2}{ds}$, $\frac{gr\,dt^2}{ds}$ &c.; ipſæ vero vires motrices abſolutæ, ſecundum directionem verticalem $= gy\,dt$, $gr\,dt$, & ita porro.

III.

Transferendo has vires abſolutas (per Princip. Hydroſt. ut in Parte prima oſtenſum eſt) ad amplitudinem primam h; erunt illæ pro ſingulis $ghdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc eſt, per totam altitudinem AB [quæ dicatur $= a$] $gha =$ preſſioni totali ad Ee verticaliter applicandæ, & æquipollenti ſummæ virium motricium abſolutarum in ſtratis omnibus. Et hæc preſſio totalis gha, ad amplitudinem primam applicanda, eſt ea quæ mihi vocari ſolet p.

Sit jam tangens in I lineæ centricæ GHI ad ſuam ſubtangentem verticalem, ut α ad 1; & tangens in G ad ſuam ſubtangentem, ut ζ ad 1; tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad ſuam ſubtangentem, ut ds ad dt: Erit utique, per decompoſitionem motus, v ſeu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad ſuam ſubvelocitatem verticalem, etiam ut α ad 1, adeoque ſubvelocitas illa $= \frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u velocitatem actualem in H ſecundum Hh, erit ejus ſubvelocitas $= \frac{udt}{ds}$. Verum, ut inveniatur velocitas actualis u, notandum eſt, ſtratorum ſubvelocitates, eſſe in ratione reciproca ſuarum amplitudinum, ad id ut tranſmittant eodem tempuſculo elementari, quantitates æquales liquoris; faciendo itaque $y : \omega = \frac{v}{\alpha} : \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y} =$ ſubvelocitati ſtrati Fm. Faciendo nunc porro $dt : ds = \frac{v\omega}{\alpha y} : \frac{v\omega ds}{\alpha y dt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha y dt} = u$, ſeu velocitati actuali ſtrati Fm in directione Hh. Hinc velocitas actualis ſtrati primi, amplitudini Ee contigui, [ubi y ponitur h, & $ds : dt = \zeta : 1$] erit $= \frac{\zeta\omega v}{\alpha h}$.

Haud aliter ratiocinandum, pro inveniendo progreſſu actuali ſtrati Fm in directione Hh. Nam nominando dx progreſſum momentaneum ſtrati ultimi Cc in directione ID; erit ejus ſubpro-

progreſſus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$; ſunt autem hic etiam ſubprogreſſus ſtratorum in reciproca ratione amplitudinum: faciendo itaque $y : \omega = \frac{dx}{\alpha} : \frac{\omega dx}{\alpha y}$, erit $\frac{\omega dx}{\alpha y}$ = ſubprogreſſui ſtrati Fm. Proinde etiam faciendo $dt : ds = \frac{\omega dx}{\alpha y} : \frac{\omega dx ds}{\alpha y dt}$; erit $\frac{\omega dx ds}{\alpha y dt}$ = progreſſui actuali ſtrati Fm, in directione ſui motus Hh.

IV.

Exiſtente jam aqua in motu, ſtrata ejus diverſimode in ſe mutuo agunt urgendo & reſiſtendo, ac viribus quidem diverſis, pro diverſitate circumſtantiarum, tam loci quam celeritatis. Vocetur itaque tantiſper γ, vis acceleratrix indeterminata, quæ ex actione mutua oritur, & u velocitas acquiſita, quam aliquod ſtratum Fm habet in directione Hh; adeoque $\gamma ds = u du$, unde $\gamma = \frac{udu}{ds}$. Ducatur hoc in maſſam ſtrati $y dt$, & prodibit ejus vis motrix $\gamma y dt = \frac{yudu dt}{ds}$ in directione Hh. Ut autem ea habeatur in directione verticali a qua hæc produci queat, faciendum eſt $dt : ds = \frac{yudu dt}{ds} : yudu$, quæ erit vis motrix requiſita in directione verticali; quæ ergo tranſlata ad amplitudinem primam h, dat æquipollentem $hudu$. Integretur hæc ut habeatur $\frac{1}{2}huu$, quod per debitam correctionem, accommodandum eſt ad omnia ſtrata in toto canali ECce contenta, atque ſimul ſumpta. Proinde [ob velocitatem ſtrati ultimi $= v$, & primi $= \frac{G\omega v}{\alpha h}$] correctum integrale $= \frac{h}{2}\left(vv - \frac{GG\omega\omega}{\alpha\alpha hh} vv\right)$ ſeu $\frac{vv(\alpha\alpha hh - GG\omega\omega)}{2\alpha\alpha h}$ = vi verticali ad Ec applicandæ æquipollenti, a qua ſcilicet ſingula ſtrata vim ſuam particularem ſe mutuo urgendi obtinent, ad id tantum ut niſum ſuum con-

ſervent, eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat, non ſucceſſive, ſed in inſtanti indiviſibili, & a ſola figura canalis pendeat, poterit hæc vis ex tranſlatione orta, vocari *vis* vel *potentia ſtatica*, aut ſi magis arrideat, *potentia hydroſtatica*, utpote quæ in ſolo niſu conſiſtit tranſeundi ab uno ſtrato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem.

V.

Quærenda porro eſt vis altera, quæ naſcitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis. Hunc in finem, pono cujuſlibet ſtrati Fm progredientis vim acceleratricem actualem $= \gamma'$, erit [ob progreſſum actualem ultimi ſtrati Cc per ſpatiolum dx] progreſſus ſtrati Fm $= \frac{\omega\, dx\, dt}{\alpha y\, dt}$, adeoque $\frac{\gamma' \omega\, dx\, ds}{\alpha y\, dt} = u\, du$ $=$ [Art. III.] $\frac{\omega\, \omega v\, dv\, ds^2}{\alpha\, \alpha y y\, dt^2}$, unde $\gamma' = \frac{\omega v\, dv\, ds}{\alpha y\, dx\, dt}$, & vis motrix actualis in directione Hh ſtrati, ſeu $\gamma' y\, dt = \frac{\omega v\, dv\, ds}{\alpha\, dx}$, adeoque vis motrix verticalis, ex qua illa produci poteſt $= \frac{\omega v\, dv\, ds^2}{\alpha\, dx\, dt}$, quæ tranſlata ad primam amplitudinem b, dat æquipollentem $= \frac{b\, \omega v\, dv\, ds^2}{\alpha y\, dx\, dt}$; quod ut integretur per totam longitudinem axis AB reſpondentem toti canali, pro quolibet ſtrato, & pro qualibet acquiſita velocitate v, debent hic non tantum b & ω, ſed etiam $\frac{v\, dv}{\alpha\, dx}$, conſiderari tanquam conſtantes; & ita integrando, habebimus $\frac{b\, \omega v\, dv}{\alpha\, dx} \int \frac{ds^2}{y\, dt} =$ vi alteri, ex actuali accelerationis liquoris effluentis oriundæ, quam vocari liceat *vim hydraulicam*, ad diſtinctionem *vis hydroſtatica*, quæ in ſolo niſu vel preſſione in inſtanti exercita conſiſtit, idque ſingulis momentis, quomodocunque liquor moveatur.

V I.

V I.

Hæ duæ vires, *hydroſtatica* & *hydraulica*, componunt vim totalem, quæ nimirum generatur ab actione vis primitivæ p, quæ inventa eſt Art. III $= gha$. Æquando itaque hanc, cum aggregato illarum duarum Art. IV & V inventarum, obtinebimus æquationem generaliſſimam, pro determinatione velocitatis quacum liquor quovis momento effluit, quæ æquatio hæc eſt $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} + \frac{b\omega vdv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{yds} = gha$. Ubi notandum per $\int\frac{ds^2}{ydt}$ intelligi ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quæ continentur non tantum inter Cc & Ff, ſed omnino inter extremas ab una ad alteram omnes comprehendendo.

V I I.

Quod ſi lubeat exprimere æquationem per z, ſeu altitudinem unde corpus naturali gravitate g præditum delabendo acquirat velocitatem quæſitam v; ſcribendum tantum eſt, per principia dynamica, $2gz$ pro vv & gdz pro vdv; id quod dabit hanc æquationem $\frac{gz(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)}{\alpha\alpha b} + \frac{gb\omega dz}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt} = gha$, vel reductione peracta hanc $(\alpha\alpha hh - \zeta\zeta\omega\omega)zdx + \alpha bh\omega dz \times \int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha hhadx$, vel quia $\int\frac{ds^2}{ydt}$, ſumendum per totam axis longitudinem, ut conſtans, adeoque ut datum ſupponi poteſt, ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque æquatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha hh - \zeta\zeta\omega\omega)zdx + \alpha Mhh\omega dz = \alpha\alpha hhadx$. Ex reſolutione hujus æquationis, invenietur z in quantitatibus datis per x, & conſtantes M, a, h, ω, α, ζ.

COROLLARIUM I.

Exiſtente effluxus velocitate uniformi, ad quam ſenſibiliter per-

pervenitur citiſſime, & quaſi uno ictu oculi, ut in ſuo loco hujus ſcripti demonſtrabitur; evaneſcit dz: quo igitur neglecto, prodit æquatio algebraïca hæc $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)\, z = \alpha\alpha hha$, unde quæſita $z = \frac{\alpha\alpha hha}{\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega}$.

COROLLARIUM II.

Hinc duo vaſa vel duo canales, qualeſcunque habeant figuras, licet a ſe invicem diverſiſſimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, ut & amplitudines ſupremam & infimam, ſeu primam & ultimam, h & ω, in eadem ratione, ac præterea α & β utrobique ſibi proportionales; effluet aqua ex utroque canali, ſeu vaſe, velocitate æquali, poſtquam venerit utrobique ad uniformitatem.

COROLLARIUM III.

Si linea centrica GHI eſt linea recta, ſive ſit verticalis ſive obliqua, erit $\beta = \alpha$, & $ds : dt = \alpha : 1$; proinde $ds = \alpha\, dt$, & $\int \frac{ds^2}{y\,dt}$ ſeu $M = \alpha\alpha \int \frac{dt}{y}$, id quod æquationem generalem $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)\, z\,dx + \alpha M hh\omega\, dz = \alpha\alpha hha\, dx$ mutat in hanc $(hh - \omega\omega)\, z\,dx + \alpha hh\omega\, dz \int \frac{dt}{y} = hha\,dx$. Qualiſcunque autem ſit ſitus centricæ rectilineæ, ſive verticalis ſive obliquus, erit in caſu effluxus uniformis ſemper $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega}$.

COROLLARIUM IV.

Quod ſi manente figura canalis vel vaſis, ut & utraque ejus amplitudine ſumma & ima Ee, Cc; fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis & effluentis; poteſt illa mutatio, etſi fere ſit inſenſibilis, producere mutationem inſignem in velocitate; ut ex. gr. ſi in *Figura* 11, vaſi vel canali ECce adaptentur

tentur margines vel labra E m n e & C p q c, tantillæ altitudinis verticalis E m, c p, ut amplitudines m n, p q, maneant eædem cum prioribus E e, C c, ipſaque tota canalis altitudo ſenſibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura ſit velocitatis mutatio. Quoniam enim nunc aqua influit & effluit, non amplius oblique ſed verticaliter, ob directionem labrorum verticalem, quæ ideo etiam dat ſitum verticalem tangentibus extremis lineæ centricæ, facitque $\alpha = \beta = 1$; manifeſtum eſt æquationem generalem $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mhh_{\omega}dz = \alpha\alpha hhadx$, nunc ſubito aſſumere hanc faciem $(bb - \omega\omega)zdx + Mhh_{\omega}dz = hhadx$, atque pro velocitate uniformi fore $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; quod monere operæ prætium duxi, ne alioquin, ſi in experimentis capiendis ad minimas circumſtantias, quæ nullius eſſe momenti videntur, non ſatis accurate attenditur, & inde quod provenit cum noſtris minus recte quadrare falſo apparet, ne, inquam, theoria noſtra ſtatim erroris ſuſpecta habeatur. Sicuti accidit aliquando Cl. POLENO, Viro alias in experimentalibus induſtrio & circumſpecto, qui viſurus quas diverſas quantitates aquæ, dato tempore, emitterent diverſæ amplitudinis lumina, eidem vaſi aqua pleno admota, ſumpſerat ad hoc negotium varias laminas non admodum ſpiſſas, unamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertuſam, ut nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vaſis factam: contigit autem, ni fallor forte fortuna, ut cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit, & poſtea pluries de induſtria; ubi ſemper attonitus obſervavit unam eandemque illam laminam, per ſuum idem foramen, modo majorem, modo minorem aquæ copiam eodem tempore emiſiſſe, prout una vel altera ejus laminæ facies extrorſum ſpectaret: tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum obſervatum figuram foraminis, licet in tenui lamina inſculpti, non fuiſſe exacte cylindricam, ſed inſtar conuli truncati, baſin unam habentis tantillum ampliorem quam alteram: quod jam ſufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorſum hiante baſi ampliore forami-

TAB. XC. Fig. 11.

foraminis, aqua largius effluxerit quam in ſenſu contrario; idque duplicem ob cauſam; nam & craſſior fuit vena aquea exiliens, & major ejus velocitas, ceu patet ex formula noſtra $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ubi palam eſt, valorem hujus fractionis eſſe majorem, ſi major fuerit ω, reliquis b & a manentibus, & contra fore minorem, ſi ω minor fuerit.

COROLLARIUM V.

In caſu quo $\alpha b = \zeta\omega$, ſeu ubi $\alpha : \zeta = \omega : b$; habebitur $M\omega dz = \alpha a dx$, proinde $z = \frac{\alpha a x}{M\omega}$; unde liquet, creſcente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum creſcere; adeoque velocitatem nunquam ad uniformitatem convergere. Quod ſane apparet quoque ex ipſa formula *Coroll.* 1, eſt enim $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega}$ = [in hoc caſu] $\frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \alpha\alpha bb} = \frac{a}{0} = \infty$.

VIII.

SCHOLIUM I.

Notandum, in canalibus & tubis non admodum amplis & TAB. XC. ſufficienter longis, hoc communiter obſervari, ſicuti jam innui in *Fig.* 10. Præfatione*, quod ſtrata F m (Fig. 10) in fluxu conſtituta, ex ſitu horizontali ſe facile componunt ad ſitum perpendicularem lateribus, ſeu potius lineæ centricæ G H I; quod utique ex motu ſupremæ ſuperficiei E e [ſi nullus alius liquor ſuccedit] ut ex. gr. in tubis barometricis & aliis ejuſmodi ſiphonibus non ultra unam duaſve lineas in diametro habentibus, luculenter patet; ſive hoc fiat ob adhæſionem fluidi ad latera, quæ circumcirca in ambitu ſtratorum æquabilis eſſe debet, ut quam commodiſſime fluidum moveatur & ſine notabili frictione, ſive id contingat aliam ob cauſam phyſicam, hujus loci non eſt inquirere: ſufficit hoc loco inſinuare, hanc circumſtantiam nihil offi-

* pag. 396.

Digitized by Google

officere noſtræ Theoriæ. Nam quia, per legem generalem, centrum gravitatis corporum quacunque de cauſa in motum concitatorum, eodem modo eademque velocitate in ſua directione inchoata movetur, ac ſi univerſa eorum materia in ipſo centro gravitatis eſſet concentrata; poterit ſane materia cujuſlibet ſtrati Fm conſiderari tanquam congeſta in centro gravitatis H vel h. Cum igitur, in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quælibet eorum modica portio ſumi poſſit pro quaſi cylindrica vel priſmatica; evidens eſt unumquodque ſtratum Fm, leviſſimam ob cauſam, ſitum ſuum horizontalem Ff mutare poſſe in rs perpendicularem ad Hh, manente interim Hh ejuſdem longitudinis, & quantitate ſtrati novi rtos æquali ſtrato FMmf. Concipiamus igitur quo pacto ſingula reliquorum ſtratorum Nl [ſine ulla alia mutatione, ſive in velocitate, ſive in directione ſecundum Vu] ſe componere poſſint in ſitum perpendicularem ad latera canalis, ſeu potius ad lineam centricam. Quod ſi jam porro attendimus quid fieret, ſi obturaretur exitus Cc, ejuſque loco aperiretur in latere canalis foramen cd ejuſdem amplitudinis cum Cc; haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam cd ſub eadem obliquitate ad cd erumpere debere, ſub qua erumpebat per Cc, ejuſque adeo directionem bg fore horizontalem. Cum præterea apertura cd ponatur æqualis amplitudini Cc, & conatus erumpendi per Cc jam detorqueatur verſus dc [per vulgarem legem hydroſtaticam,] oportet ſane velocitatem aquæ per cd effluentis, eandem fore quam determinavimus pro Cc. Unde & hoc colligitur, ſi ad foramen cd adaptaretur novus canalis horizontalis, in quo nempe linea centrica horizontalis ſit, fore ut motus & velocitas aquæ per eum fluentis & effluentis eodem modo ſe habeat, ac ſe haberet, ſi idem ille novus canalis [clauſo cd] ad Cc adaptaretur ſecundum directionem ID, ſed in quo aqua fluens deſtituta ſupponi deberet propria ſua gravitate. Adeo ut ſtratorum pondera ad amplitudinem Ee translata hic etiam faciant eandem ſummam *gha*, æque ac ſi abeſſet novus canalis, ac proin in generali æquatione expreſſa [Art. VII],

$(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega) z dx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bb a dx$, nihil aliud mutandum ſit quam ut M, ſeu $\int \frac{ds^2}{y dt}$, nunc exprimat ſummam omnium $\frac{ds^2}{y dt}$, quæ in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero uniformis utrobique, tam in ſimplici quam in combinato canali, erit eadem ; [quia terminus, in quo reperitur M, in caſu uniformitatis evaneſcit ;] utpote ſemper ea quæ habetur per $z = \frac{\alpha\alpha bb a}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$.

I X.

De Preſſionibus quas ſuſtinent latera canalis a liquore transfluente.

Ut recte clareque percipiamus, in quo conſiſtat vis illa quæ exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor ; ſciendum eſt illam vim nihil aliud eſſe, quam quæ originem habet a vi compreſſionis, qua nimirum partes fluidi ſibi invicem contiguæ, ex. gr. EFfe & CFfc, una ad alteram adigitur, unde in ipſo contactu Ff per actionem & reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare ſoleo *immaterialem ;* quia quaſi extra partes ſe invicem prementes, inter utramque tamen intermedia reſidet, atque ad unam non magis pertinet quam alteram. Hujus vis proprium eſt urgere partem liquoris præcedentem *antrorſum*, ſeu ea verſus qua tendit, ſequentem vero *retrorſum* ſeu ea verſus unde venit ; facereque ut pars liquoris ſequens, quæ a viribus tranſlatis propellitur, atque pars liquoris præcedens, cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipſo contactu æqualitatem virium acceleratricium ; quemadmodum idem contingere dudum * monuimus in corporibus ſolidis, quæ diverſis viribus acceleratricibus ſeorſim animata, quando in ſe mutuo agere incipiunt, oritur in eorum contactu vis intermedia *immaterialis* ad utrumque corpus communi jure ſpectans, quæ ita

* Nis. CLXXVII, pag. 262, & CLXXIX, pag. 333, 340.

ita temperet utriuſque vim acceleratricem particularem, unam diminuendo, alteram augendo, ut inde in tota maſſa, combinata ex duobus iſtis corporibus, reſultet una communis vis acceleratrix.

X.

Id vero diſcriminis eſt in agendi modo, quod in corporibus ſolidis directe in ſe invicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorſum & retrorſum, inſtar elaſtri alicujus rectilinei quod inter utrumque corpus poſitum ſeſe expandere conatur: ſed in partibus fluidi in ſe mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens conſiderari debeat tanquam aura elaſtica, quæ, non tantum in partes oppoſitas, ſed in omnes plagas circumfuſas ſeſe exerit: ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipſa vi immateriali provenire preſſionem, de qua hic eſt quæſtio, quæ nempe exercetur in latera canalis, & quæ viciſſim ab hiſce coërceri debet, dum agit libere antrorſum & retrorſum in partes liquoris quibus interjacet.

X I.

Reſtat igitur ut, ſecundum datam hanc ideam de vi immateriali, ejus quantitatem vel menſuram determinemus. Sit illa ubilibet in F f quærenda, quam dicamus $= \pi$. Nunc ita procedo: Finge tantiſper partem canalis E F f e [durante fluxu] ſubito auferri, manente reliqua C F f c in ſtatu ſuo cum omnibus ſuis circumſtantiis, atque eodem momento ad amplitudinem F f apponi novam vim motricem ipſi π æqualem. Concipis utique hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri [ſaltem in primo temporis momento] perinde ac ſi integer manſiſſet canalis. Quare jam conſiderabo canalem reſiduum C F f c tanquam canalem integrum, cujus ſuprema ſeu prima amplitudo eſt y, ſeu F f, amplitudo alia intermedia N n variabilis $= r$, ſtratumque adjacens N l $= r\,dt$. Hinc ſi [Art. IV] pro b ſubſtitut y, habebo $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} =$ vi hydroſta- TAB. X C. Fig. 10.

 ticæ:

ticæ: quod enim in primo puncto G dicebatur ς, id in puncto H eſt $ds:dt$, ratio ſcilicet tangentis ad ſubtangentem, & [Art. V] $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ = vi hydraulicæ; ubi in integratione ſupponitur r continuari ab ω uſque ad y.

X I I.

Aggregatum harum duarum virium, hydroſtaticæ & hydraulicæ, æquari deberet vi primitivæ p, quæ hic eſſet [Art. III & VI] gyt, ſi nimirum hæc ſola ageret in liquorem in canali truncato contentum; ſed quia π conjunctim agit cum gyt, oportet ſane hanc inſtituere æquationem $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt} = gyt + \pi$. Ex qua ſtatim emergit valor quæſitus ipſius π: Tranſpoſito enim gyt, prodit $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx} \times \int\frac{ds^2}{rdt} - gyt = \pi$; ubi quoque monendum, in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabile r ſumi debere a B uſque ad P; unde pro qualibet aſſumpta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $= N$, eritque $\frac{vv(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{2\alpha\alpha y} + \frac{Ny\omega v dv}{\alpha dx} - gyt = \pi$. Quoniam igitur ex reſolutione æquationis generalis [Art. VII] habetur valor ipſius vv ſeu $2gz$, is in hac ſubſtitutus dabit valorem ipſius π in g, & quantitatibus mere linearibus; ſcilicet hunc $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha y} + \frac{gNy\omega dz}{\alpha dx} - gyt = \pi$.

X I I I.

Quod ſi nunc porro ſcire lubeat, ſi fiſtula aliqua, utrinque aperta, in loco quolibet f canali inſeratur, erigaturque ad ſitum verticalem, quouſque in illa liquor aſcendere debeat, ob hanc preſſionem π, quæ facit ut aſcendat: attendere convenit, quod π æquivalet ponderi alicujus cylindri ex liquore gravitate naturali

Digitized by Google

rali g animato confecti, qui pro baſi habet amplitudinem Ff ſeu y, & pro altitudine illam ipſam liquoris in fiſtula hærentis; unde hæc altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam ſuſpenſus hærebit liquor in fiſtula, invariabiliter quidem, poſtquam velocitas liquoris effluentis ad ſenſibilem uniformitatem pervenerit; ſed antequam hoc fiat [fit autem in momento quaſi] aſcendere perget liquor in fiſtula, donec acquiſiverit locum ſuum ſtabilem, quando nempe liquor effluens non amplius ſenſibiliter acceleratur.

X I V.

Accidit, in quibuſdam caſibus, ut valor ipſius π evadat negativus, quando ſcilicet in illo quantitates negativæ $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2}$ $- gyt$ prævalent affirmativis $\frac{1}{2}vvy + \frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$; aut jam exiſtente velocitate in ſua uniformitate, ita ut $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ majus eſt quam $\frac{1}{2}vvy$: id quod contingere poteſt, non tantum in illis caſibus ubi αy minus eſt quam $\frac{\omega ds}{dt}$, ſed etiam in illis ubi αy majus quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt ſat magnum ſit ut ejus exceſſus ſupra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}$ ſuperet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam eſt in ejuſmodi caſibus compreſſionem converti in relaxationem, qua fit, ut latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorſum premantur, ſed omnino introrſum [ſi laterum rigiditas non impediat] contrahantur. Unde ſequitur, per fiſtulam canali implantatam, ſed ex alto ad imum demiſſam verticaliter, ubi hiet in vaſculum liquore plenum, poſſe liquorem quaſi per ſuctionem ſurſum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

X V.

S c h o l i u m II.

Hactenus non attendimus ad cauſas quaſdam particulares & acceſſorias [non ſemper locum habentes] quæ alterare poſſunt, ſeu preſſiones, ſeu ſuctiones π noſtra methodo determinatas. Inter tales cauſas hæc præcipue occurrit, quæ facit ut aqua in motu conſtituta, offendens in via ſuperficiem immobilem, ei per allapſum imprimat vim, quæ vocatur *vis reſiſtentiæ fluidorum*, proportionalis utique partim quadrato velocitatis, partim quadrato ſinus obliquitatis incidentiæ, ut notum eſt. Eo ipſo itaque hæc vis fit inſenſibilis in canalibus anguſtioribus oblongis: in iis enim, ob FM fere parallelam ipſi hH, quæ eſt directio motus fluidi cum venit ad Ff, ſicuti in quolibet alio loco Nn, directio Vu fere parallela eſt ipſis NL, nl, ſinus incidentiæ pro nullo reputari poteſt. In canali ex tubis cylindricis conflato, ſinus ille prorſus nihil eſt, quia directio fluidi omnino eſt parallela lateribus cylindrorum, per totam canalis longitudinem. Alia inſuper cauſa acceſſoria, quæ turbare poſſet effectum a preſſione π oriundum, reperitur in canali valde incurvato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam [de qua alibi egimus], hæc vis centrifuga majorem redderet preſſionem π quam revera eſt, in parte convexa canalis, ſed minorem in parte concava ejuſdem. Quocirca, ſi cui volupe eſſet experimentum inſtituere ope fiſtulæ canali implantandæ; inſertio facienda eſſet neque in convexitate, neque in concavitate curvedinis, ſed a latere, ita ut fiſtula exeat ex canali perpendiculariter ad planum convexitatis & concavitatis, & deinde, ſi planum illud non ſit horizontale, ut fiſtula quantum opus inflectatur, donec ſitum verticalem obtineat.

XVI.

X V I.

Corollaria generalia circa velocitates & preſſiones.

In effluxu liquoris uniformi & æquabili, æquatio generalis [Art. VI] mutatur, ob $dv = 0$, in hanc $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} = gba$, ſeu $vv = \frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$. Unde hoc elegans Theorema deducitur: Si duo ſint vaſa vel canales, habentes æquales altitudines verticales, æqualeſque amplitudines tam ſupremas quam infimas, qualeſcunque de cætero figuras habeant canales, & quantumvis diſſimiles inter ſe, dummodo earum centricæ ita ſint comparatæ, ut ratio inter α & β in uno ſit eadem quæ eſt inter α & β in altero vaſe & canali: Dico ex utroque [ſubintellige jugiter pleno exiſtente] liquorem, poſtquam ad æquabilem effluxum pervenerit, effluxurum utrobique eadem velocitate. Quod ſane patet ex ipſo valore ipſius vv qui eſt $\frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$; utpote in quo amplitudines intermediæ y haud reperiuntur. Sint ex. gr. duo vaſa cujuſcunque figuræ ABCD, EFGH [*Fig.* 12], quorum lineæ centricæ ſint rectæ, & quidem nil refert an ſint verticales an obliquæ, aut una magis minuſve obliqua quam altera, in omnibus enim his caſibus erit utrobique ſemper $\alpha = \beta$, dummodo habeant illa duo vaſa æquales altitudines verticales a, item æquales amplitudines extremas $AD = EH = b$, & $BC = FG = \omega$, aut quod ſufficit, modo ſit $AD : EH = BC : FG$; ſintque illa vaſa conſtanter plena aqua, aliove liquore homogeneo, in quibus nempe utrobique eſt eadem gravitas g naturalis animans ſtrata; erit velocitas maxima & uniformis aquæ per BC effluentis æqualis velocitati maximæ & uniformi aquæ effluentis per FG. In tali enim caſu, habetur utrobique [Art. VI] ob $dv = 0$, & $\alpha = \beta$, habetur, inquam, $(bb - \omega\omega)\, z = bba$; adeoque $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; conformiter *Co-*

TAB. XC. *Fig.* 12.

rollario

rollariô 2 Art. VII, & ut alias; in prima Parte, pro vaſe cylindrico tantum invenimus. Manifeſtum interim eſt valorem $\frac{bba}{bb - \omega\omega}$ pro data altitudine a utriuſque vaſis eſſe eundem, ſi ratio inter b & ω utrobique ſit eadem, hoc eſt, ſi AD: EH = BC: FG. Notandum autem nos hic abſtrahere a contractione venæ aqueæ, quæ aliquouſque ultra orificium obſervari ſolet, in illis præcipue vaſis, quæ ſubito in foramen deſinunt in fundo latiori apertum, ſecus ac fit in illis figuram EFGH habentibus, & quaſi in tubum cylindricum convergentibus, in quibus nulla conſpicitur ſenſibilis venæ contractio. Interim, ſi ejus quoque habenda eſſet ratio; conſiderari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venæ contractionem, ubi contrahi ceſſat: atque tunc amplitudo venæ contractæ eſſet ſumenda pro ipſo foramine inferiori ω, hujuſque diſtantia ab amplitudine ſumma pro vera altitudine verticali.

X V I I.

Si jam ſtantibus iiſdem conditionibus, ut in præcedenti, duorum vaſorum æque altorum ABCD, EFGH [*Fig.* 12] & in extremitatibus æque amplorum, atque centricas rectas habentium;
TAB. X C. *Fig.* 12. habeant præterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO ſibi mutuo æqualem, & ab orificiis BC, FG æqualiter diſtantem: erit non tantum velocitas maxima [per præced.] utrobique æqualis, ſed etiam preſſiones in LM & in NO æquales erunt; adeoque in fiſtulis iis in locis inſertis atque in ſitum verticalem inflexis, aqua utrobique ad altitudinem eandem ſuſpenſa hærebit. Patet veritas hujus ex æquatione [Art. XII] quæ, ob $\alpha = \zeta = \frac{ds}{dt}$, in caſu velocitatis uniformis abit in hanc ſimpliciorem $\frac{vv(yy - \omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (ſcribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy - \omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua, quia pro utroque vaſe ſunt eadem z, y, ω, g, t, debet utique reſultare idem valor

valor ipſius π, proindeque etiam ipſius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} - t$ $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)} - t$.

XVIII.

Hinc ſi omnes LM, NO in æqualibus diſtantiis verticalibus a BC, FG, eſſent æquales; id quod fieret, ſi vaſa illa duo ABCD, EFGH eſſent ex. gr. conoidica truncata ejuſdem generis, unum rectum, alterum ſcalenum, in hoc caſu non ſolum velocitates uniformes quibus aqua ex utroque vaſe efflueret forent æquales, ſed etiam preſſiones in ſingulis altitudinibus æqualibus forent æquales, adeoque etiam ſuſpenſiones aquæ in fiſtulis hærentibus haberent in utroque vaſe eandem altitudinem.

XIX.

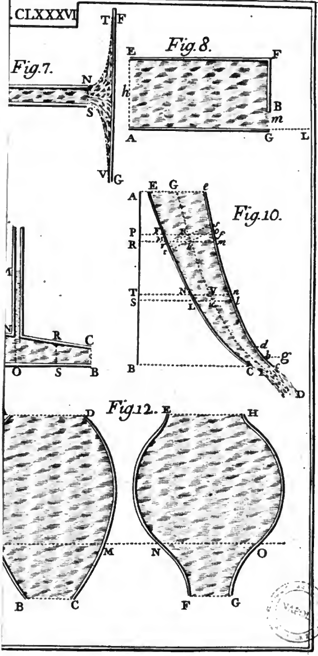
Quoniam æquatio Art. VII inventa pro velocitate generaliter determinanda, ſive jam ſit æquabilis, ſive nondum æquabilis, dat $dx = \frac{aMbb\omega dz}{aabba - aabbz + \beta\beta\omega\omega z}$, ſubſtituatur hic valor in æquatione pro preſſionibus π [Art. XII] & $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(aayy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{aay} + \frac{(aabba - aabbz + \beta\beta\omega\omega z)gNy}{aaMbb}$ $- gyt = \pi$: hinc altitudo liquoris in fiſtula, ſeu $\frac{\pi}{gy}$ $= \frac{z(aayy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{aayy} + \frac{N(aabba - aabbz + \beta\beta\omega\omega z)}{aaMbb} - t$; quæ adeo, pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fiſtula. Hinc, quod curioſum eſt, invenitur ſtatim altitudo illa initialis, hoc eſt, ea quæ obſervaretur in fiſtula primo momento quo orificium inferius aperiretur & liquor in procinctu eſſet exeundi. Cum enim, primo temporis momento, ſit adhuc $z = 0$, erit certe [deletis z] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

X X.

Ante hanc demonſtrationem, potuiſſet aliquis dubius hærere, annon forte, in momento quo orificium BC aperitur, & antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, preſſiones in quolibet loco LM adhuc eædem ſint, ſaltem per momentum temporis, quæ modo ante fuerant, cum orificium BC eſſet adhuc clauſum vel obturatum. Verum trita & vulgaris lex hydroſtatica ubique recepta docet, pro caſu vaſis obturati in BC, liquorem, in fiſtula alicubi in circumferentia ſtrati alicujus LM inſerta & verticaliter erecta, hærere ſuſpenſum in altitudine $= a - t$, hoc eſt, in eodem horizonte cum ſuperficie ſuprema AD liquoris in vaſe contenti. Nunc autem videmus rem aliter ſe habere, in caſu orificii clauſi BC, & aliter in caſu aperti ejuſdem, etiamſi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor eſt quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Unde patet, in primo inſtanti quo aperitur orificium BC, liquorem jam aliquid quaſi amittere, vel potius remittere de ſua gravitate, quod impendit non ad premendum latera, ſed ad propellendum liquorem; adeo ut latera vaſis non amplius tam graviter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abſtrahere a cauſis acceſſoriis, quæ inventam altitudinem in fiſtula $\frac{Na}{M} - t$ poſſent alterare. Ex. gr. figuræ vaſis aliquid dandum eſt: Si enim eſſet valde amplum & ſubito convergeret in anguſtum foramen, tunc ſine dubio noſtra Theoria poſſet abludere ab eo quod experientia monſtraret: Ratio eſt quia TAB. XC Fig. 10. Theoria ſupponit, ſtrata Fm, Nl, [*Fig.* 10] eam diſpoſitionem ad motum affectare [etiamſi nondum actu moveantur] ut per totum decurſum amplitudines Ff, Nn &c. conſervent ſitum horizontalem, undique ad latera uſque extenſum, atque inſuper linea centrica GHI tranſeat ubique per puncta media

G,

Tab. XC. *Tom. IV. pag. 450.*



Digitized by Google

G, H, V, I; quod quidem iis in vaſis & canalibus, quorum latera paulatim, neque ſubito, ad orificium inferius convergunt vel divergunt, accurate ſatis ita obtinere debet ut Theoria docet; ſed in aliis valde amplis & deſinentibus in fundum amplum, quod pro exitu habet foramen anguſtum, in hiſce, ut probabile eſt, ſtrata ſe non extendunt per totas vaſis amplitudines, ſed aliquouſque tantum, prout id requirit qualitas liquoris non perfecte fluidi, ſed magis minuſve tenacis, ut a frictione minimam, quæ ſit poſſibilis, patiatur reſiſtentiam; relicta nimirum parte liquoris prope latera vaſis in quiete, vel ſine ſufficiente diſpoſitione ad motum. Unde fieri poteſt ut, in tali vaſe, gurges continuus ſeu aliqua quaſi cataracta generetur, qualem fere NEWTONUS concepit, quamvis non ea neceſſaria lege quam indicavit. Intelligitur ex dictis, in hujuſmodi vaſis non eſſe conſiderandam eorum figuram externam & artificialem, ſed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit NEWTONUS, ſed quæ optime convenit qualitati vel conſtitutioni liquoris. In hujus ergo gurgitis ſuperficie ambiente, ſi poſſet implantari fiſtula, obſervaretur liquoris in illa ſuſpenſi altitudo omnino ſemper ut regula noſtra poſtulat, ſive jam ſit in motu, ſive moveri incipiat liquor in vaſe.

X X I.

Cum vero non poſſit facile ſenſibus obſervari, quouſque in vaſe peramplo gurges vel cataracta terminetur, ſeu ubinam ejus ſuperficies ambiens exiſtat; ſecurius erit, ſi fiſtula intra vas uſque ad meditullium, hoc eſt, uſque ad lineam centricam perpendiculariter penetret; ac dein pars altera fiſtulæ extra vas ſurſum inflexa ſit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fiſtula hoc unicum monſtrat, quanta ſit liquoris compreſſio in loco lineæ centricæ quem orificium fiſtulæ attingit, & ubi cauſæ illæ acceſſoriæ effectum compreſſionis alterantes, de quibus ſupra [Art. XV] egimus, jam nihil officiunt. Id tamen curandum, ut ſaltem portio fiſtulæ intra liquorem vaſis intruden-

 da

da ſit ſatis gracilis, ne alioquin nimia ejus craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti objiciat. His probe obſervatis, non dubito accuratiſſime obſervatum iri ſequentia; 1°. Generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore [Art. XII. & XIII.] $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dz}{\alpha dx} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. ſed ceſſante ſenſibili acceleratione, ubi nempe velocitas pervenerit ad ſenſibilem uniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \omega\omega ds^2 : dt^2)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. altitudinem initialem fore [Art. XIX] $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

X X I I.

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum.

Sit vaſis alicujus linea centrica in ſitu verticali. Pro hoc caſu faciliori, ubi $\alpha = \zeta = 1$, habetur [Art. VII] $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(bb - \omega\omega)x : Mbb\omega})$; id quod invenitur ex reductione æquationis ibi traditæ, & huic caſui applicatæ $(bb - \omega\omega) \times zdx + Mbb\omega dz = bbadx$, poſito ſcilicet $lf = 1$; adeoque exiſtente $x = \infty$, hoc eſt, in caſu æquabilis effluxus ſeu velocitatis uniformis, erit $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; unde fluit Theorema Art.

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13. XVI jam demonſtratum. Sit igitur vas ABCD (Fig. 13) cujuſcunque figuræ, cujus centrica vel altitudo verticalis $= a$, habeatque ſibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in ſitu horizontali poſitis: Sit amplitudo ſuprema AD [ad quam vas cum tubis jugiter plenum ſupponitur] $= b$, amplitudines CE $= m$, FG $= n$, HI $= q$, & foramen ultimi tubi $= \omega$. Dico fore ſemper $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, adeo ut nec figura vaſis, nec multitudo tuborum,

borum, nec eorum amplitudines in conſiderationem veniant, modo prima b & ultima ω ſint datæ, ut & data ſit altitudo vaſis a. Neque etiam ſcire attinet, utrum gurges, vel cataracta ſeſe extendat per totam vaſis capacitatem, an tantum partem aliquam ejus circa lineam centricam occupet. Res eſt clara per Art. XV, quia canalis CK ſupponitur horizontalis, adeoque eadem ſemper eſt velocitas uniformis, quæ eſſet ſi foramen ω immediate ad CE eſſet adaptatum, ope laminæ alicujus perforatæ ad aperturam CE applicandæ.

COROLLARIUM.

Si ω ſit valde parvum reſpectu b, erit $z = a$, ac proinde velocitas aquæ uniformiter effluentis, quæ maxima eſt quam acquirere poteſt, erit æqualis ei quam acquirit corpus grave cadendo ex altitudine $= a$.

XXIII.

Pro invenienda altitudine liquoris in fiſtula implantanda alicubi in canali horizontali CK; notetur in hoc caſu eſſe $t = 0$, quia t ſignificat exceſſum altitudinis verticalis loci ubi fiſtula inſeritur, ſupra altitudinem foraminis per quod liquor egreditur; ſeu, quod idem eſt, t ſignificat altitudinem loci inſertionis fiſtulæ ſupra locum effluxus. Hic autem, ob poſitionem canalis horizontalem, ipſa quoque centrica quaſi horizontalis cenſetur; præſertim ſi ejus tubi ex quibus canalis componitur, non admodum ſunt ampli, ita ut [Art. XXII] ſtrata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fiſtula [Art. XIX], ſeu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$; ob $\alpha = 6 = \frac{ds}{dt}$. In caſu velocitatis uniformis, ubi (§. præced.) habetur $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; hoc valore ſubſtituto pro

 z, eva-

z, evaneſcet terminus poſterior $\frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$ & prior $\frac{z(yy - \omega\omega)}{yy}$ evadet $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$; prodibit igitur altitudo in fiſtula $\frac{\pi}{gy} = \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Conferantur quæ in Partis primæ Appendice † ſub finem jam invenimus, quamvis per aliam viam. Adeoque pro tubo primo CG, ubi y eſt m, erit illa altitudo $= \frac{bba(mm - \omega\omega)}{mm(bb - \omega\omega)}$; pro ſecundo tubo FI, ubi y eſt n, erit illa $= \frac{bba(nn - \omega\omega)}{nn(bb - \omega\omega)}$; pro tertio tubo HK, ubi y eſt q, erit altitudo in fiſtula $\frac{bba(qq - \omega\omega)}{qq(bb - \omega\omega)}$, & ſic porro, quotquot eſſent tubi canalem componentes. Quæ omnia accuratiſſime reſpondent experimentis de hac re ſumptis.

COROLLARIUM.

Altitudo initialis in fiſtula eſt $= \frac{Na}{M}$, ut ſupra inventum eſt pro vaſis ipſis ſine canalibus.

XXIV.

Quod itaque attinet ad altitudinem liquoris in fiſtula inſerenda aliquo in loco ipſius vaſis [& ſi opus producenda uſque ad lineam centricam, quam in poſterum ſemper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato ut horizontalem ſupponimus]; ſit locus inſertionis in aliquo puncto ſtrati indeterminati LM, cujus diſtantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis [ſi non ſit ipſa LM] quæcunque illa ſit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fiſtula [per Art. XI huc applicatum] $= \frac{z(rr - \omega\omega)}{rr} + \frac{N(bba - bbz + \omega\omega z)}{Mbb} - t$, ubi $N = \int \frac{dt}{r}$, contentum inter BE &

† ſupra, pag. 431.

& LM, & $M = \int \frac{lt}{r}$, ſed contentum inter BE & AD [Art. VII]. Pro velocitate liquoris uniformiter effluentis, ubi $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, ſubſtituatur hic valor pro z, & prodibit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)} - t$, [evaneſcit enim terminus in quo N & M habentur]; addita itaque altitudine t, ſeu loci inſertionis, habebitur totalis altitudo ſummitatis liquoris hærentis in fiſtula ſupra horizontem infimum BE $= \frac{bba(rr - \omega\omega)}{rr(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi ω infinite parvum reſpectu b & r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc eſt, ſummitas liquoris in fiſtula eſt in eodem horizonte cum ſuprema amplitudine AD : hoc ita evenire debere, vel hinc quoque colligere poſſemus, quia liquor in vaſe quaſi quieſcit. Cæterum initialis altitudo totalis in fiſtula, exiſtente nimirum $z = 0$, hic etiam eſt $= \frac{Na}{M}$. Quæ omnia egregie inter ſe conſpirant.

X X V.

Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum, ſeu qualemcunque conoïdicum, habereque majorem baſin vaſi obverſam. Erit, pro velocitate uniformi aquæ effluentis, altitudo in fiſtula quovis in loco inter F & H implantata, [nominando amplitudinem FG $= y$] erit, inquam, altitudo illa [ut Art. XXIII expreſſa] $= \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Hinc ſi minor baſis ſit vaſi applicata, & canalis oblongus non nimis ſubito divergat, ne aqua in illo diffluat, ſed ſtrata ordine inſequentia ſuccedant præcedentibus, ſicuti Theoria rite ſtabilita ſupponit, erit, ob y minus quam ω, preſſio in latera negativa, ac proin mutatur in ſuctionem; qua fit ut, aqua in fiſtula verticaliter deſcendente, & hiante in aquam vaſculo inferiori contentam, attollatur per ſuctionem ad altitudinem =

bba

$\frac{bha(\omega\omega - yy)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi quoque ω majus ſit quam h, fit numerator & denominator fractionis negativus, ideoque valor ejus rurſus affirmativus, id quod indicat adeſſe preſſionem. Quare exiſtente vaſe ABCD ſemper pleno, quod haberet amplitudinem ſupremam AD minorem orificio canalis conoïdici divergentis, per cujus majorem baſin aqua erumpit, obſervaretur iterum aquam in fiſtula ſurſum erecta continuo & ſine fine aſcenſuram eſſe; in tali enim caſu acceleratio aquæ effluentis nunquam ceſſat, nunquam proin pervenitur ad æquabilitatem velocitatis, quod patet ex generali æquatione [ex Art. VII huc applicata] $(hh - \omega\omega)zdx - Mhh\omega dz = hhadx$; vel clarius ex æquatione Art. XXII expoſita in terminis finitis, $z = \frac{hha}{hh - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{(hh - \omega\omega)x : Mhh\omega})$, quæ æquivalet huic $z = \frac{hha}{\omega\omega - hh} \times (f^{(\omega\omega - hh)x : Mhh\omega} - 1)$; ex qua ſtatim liquet, in caſu quo ω majus quam h, evadere $z = \infty$, adeoque velocitatem infinitam, quando x eſt infinitum; ſecus ac ſit ſi h majus eſt quam ω.

XXVI.

De brevitate temporis, ab initio effluxus, uſque ad velocitatem ſenſibiliter æquabilem ſeu uniformem.

Etiamſi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquæ ex vaſis per foramen proſilientis perveniat gradatim ad uniformitatem perfectam & geometricam; Experientia tamen quotidie monſtrat aquam, ex vaſis præſertim amplioribus, quamvis altitudinis vix trium quatuorve pedum, a primo fluxus momento, tanta rapiditate ad maximam ſuam & æquabilem fluxus velocitatem convergere, dum effluit per foramen mediocriter licet anguſtum, ut ſenſibus percipi non poſſint incrementa gradualia velocitatis, per quæ tranſit a quiete ad

Digitized by Google

ad uniformem & maximam poſſibilem velocitatem quam ſenſibiliter acquirere poteſt. Ut hujus phænomeni rationem reddamus ex noſtra Theoria; conſideremus vas cylindricum vel priſmaticum, ſat magnæ amplitudinis b, & juſtæ altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen anguſtum ω in directione horizontali, ſive id fiat immediate ex ipſo vaſe, ſive mediante canali in extremitate orificium ω habente. Supponamus tamen prius, brevitatis gratia, ſcilicet foramen ω in ipſo vaſis latere prope fundum eſſe inſculptum.

XXVII.

Æquatio generalis [Art. VI] pro determinatione velocitatis adhuc creſcentis hæc fuit, $\frac{vv(bb - \omega\omega)}{2b} + \frac{bb\omega v dv}{dx} \int \frac{dt}{y} = gba$, quæ in noſtro caſu, ubi $\int \frac{dt}{y} = \frac{a}{b}$, & $\omega\omega$ juxta bb negligi poteſt, in hanc mutatur $2a\omega v dv = 2gh a dx - hvv dx$, ſeu $dx = \frac{2a\omega v dv}{2gha - bvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$, ſeu $\frac{dx}{v}$, erit $\frac{2a\omega dv}{2gha - bvv} = \frac{2a\omega dv : b}{2ga - vv} = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \left(\frac{dv}{v + \sqrt{2ga}} + \frac{dv}{-v + \sqrt{2ga}} \right)$; integrando habetur $\theta = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l \left(\frac{v + \sqrt{2ga}}{-v + \sqrt{2ga}} \right) =$ [ob $v = \sqrt{2gz}$] $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l \left(\frac{\sqrt{z} + \sqrt{a}}{-\sqrt{z} + \sqrt{a}} \right) =$ [art. XXII] $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega}})) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega}})))$; Eſt enim in hoc caſu $z = a(1 - 1 : f^{bx:a\omega})$. Hinc $\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta = l((1 + \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega}})) : (1 - \sqrt{(1 - 1 : f^{bx:a\omega}})))$. Tranſeundo a logarithmis ad numeros & rite procedendo, invenietur $f^{bx:2a\omega} =$ huic fractioni $(f^{b\theta\sqrt{2ga}:a\omega} + 1) : 2f^{b\theta\sqrt{2ga}:2a\omega}$.

XXVIII.

Verum ex principio dynamico pro lapſu libero gravium, po-

nendo $C =$ altitudini quam grave libere cadens percurrit tempore dato θ, invenietur $\theta = \sqrt{\frac{2C}{g}}$; ſubſtituatur hic valor in fractione modo inventa, & habebitur $f^{bx:2a\omega} =$ huic alteri fractioni $(f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} + 1) : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$. Nunc quia amplitudo vaſis b valde major ſupponitur quam amplitudo foraminis ω, & altitudo lapſus liberi C uno ſecundo horario percurrenda $= 15$ pedibus, ac præterea, ex natura curvæ logarithmicæ, f major quam binarius; manifeſtum eſt, pro qualibet mediocri altitudine vaſis a, hunc numerum $f^{2b\sqrt{aC}:a\omega}$ in immenſum ſuperare unitatem, ita ut hæc contemni poſſit in numeratore fractionis noſtræ: erit igitur ſenſibiliter $f^{bx:2a\omega} = f^{2b\sqrt{aC}:a\omega} : 2f^{b\sqrt{aC}:a\omega} = \frac{1}{2} f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, ſeu $2f^{bx:2a\omega} = f^{b\sqrt{aC}:a\omega}$, vel ſumendo logarithmos $\frac{bx}{2a\omega} + l\,2 = \frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}$, unde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l2}{b} =$ [ob ω incomparabiliter minus quam b] $2\sqrt{aC} =$ [ponendo $a = 4$ ped. & $C = 15$ ped.] $2\sqrt{60}$ ped. $=$ circiter 16 pedibus. Quod ſi igitur in æquatione $z = a(1 - 1 : f^{bx:a\omega})$, quæ pro quolibet aquæ effluxu longitudinis x determinat velocitatem, ſubſtituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f [quamvis, quod rem fortius probaret, f majus ſit quam 2] & ponamus amplitudinem vaſis b eſſe ad amplitudinem foraminis ω, tantum ut 100 ad 1, babebimus $z = 4(1 - 1 : 2^{400})$, quod ob ſtupendam parvitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre cenſetur a quatuor pedibus, quæ deſignat altitudinem vaſis, & ſimul illam a qua grave delapſum acquirit velocitatem æqualem ei quam habet effluxus cum pervenerit ad uniformitatem; unde patet uno ſecundo temporis elapſo, aquam effluentem jam habere ſenſibiliter illam velocitatem uniformem.

Sed ut melius appareat, quanta promptitudine convergat velocitas effluxus ad uniformitatem; videamus quam parum debeat abludere velocitas aquæ effluentis, acquiſita poſt elapſam deci-

decimam partem unius ſecundi, a maxima velocitate quam acquirere poſſet, ſi effluxus duraret per infinitum temporis ſpatium. Reducamus pedes ad pollices, & habebimus $a = 48$ poll. atque reperietur C circiter $= 2$ poll. unde x ſeu $2\sqrt{aC}$ circiter $= 20$ poll. & $f^{bx:a\omega} = f^{2000:48}$, pro quo ſcribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a(1 - 1:2^{40})$; quod etiamnum, ob imperceptibilem parvitatem fractionis $1:2^{40}$, ab ipſo a denotante velocitatem uniformem neutiquam differre cenſendum eſt.

COROLLARIUM.

Effluxus aquæ ex vaſis amplioribus per anguſta foramina, poteſt tuto conſiderari tanquam æquabilis in momento poſt motus initium.

XXIX.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per Methodum indirectam virium vivarum.

Ad uberiorem confirmationem bonitatis methodi noſtræ directæ & univerſalis, lubet nunc tradere ſolutionem indirectam, ex Theoria conſervationis virium vivarum eruendam, Propoſitionis principalis de velocitate aquæ erumpentis ex vaſe & canali ſemper pleno, prout illam ſtabilivimus per æquationem Art. VII traditam.

Concipiamus aquam per Cc [*Fig.* 10] egredientem, dirigi ſtatim ad ſitum horizontalem, ut conſiderari poſſit ſine aſcenſu & ſine deſcenſu in ſuo progreſſu: Sit vero x longitudo cylindri aquei ſecundum directionem obliquam ID, habentis pro baſi Cc, qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquæ quanta jam egreſſa eſt; erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{\alpha}$, cujus differentiale $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſignat particulam aquæ elementarem porro ſtatim egreſſuram ex TAB. XC. *Fig.* 10.

 Cc,

Cc, poſtquam egreſſa eſt quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua grave aliquod libere delapſum acquirat velocitatem quæſitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$; erit, per principium virium vivarum ejus, velocitas $=\sqrt{z}$, & ſubvelocitas $=\frac{1}{\alpha}\sqrt{z}$, unde ſubvelocitas in G $=\frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, ipſa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $=\frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{ab}$. Similiter ſubvelocitas in quolibet puncto H $=\frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha y}$, adeoque ipſa actualis velocitas in H $=\frac{\omega dz\sqrt{z}}{\alpha y dt}$.

X X X.

Quoniam autem per ſingulas amplitudines, in toto canali, eodem tempuſculo, eadem quantitas aquæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam Ee, in altitudine verticali $=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$, ut convenienti tempore cadere incipiens ſua gravitate perveniat ad amplitudinem Ee, ibique reſarciat, eodem momento & eadem velocitate $\frac{\mathfrak{C}\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$, particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali, atque hoc modo canalis jugiter plenus conſervabitur, prout conditio Problematis id requirit.

X X X I.

Quod ſi igitur ſingulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quæque altitudine $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$ collocatæ ſupra Ee fuerint, & jam omnes ſucceſſive delapſæ ſint, per Ee ingreſſuræ, canalem ſemper plenum conſervantes, patet æqualem quantitatem aquæ $\int\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium Cc eſſe

egreſ-

egreſſam, quam in plano horizontali Cc prolongato moveri concipimus, & ita quidem ut ſingulæ ejus particulæ $\frac{\omega dx}{\alpha}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\sqrt{z}$. Quare unaquæque ex particulis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitivo quietis, uſque ad infimum horizontem BCc prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{GG\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + AB = \frac{GG\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + a$. Oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes, ut habeatur $\frac{GG\omega^3 zdx}{\alpha^3 bb} + \frac{a\omega dx}{\alpha}$; quod integratum dat $\frac{GG\omega^3}{\alpha^3 bb}\int zdx + \frac{a\omega x}{\alpha} =$ vi vivæ ex deſcenſu univerſo particularum gravium collectæ. Hæc autem æqualis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum, quæ fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpective velocitatum.

XXXII.

Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ jam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuæ, quod eſt z, & habebo $\frac{\omega z dx}{\alpha}$, cujus integrale $\frac{\omega}{\alpha}\int z dx$, exprimit vim vivam ex velocitatibus oriundam totius materiæ aqueæ ex canali egreſſæ; cui addenda adhuc eſt ea quam habet omnis materia intra canalem fluens, & quæ reperitur multiplicando ſingula ſtrata $y dt$ per quadratum ſuarum reſpective ultimarum velocitatum $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2}$, adeo ut cujuſlibet ſtrati $y dt$ prodeat vis viva ex motu ſuo oriunda $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2} \times y dt = \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha y dt}$: proinde vis viva omnium ſtratorum $= \frac{\omega\omega z}{\alpha\alpha}\int\frac{ds^2}{y dt}$, per totum canalem ſumendorum $=$ [ob datum per magnitudinem datam totius canalis $\int\frac{ds^2}{y dt}$, quod di-

catur M] $\frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium vivarum ex motu oriundarum, habebimus vim vivam univerſi ſyſtematis aquei $= \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$.

XXXIII.

Hinc æquando hanc vim ex motu collectam, cum illa quam modo ante ex deſcenſu particularum collegimus; ſuppeditabitur nobis hæc æquatio $\frac{GG\omega^3}{\alpha^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$, quæ differentiata & a fractionibus liberata, hanc præbet, $GG\omega\omega z dx - \alpha\alpha hh z dx = M\alpha hh\omega dz - \alpha\alpha hh a dx$, vel denique [reductione peracta] hanc $(\alpha\alpha hh - GG\omega\omega) z dx + \alpha M hh\omega dz = \alpha\alpha hh a dx$: omnino ut invenimus per methodum directam [Art. VII].

COROLLARIUM.

Si h vel E e ſit amplitudinis permagnæ reſpectu ω vel C c, æquatio inventa abit in hanc $\alpha z dx + M\omega dz = \alpha a dx$, & pro effluxu uniformi in hanc $z = a$. Sin vero E e non quidem ſit valde magnæ amplitudinis reſpectu C c, velimus tamen ut aqua nova ſuccedat continuo deſcendenti intra canalem, non cum velocitate acquiſita aliqua, ſed ex quiete incipiat ſuccedere, ita ut etiam hoc modo canalis ſemper plenus conſervetur; poterit hoc effectui dari, ſi ad E e (*Fig.* 14) adaptatur vas ampliſſimum ſed valde parvæ altitudinis, quod ſit aqua plenum. Effluet utique ex illo aqua ſumens motum ex quiete, & tamen influens in canalem cum debita velocitate, conſervabit jugiter ejus plenitudinem. Res ipſa patet ex figura: Ubi canalis E C c e adaptatum habet vas cylindricum ampliſſimum A Q V K, cujus altitudo A K vel Q V valde parva ſupponitur, ita ut altitudinem verticalem A B canalis E c ſenſibiliter non augeat, id eſt, ut K B ſumi poſſit pro A B, & tamen capacitas A V hu-

TAB. XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 14.

jus

jus vaſis cylindrici permagnam aquæ copiam contineat. Quare ut jam velocitas aquæ effluentis per Cc determinetur, non amplius Ee, ſed KV, ſumenda eſt pro prima amplitudine b, manente interim altitudine verticali a canalis, quia per hypotheſin ſenſibiliter non differt AB a KB. Hoc pacto, habebimus ſemper pro velocitate uniformi $z = a$, hoc eſt, eam velocitatem quam grave acquireret cadendo libere ex altitudine $= a = AB$, ſeu KB.

XXXIV.

Exemplum ſingulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter deſcendentis, ubi nihil effluit nullaque nova aqua deſcendenti ſuccedit.

Eſto Hyperbola BEG (*Fig.* 15) inter aſymptotos orthogonales, unam verticalem AM, alteram horizontalem AH; cujus applicatæ DI, EK, FL, GM, &c. deſignent amplitudines ipſas canalis conoidici in infinitum continuati, qui generari intelligitur, ſi alia hyperbola inter eaſdem aſymptotos [cujus applicatæ ſunt ut radices hyperbolæ ordinariæ prioris] deſcripta circa aſymptoton verticalem, tanquam circa axem, revolvitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari partitionem aquæ, deſignatam per aream hyperbolicam DK, a quiete deſcendere incipientem, & eam deſcendendo perveniſſe in locum quemlibet alium FM; ita ut per conſequens FM ſit = DK. Quæruntur velocitates in GM, in FL, &c. & velocitas cujuſcunque ſtrati intermedii POop? TAB. XCI. N°. CLXXXVI. Fig. 15.

XXXV.

Sit unumquodque rectangulum coordinatarum, hoc eſt, productum amplitudinis cujuſque PO per altitudinem conoidis AO $= aa$; item abſciſſæ datæ $AI = b$, $AK = c$; deſcenſus quilibet aſſumptus AL amplitudinis ſuperioris $= x$. Erunt, ex natura

tura hyperbolæ, amplitudo $DI = \frac{aa}{b}$, $EK = \frac{aa}{c}$, $FL = \frac{aa}{x}$, & præterea [ob $DK = FM$] $AM = \frac{cx}{b}$, proinde $GM = \frac{aab}{cx}$; ipſaque area vel potius ſolidum DK vel FM $= aa(lc - lb)$. Erit porro [calculo docente] centri gravitatis areæ DK diſtantia ab horizonte $AH = \frac{c - b}{lc - lb}$, & diſtantia centri gravitatis areæ FM [nota, per aream ſemper ſolidum me intelligere] ab eadem $AH = \frac{x(c - b)}{b(lc - lb)}$. Hinc deſcenſus centri gravitatis ex ſitu DK in ſitum $FM = \frac{(x - b) \times (c - b)}{b(lc - lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquæ deſcendentis deſignatam per $aa(lc - lb)$, erit productum $\frac{aa(x - b) \times (c - b)}{b} =$ vi vivæ ex deſcenſu productæ.

XXXVI.

Dicatur jam velocitas in $GM = \sqrt{z}$, erit velocitas in $FL = \frac{b}{c}\sqrt{z}$: Dicatur etiam quælibet $AO = y$, erit $PO = \frac{aa}{y}$, ſtratum $Po = \frac{aady}{y}$, ipſaque ejus velocitas $= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$. Hujus ergo quadratum ductum in ſtratum Po dat $\frac{aabbzydy}{ccxx} =$ vi vivæ ſtrati Po, cujus integrale debite correctum [ſumendo a, b, c, z & x pro conſtantibus] $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc}$ $=$ [in caſu y, ſeu $AO, = \frac{cx}{b}$ ſeu AM] $\frac{1}{2}aaz - \frac{aabbz}{2cc}$ $= \frac{aaz}{2cc}(cc - bb) =$ vi vivæ totius maſſæ aqueæ ex motu oriundæ. Comparando hanc cum præcedente, habebimus

aa

$\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = \frac{aaz}{2cc}(cc-bb)$; unde per reductionem invenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ = quadrato velocitatis in GM; adeoque quadratum velocitatis in FL $= \frac{(x-b)2b}{c+c}$, & quadratum velocitatis cujuſcunque ſtrati intermedii P o [pro abſciſſa AO ſeu y] $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

COROLLARIUM I.

Stratum infimum EK, deſcendens ex quiete in ſitum GM, acquirit majorem velocitatem quam corpus grave libere cadens ex altitudine KM. Eſt enim $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$ majus quam KM, vel quam $\frac{cx}{b} - b$.

COROLLARIUM II.

Sed ſtratum ſupremum DI deſcendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam grave cadens libere ex altitudine IL. Nam $\frac{(x-b)2b}{c+b}$ minus eſt quam IL, ſeu quam $x-b$.

COROLLARIUM III.

Partes ergo inferiores maſſæ aqueæ fortius, & ſuperiores ſegnius accelerantur, quam ſi libere deſcenderent a ſola naturali gravitate animatæ. Quod vel hinc quoque citra calculum prævideri poterat, quia partes aquæ in locis anguſtioribus premuntur ab incumbentibus, atque ſic ad majorem accelerationem incitantur; contra vero renituntur partibus iis quæ occupant loca ampliora, atque ita ſuperiores in acceleratione ſua naturali retardantur.

Corollarium IV.

Datur itaque alicubi ſtratum P o intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet. Hoc autem ut determinetur, facio ut AL ad A O, ſeu ut x ad y, ita A I ſeu b ad Aω, quæ erit $\frac{by}{x}$, eritque $\pi\omega$ ſitus primitivus ſtrati P o. Proinde ωO, ſeu $y - \frac{by}{x}$, eſt altitudo per quam deſcendit ſtratum P o. Ut igitur acceleratio hujus ſtrati ſit = naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$; nunc prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$; id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL & AM; ſicuti Aω eſt media arithmetica inter AI & AK: adeoque LO = OM, & Iω = ωK. His itaque in locis, ſtratum intermedium P o tantundem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubjecta p M; ita ut haud aliter deſcendat, quam ſi libere deſcenderet a ſola gravitate naturali animatum. Cæterum & hoc quoque obſervandum, in iiſdem his locis fieri maximam aquæ compreſſionem; unde concludimus, ſi in loco ſtrati P o inſereretur fiſtula verticaliter, fore ut aqua in illa ad majorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſereretur in cujuſlibet alius loci ſtrato inter FL & GM. Etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquæ compreſſione, ut ex ſupra explicatis patet.

XXXVII.

Collatio hujus ſolutionis per vires vivas, cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

In Scripti hujus hydraulici Parte ſecunda Art. VII * dedimus per

* ſupra pag. 437.

per principia dynamica æquationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)\, zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bb a dx$. Sed ibi ſupponitur vas vel canalis ſemper plenus, ſuccedente nimirum continuo liquore novo, eadem velocitate ſeſe adjungente illi qui in ſuprema amplitudine jam jam deſcendit, ipſeque canalis exiſtit datæ & determinatæ altitudinis verticalis. Cum vero, in præſenti exemplo, canalis ſit indefinitæ altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum ſuum ſemper mutat, habetque proin altitudinem ſuam LM ſingulis momentis variabilem; adeo ut non ſtatim videatur hujus exempli caſum contineri ſub formula illa inventa Art. VII; cum præſertim nullus novus liquor hic ſuccedat deſcendenti, ſed una eademque ſemper ejus quantitas DK vel FM in canali conſervetur, modo hunc, modo alium locum occupans.

XXXVIII.

Interim monſtrabimus, quo pacto, per aliquam mentis fictionem, præſens caſus reduci poſſit ad leges hypotheſeos Art. VII ſtabilitæ. Conſiderandum nempe ſpatium primitivum DEKI ſub ſpecie canalis datæ altitudinis IK, cujus amplitudo ſuperior eſt DI, inferior EK; utraque data & determinata: Jam ex EK dum liquor fluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati; fingo per ſupremam amplitudinem DI ſubingredi fluidum aliquod, tam gravitatis quam omnis inertiæ vel reſiſtentiæ expers, quod, quamvis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi poteſt, ut nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium quod a liquore deſcendente vacuum relinqueretur. Hoc ita præſuppoſito, deſcenderit jam liquor realis ex DK in locum FM: Hujus ſingulorum ſtratorum PO vires, tum hydroſtaticas tum hydraulicas, transfero ad ſupremam amplitudinem DI, ubi premat fluidum fictum, quod occupat ſpatium DFLI, eundemque effectum præſtare debet, quam præſtat vis a gravitate oriunda liquoris realis FM pariter tranſlata ad amplitudinem ſupremam

 DI,

DI, & hæc eſt illa vis quam vocavi p ſeu gba: omnia applicando ad mentem Theoriæ noſtræ in Scripto hoc hydraulico expoſitæ. Atque ſic nullæ aliæ vires in computum venient, quam quæ reſultant a gravitate & motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente, & nullum alium in finem inſervien-te, quam ut tranſmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

XXXIX.

Nihil igitur aliud reſtat, quam ut debita fiat applicatio methodi expoſitæ in Art. IV, & V; eum in finem ut accommodetur ad exemplum propoſitum: ubi ſtatim patet, eſſe $\alpha = \mathfrak{C} = 1$; reliquæ vero litteræ deſignant hic ea quæ ſequuntur, ſcilicet $b = DI$, $\omega = EK$, a ſeu altitudo liquoris realis $= LM$, $M =$ ſummæ omnium $\frac{Oo}{IO}$ in altitudine LM contentorum; item $z =$ altitudini ex qua grave libere delapſum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis, ſub initium deſcenſus, vel poſtea fluidum fictum effluit per EK, ac denique $dq =$ progreſſui momentaneo ex amplitudine EK.

XL.

His probe obſervatis, nunc ita procedo: Poſita velocitate per $EK = v$, erit velocitas per $FL = \frac{xv}{c}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$; progreſſus momentaneus per $GM = d(AM) = \frac{cdx}{b}$, progreſſus per $PO = d(AO) = \frac{ydx}{x}$, progreſſus per EK ſeu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progreſſus omnes cum debeant eſſe ſimultanei, ſunt utique in ratione reciproca amplitudinum, ſicuti & ipſæ velocitates adeoque in ratione directa diſtantiarum ab horizontali AH. Quærenda jam eſt, ad imitationem Art. IV [exiſtente hic $\alpha = \mathfrak{C} = 1$] vis hydroſtatica, quæ exprimitur per ſemiſſem amplitudinis

dinis ſupremæ DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum maximæ per GM & minimæ per FL. Eſt autem DI $= \frac{aa}{b}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$, & velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, unde tota vis hydroſtatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc} \times (cc - bb)$.

X L I.

Ad imitationem Art. V, vim hydraulicam ita determino. Vim acceleratricem ſtrati indefiniri Po, quam voco γ', multiplico per ejus progreſſum $\frac{ydx}{x}$, & habebo per principium dynamicum $\frac{\gamma' y dx}{x} = u'du' = \frac{yyvdv}{cc}$; unde vis acceleratrix progreſſiva $\gamma' = \frac{xyvdv}{ccdx}$, & ipſa vis motrix ſtrati Po, hoc eſt, γ' Po $= \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$, quæ tranſlata ad amplitudinem DI, ſeu ad $\frac{aa}{b}$, facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx}$ = [corrigendo vel ſumendo per omnes yy, quæ ſunt contentæ in intervallo LM] $\frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ = vi hydraulicæ. Aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ erit $\frac{aaxxvv(cc-bb)}{2b^3cc} + \frac{aax^3vdv(cc-bb)}{2b^3ccdx}$ ſeu $\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv + \frac{xvdv}{dx}\right) \times (cc - bb)$, quod virium aggregatum debet eſſe æquale vi primitivæ tranſlatæ ex gravitate ſtratorum oriundæ. Habetur autem vis primitiva tranſlata cujuſlibet ſtrati Po, faciendo ut PO ad DI, ſeu ut AI ad AO, hoc eſt, ut b ad y, ita $g \times$ Po ſeu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per intervallum LM dat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ pro tota vi primitiva tranſlata.

X L I I.

Lucramur ergo æquationem inter aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ, atque inter vim primitivam translatam, quæ æquatio ita ſe habet $\frac{aaxx}{2bcc}(vv + \frac{xvdv}{dx}) \times (cc - bb) = \frac{gaax(c - b)}{bb}$, unde dividendo per $\frac{aax}{bb}(cc - bb)$ prodit hæc altera $\frac{x}{2bcc}(vv + \frac{xvdv}{ax}) = \frac{g}{c+b}$, vel reducendo, hæc, $xvvdx + xxvdv = \frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando, & corrigendo debito modo [ut AL, vel x, exiſtente = AI vel $= b$, ipſum v ſit $= 0$] habebitur $\frac{1}{2} xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c+b}$, aut ſcribendo, ſecundum legem dynamicam, $2gz$ pro vv, & dividendo per g, erit $xxz = \frac{2bccx - 2bbcc}{c+b}$, adeoque $z = \frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$, quod determinat velocitatem per EK; ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem. Faciendo namque ut GM^2 ad AM^2, hoc eſt ut cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, ſive ut bb ad xx, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2cc}{b(c+b)}$, erit hoc = altitudini, ex qua grave libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M. Faciendo porro ut cc ad xx, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2b}{c+b}$ = altitudini unde grave libere delapſum habebit velocitatem eam quæ convenit liquori in ſupremo puncto L. Ac denique faciendo ut cc ad yy, ita $\frac{(x - b)2bcc}{xx(c+b)}$ ad $\frac{(x - b)2byy}{xx(c+b)}$; indicabit hoc altitudinem ex qua grave libere cadere debet ut acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quæ omnia mirifice conſpirant cum iis quæ invenimus per Theoriam virium vivarum.

XLIII.

X L I I I.

Sed & hoc jam præſtare poſſumus, quod non æque facile præſtari poteſt per vires vivas, ſcilicet invenire quantum liquor inter deſcendendum in quavis ſui parte comprimatur. Vidimus quidem ſupra in *Coroll.* IV, liquorem, poſtquam ex ſitu initiali ſeu primitivo DK deſcendit in ſitum FM, in ſingulis ſuis partibus PO diverſas pati compreſſiones; atque earum maximam eſſe, ubi PO bifariam ſecat LM: verum ejus quantitatem determinare & cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum ſcilicet PO dividit LM in alia quacunque ratione, res eſſet altioris indaginis, ſi quis id ex natura virium vivarum eruere vellet. Per methodum noſtram directam, in capite de preſſionibus expoſitam, haud arduum eſt quæſitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

X L I V.

Sit itaque indagandum, quanta vi maſſa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quærendam hic etiam vocabo π. Oſtendi Art. XI & XII, ſi portio tantum PM, remoto reſiduo FO, deſcendere pergeret, ſed ita ut non ſolum a propria gravitate, ſed inſuper etiam a π urgeretur, fore ut [ſaltem primo momento] eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota maſſa FM a ſola ſua gravitate. Secetur IK in ω in ſimili ratione ut ſecta eſt LM in O, ita ut AI : $A\omega = AL : AO$; erit $\pi\omega$ ſitus initialis ipſius P. Et $\pi K = PM$. Sit AL ad AO, vel AI ad $A\omega$, ut 1 ad n, proinde $AO = nx$ & $A\omega = nb$. Fingamuſque liquorem in πK contentum deſcendere vi ſuæ gravitatis, ac præterea vi π, quæ in quolibet loco deſcenſus ipſi convenit, ut acceleratio fiat perinde ac ſi tota maſſa DK vi ſola ſuæ gravitatis deſcenderet. Quare quod erat AL, vel x, id nunc eſt AO, vel nx; & quod erat AI, vel b, id nunc eſt nb. Ideoque vires hydroſtaticæ & hydraulicæ invenientur,

tur,

tur, ſi nx pro x, & ndx pro dx, item nb pro b ſcribatur, atque ſic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc - nnbb)$ $=$ vi hydroſtaticæ, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3b^3ccndx}(cc - nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}(cc - nnbb) =$ vi hydraulicæ. Vis autem per tranſlationem a gravitate oriunda, quæ erat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$, nunc eſt utique $\frac{gaanx}{nnbb}(c - nb)$ vel $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$.

X L V.

Sumendo jam aggregatum virium hydroſtaticæ & hydraulicæ; illudque æquando cum vi primitiva tranſlata ex gravitate oriunda $\frac{gaax}{nbb}(c - nb)$, cui addi debet vis compreſſionis tranſlata ex PO in $\pi\omega$, quæ habetur ſi facimus ut PO ad $\pi\omega$, ſeu ut AI ad AL, hoc eſt, ut b ad x, ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc æquationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}\right)\times(cc - nnbb) = \frac{gaax}{nbb}$ $\times(c - nb) + \frac{x\pi}{b}$, quæ ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc}\times$ $(d(\frac{1}{2}xxvv)\times(cc - nnbb)) = \frac{gaadx}{nb}\times(c - nb) + \pi dx$. Quoniam autem velocitas maſſæ diminutæ PM, ſed preſſæ a vi π, eadem eſſe debet quæ eſt velocitas maſſæ integræ FM, pro qua velocitate modo ſupra invenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx - 2gbbcc}{c+b}$; ſcribamus hujus differentiale, quod eſt $\frac{2gbccdx}{c+b}$ pro $d(\frac{1}{2}xxvv)$, & prodibit $\frac{gaadx}{nb(c+b)}(cc - nnbb) = \frac{gaadx}{nb}(c - nb) + \pi dx$. Dividendo per dx, & tranſponendo obtinebimus $\pi =$ $\frac{gaa(cc - nnbb - (c - nb)\times(c+b))}{nb(c+b)} = \frac{gaa(cn - c - nnb + nb)}{n(c+b)}$. Quocirca ſi ad PO inſeratur fiſtula verticaliter erigenda, ut cognoſca-

gnoſcatur ad quam altitudinem liquor in illa [ſaltem per tempus breviuſculum] ſuſpenſus hærere poſſet, dividendum eſt π per $g \times PO$, hoc eſt, per $\frac{gaa}{nx}$, ut habeatur $\frac{\pi nx}{gaa} = \frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$ $=$ altitudini liquoris in fiſtula, ex qua altitudine æſtimanda eſt compreſſio abſoluta liquoris in PO. *Q. E. I.*

XLVI.

Quod ſi porro determinare oporteat punctum O in data qualibet LM, ubi intenſitas compreſſionis ſit maxima, id eſt, ubi liquor in fiſtula maximam obtinebit altitudinem; differentianda eſt quantitas inventa $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$, ſumto n pro variabili, & reliquis pro conſtantibus; quo facto prodibit $c+b-2bn=0$, unde reſultat $n=\frac{c+b}{2b}$, adeoque nx ſeu AO $=\frac{(c+b)x}{2b}=\frac{c+b}{2b}AL=\frac{c}{2b}AL+\frac{1}{2}AL=\frac{1}{2}AM+\frac{1}{2}AL$. Unde patet punctum O maximæ compreſſionis eſſe in medio inter M & L; plane ut ſupra in *Coroll.* IV conjectando prævidimus.

XLVII.

Præterea, ſi in expreſſione $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$ ſubſtituatur valor inventus ipſius n, qui eſt $\frac{c+b}{2b}$, habebitur ipſa liquoris maxima altitudo in fiſtula $\frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$. Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM, ſeu LO $=\frac{x(c-b)}{2b}$, erit LO, ſeu altitudo liquoris in canali ſupra punctum O ubi fiſtula inſeritur, ad altitudinem liquoris in fiſtula $=\frac{x(c-b)}{2b} : \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)} = 2(c+b):c-b$, ſeu ut duplum ſummæ diſtantiarum primitivarum AK+AI ad earundem ſimplam differentiam, hoc eſt ut 4 Aω ad IK.

Digitized by Google

XLVIII.

Cæterum, vel ſola ratio ſana dictat, maſſam liquoris deſcendentis FM in extremitatibus FL & GM nullam pati compreſſionem, adeoque altitudinem in fiſtula tam in L quam in M inſerta debere eſſe nullam. Et hoc ipſum quidem per formulam confirmatur; nam in priori caſu, ubi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - mb + nb)}{c + b}$ in hanc $\frac{x(c - c - b + b)}{c + b} = 0$; in poſteriori vero, ubi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc - cb - cc + cb)}{b(c + b)}$ etiam $= 0$.

XLIX.

SCHOLIUM III.

Hoc exemplum liquoris ſua gravitate deſcendentis in Tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod ſpeciminis loco fuſius pertractavi, monſtrat quomodo ſit procedendum in aliis ejuſmodi caſibus, ubi liquor intra canalem ſufficienter longum eadem ſemper quantitate delabitur, ita nempe ut nihil inde effluat, nihilque pariter novi liquoris ſubingrediatur. Aperit inſuper aditum ad ſolutionem Problematum de determinando motu oſcillatorio fluidorum in tubis recurvis vel reflexis, cujuſcunque ſint figuræ atque amplitudinis utcunque variantis: In talibus namque tubis ſeu ſiphonibus, dum pars quædam fluidi per unum crus deſcendit, per alterum crus, licet multum diſſimile, pars alia fluidi priori æqualis aſcendit, hoc eſt, negative deſcendit: ita ut perinde ac in tubis continuo deorſum vergentibus eadem ſemper fluidi maſſa conſervetur. Unde ſi, mutatis mutandis quantum ad ſigna in calculo, per eandem methodum quam adhibuimus in allato exemplo procedatur, haud arduum erit pervenire ad ſupputationem velocitatis fluidi tranſfluentis in ſingulis locis, pro quolibet ejus deſcenſu vel aſcenſu: unde omnia reliqua dependent.

L.

L.

De Vaſis quæ intereà dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris deſuper influentis accipiunt.

Pro iſtis caſibus vaſorum, quæ emittendo liquorem, ſed nullum alium accipiendo, tandem deplentur atque evacuantur; poſſet adhiberi methodus illa, quam explicui §.XLIV & ſequentibus; ubi agebatur de determinatione motus datæ maſſæ aqueæ intra canalem hyperbolico-conoidicum continuo delabentis, ſcilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium ab aqua deſcendente vacuum relictum: iſta vero mentis fictione inſuper habita atque neglecta, ſufficiet in rem præſentem æquatio noſtra in §. VII data, $(aabb - \zeta\zeta\omega\omega) \times zdx + \alpha Mbb\omega dz = aabbadx$, quam pro vaſis ſemper plenis exiſtentibus valere vidimus. Illa quippe æquatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vaſa, quæ ob nullum novum liquorem influentem paulatim deplentur, atque adeo in quibus ſuprema liquoris ſuperficies Ee (*Fig.* 10) continuo deſcendit. TAB. XC. *Fig.* 10.

L I.

Ad imitationem ejus quod pro caſu vaſis cylindrici jam ſolutum extat in Parte prima Art. XII*, conſideremus hic vas cujuſcunque figuræ, in quo ſuperne nullus ingrediatur novus liquor, dum ille qui jam ineſt per orificium infimum continuo ductu elabitur. Ponamus itaque ſupremam ſuperficiem deſcendendo ex ſitu Ee perveniſſe in ſitum Ff, ad quod momentum determinanda ſit liquoris effluentis velocitas: quem in finem ipſa amplitudo Ff, ſeu y, licet variabilis ſumenda eſt pro ſuprema amplitudine, cui reſpondet altitudo BP ſeu t, quæ & ipſa variabilis eſt [hoc certe permittit natura tranſlationis virium motricium in fluidis, ut cuilibet attendenti patebit], ipſum

* ſupra pag. 405.

Digitized by Google

vero M ſeu $\int \frac{ds^2}{y\,dt}$, quod in vaſis conſtanter plenis conſtans erat, nunc eſt variabile; capiendum nempe per altitudinem variabilem B P.

Scribatur ergo in æquatione noſtra yy pro hh, t pro a, & $\frac{ds}{dt}$ pro ζ, atque prodibit hæc æquatio, quæ deſideratur; $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, z\,dx + \alpha yy\omega\,dz \int \frac{ds^2}{y\,dt} = \alpha\alpha yy\,t\,dx$. Ex eo vero, quod elementum aquæ elabentis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ = ſtrato deſcendenti; $- y\,dt$ [pono $- y\,dt$, quia creſcente x decreſcit t] erit $dx = \frac{-\alpha y\,dt}{\omega}$. Subſtituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit æquatio hanc faciem $(\alpha\alpha yy - \omega\omega \frac{ds^2}{dt^2})\, z\,dt - \omega\omega y\,dz \int \frac{ds^2}{y\,dt} = \alpha\alpha yy\,t\,dt$; quæ pro vaſis habentibus centricam verticalem, ubi $\alpha = 1$, $ds = dt$, in hanc abit æquationem ſimpliciorem: $(yy - \omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega y\,dz \int \frac{dt}{y} = yy\,t\,dt$.

L I I.

Ex hac æquatione exemplum ex prima Parte allegatum [Art. XII], ubi vas ſupponebatur cylindricum, nunc porro ad finem proſequemur, ac quædam notatu digna adjiciemus. Hic igitur viciſſim ponendum eſt h pro conſtante y, atque $\int \frac{dt}{y}$ erit $\int \frac{dt}{h}$, ſive $\frac{t}{h}$, totuſque terminus $\omega\omega y\,dz \int \frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega t\,dz$; unde æquatio pro caſu cylindri recti hanc formam habebit $(hh - \omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega t\,dz = hh\,t\,dt$, quæ, per modum integrandi dudum mihi uſitatum, dat in terminis finitis valorem quæſitum ipſius $z = \frac{hht}{hh - 2\omega\omega} \times (1 - (t:a)^{(hh - 2\omega\omega):\omega\omega})$.

Hinc ſtatim liquet velocitatem, tam initialem quam finalem, eſſe nullam, hoc eſt in caſu quo $t = 0$, vel quo $t = a$: unde colli-

colligere eſt alicubi fore velocitatem maximam aquæ, tum effluentis ex vaſe, tum in ipſo vaſe deſcendentis. Ea ut determinetur, quærendum eſt maximum z, quod fiet, quando ſuperficies aquæ in cylindro deſcendit ad eam a baſe diſtantiam t, quæ ſit $= a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$, id quod duabus viis invenitur, nempe vel differentiando valorem inventum ipſius z more ſolito; vel quod commodius eſt, ponendo, in præcedente æquatione differentiali $(bb-\omega\omega)z\,dt - \omega\omega t\,dz = hbt\,dt$, terminum ſecundum $\omega\omega t\,dz =$ nihilo; unde prodit $z = \frac{bbt}{bb-\omega\omega}$; qui comparatus cum invento valore generali $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ dabit, ut dixi, $t = a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$.

LIII.

Interim, in caſu particulariſſimo, ubi $bb = 2\omega\omega$, ubi amplitudo vaſis cylindrici ſe habet ad amplitudinem foraminis, ut $\surd 2$ ad 1, hoc incommodi accidit, ut $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega} \times \left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$ evadat $= \frac{bbt}{0}(1-1)$, nec non ut alterum $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)}$, fiat $= \left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\omega\omega:0}$, ſeu $= 1^{\infty}$; ex quo utroque nihil concludi poteſt. Hoc autem incommodum tollitur per regulam, cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicavi cum illuſtri Hospitalio, ut videre eſt in Analyſi infinite parvorum, Art. 163. *

Prius enim modo allatum $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{(bb-2\omega\omega):\omega\omega}\right)$, invenitur pro præſenti caſu $= -2(a-t)\,l\,(a-t)$; alterum vero $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\omega\omega:(bb-2\omega\omega)} = \frac{1}{c}$, aſſumendo ſcilicet a pro unitate, & $lc = 1$; atque hinc utrumque per Logarith-

* Vid. Nus. LXXI. pag. 401. *Tom. I.*

micam vulgarem, cujus ſubtangens $= a = 1$, facillime conſtruitur.

L I V.

De Clepſydris conficiendis.

Figuras vaſorum aquas per foramen inferius permittentium hucuſque haud aliter tractavimus, quam tanquam datas, ut nimirum erueremus leges ſecundum quas motus aquarum procederet. Nunc vero lubet inquirere ordine inverſo in figuram vaſis ad id requiſitam, ut aquæ ſuprema ſuperficies ſubſidat ſecundum propoſitam aliquam legem; ex. gr. ut uniformi celeritate deorſum feratur; unde ex quantitate deſcenſuum duratio fluxus immediate innoteſcat: qui uſus olim fuit apud Veteres frequentiſſimus Clepſydrarum ad horas dimetiendas inſtitutus. Id autem duobus præcipue modis obtineri poteſt, unus ſcilicet eſt, quo ex quantitate elapſæ aquæ, alter quo ex quantitate aquæ in vaſe adhuc remanente, de temporis ſpatio judicari poteſt. De utroque ſeorſim agemus.

L V.

Conſideremus vaſa ſimpliciora, quæ nimirum habent centricas ſuas verticales, quarumque æquatio [§. L I] hæc erat $(yy - \omega\omega) \times z\,dt - \omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y} = yyt\,dt$; ubi indeterminatæ t & y originem ducunt a loco infimo, ſeu a foramine ω. Quod ſi jam velimus facere ut aqua erumpat velocitate uniformi; ponendum eſt $z =$ conſtanti c; quo poſito, erit $dz = 0$, & ita evaneſcet ſecundus terminus $\omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y}$, reliquique diviſi per dt, dabunt hanc æquationem algebraïcam $(yy - \omega\omega)c = yyt$; unde elicitur $yy = \frac{\omega\omega c}{c - t}$ & $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}}$ ſeu $\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}}}$.

C O R O L L A R I U M I.

Ea igitur eſt vaſis natura & figura, ut generari poſſit ex circum-

cumvolutione Hyperbolæ planæ biquadraticæ deſcriptæ inter duas aſymptotos, quarum una verticalis, altera horizontalis, diſtans ab orificio ω altitudine $= c$.

COROLLARIUM II.

Altitudo prima, ſeu t initialis, $= c$, ipſaque amplitudo initialis y eſt infinita: eſt enim tunc $y = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - c}} = \infty$.

COROLLARIUM III.

Quantitas aquæ remanentis in vaſe pro quavis altitudine t; ſeu $\int y dt$, invenietur integrando riteque corrigendo $\int dt \sqrt{\frac{\omega\omega c}{c - t}} = 2\omega c - 2\omega\sqrt{(cc - ct)}$. Hinc quantitas totalis aquæ ab initio fluxus $= 2\omega c$; hoc eſt $=$ cylindro aquæ cujus baſis eſt ω & altitudo $2c$.

COROLLARIUM IV.

Quod ſi igitur aquæ effluxuræ ex orificio ω ſubſternatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$; aqua effluxa, in eo receptaculo collecta, æqualibus temporibus æqualiter aſcendet, atque ita, altitudine receptaculi in gradus æquales diviſa, habebitur Clepſydra.

L V I.

SCHOLIUM IV.

Diſſimulandum non eſt hoc genus Clepſydrarum in praxi vix ullum habere poſſe uſum, ob immanem altitudinem quæ danda eſſet vaſi hyperbolico, ut effluxus durare poſſet per temporis ſpatium, etiamſi valde mediocre: quod ex eo ſatis colligi poteſt, quia ſi vas altum eſſet 15 pedes, id eſt, ſi $c = 15$ ped. contineret aquam $2\omega c = 30\omega$, hoc eſt, columnam aqueam cujus

cujus altitudo 30 ped. ſuper baſi ω: cum autem ex orificio ω aqua egrediatur uniformi velocitate debita altitudini 15 pedum, ſitque tempus caſus per hanc altitudinem non niſi unius tantum minuti ſecundi horarii, manifeſtum utique eſt, intra unum minutum ſecundum elabi ex vaſe cylindrum aqueum amplitudinis ω, & longitudinis bis quindecim ſeu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhauſtum iri. Ut nihil jam dicam de impoſſibilitate ſtructuræ vaſis, quod ſupponit ſupremam ſuam amplitudinem infinitam; cui inconvenienti quidem liceret mederi, prolongando vas ſatis prope ad aſymptoton ſuperiorem horizontalem, ut acquirat amplitudinem multo majorem, quam eſt ea foraminis ω, quæ dein amplitudo circumdari poſſet margine uſque ad aſymptoton aſſurgente.

L V I I.

Commodiori modo parari poteſt Clepſydra, per æquabilem deſcenſum aquei ſtrati ſupremi in ipſo vaſe, cujus adeo inveſtiganda eſt figura ad id apta, ut elabente aqua per orificium ω, ſuperficies aquæ reſiduæ in vaſe æqualibus temporibus æqualiter deſcendat; adeo ut, diviſo axe vaſis verticali in partes æquales, ſuperficies dato temporis intervallo percurrat datum numerum partium in ſcala illa ſumptarum. Duo autem ſunt caſus, quibus intentum obtineri poteſt: aut enim amplitudo luminis ω tam parva eſt, ut nullam habeat rationem ſenſibilem ad amplitudinem in vaſe y; aut amplitudo illa ω ſat magna eſt, ut ſit comparabilis cum qualibet y. Priorem caſum, utpote faciliorem atque in praxi utiliorem, nunc tractabimus; de altero poſtea acturi.

L V I I I.

Patet utique æquationem noſtram $(yy - \omega\omega)\, z\, dt - \omega\omega y dz \times \int \frac{dt}{y} = yytdt$ reduci, in caſu quo ω valde parvum eſt ratione y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt = yytdt$, unde $z = t$, hoc eſt, in quolibet vaſe habente foramen ω, nimirum aquam ex illo emanare

nare ea velocitate quæ acquiritur a corpore gravi cadente ex altitudine t, quam aqua reſidua in vaſe habet; cujus rei veritatem [a nobis ſcientifice inventam] Scriptores hydraulici ſuperiorum annorum non niſi per experimenta cognitam habebant. Ea vero ſemel ſuppoſita, facile tunc fuit invenire naturam vaſis conoïdici, foramine ω tanquam ejus vertice deorſum ſpectante, quod hunc præſtet effectum, ut quovis momento ſumma ſuperficies y aquæ reſiduæ deſcendat uniformi vel æquabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi, in eadem quantitate eodemque tempore per duas diverſas amplitudines transfluentis, ſint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum eſt $y : \omega = \sqrt{z} : \frac{\omega\sqrt{z}}{y}$, eritque $\frac{\omega}{y}\sqrt{z}$ deſignans celeritatem ſuperficiei y deſcendentis, quæ celeritas cum debeat eſſe conſtans, ponatur $\frac{\omega}{y}\sqrt{z} = \sqrt{c}$, unde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem, in conoidibus rectis, amplitudines nihil aliud quam circuli, quorum areæ y ſunt ut quadrata radiorum, ſeu applicatarum curvæ genitricis quæ ſui revolutione circa axem deſcribit conoides quæſitum. Nominando igitur applicatam in curva genitrice $= s$, & radium orificii ω circularis $= b$; itemque aream circuli ad quadratum radii, ut n ad 1, erit ſane $y = nss$, $yy = nns^4$, $\omega = nbb$, & $\omega\omega = nnb^4$, atque adeo pro æquatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $t = \frac{cs^4}{b^4}$ ſeu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$; quæ oſtendit curvam genitricem conoidis quæſiti eſſe Parabolam biquadraticam, in cujus puncto infimo, ſeu vertice deorſum ſpectante, orificium ω venam aqueam emittens inſculptum eſſe debet.

COROLLARIUM.

Parameter Parabolæ inventæ eſt $b\sqrt[3]{(b : c)}$, ubi c eſt arbitraria; adeoque tam parva aſſumi poteſt ut $b\sqrt[3]{(b : c)}$ fieri poſſit quantumvis magna; eum in finem, ut amplitudines conoidis fiant incomparabiliter majores quam amplitudo foraminis ω. Sic

Digitized by Google

ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari poteſt vaſi, foramenque ω tam parvæ amplitudinis fieri, ut effluxus aquæ ſat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur; ad quod imprimis attenditur in Clepſydrarum ſtructura.

L I X.

Quod nunc ſpectat ad alterum caſum, ubi foramen ω non inſenſibilis adeo amplitudinis ſupponitur, ut termini in æquatione univerſali $(yy - \omega\omega)\, z\, dt - \omega\omega\, y\, dz \int \frac{dt}{y} = yy\, t\, dt$, in quibus ω reperitur, evaneſcant: oportet ſane ut maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z, & $\frac{2cy\,dy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum ſcilicet finem, ut ſuperficies ſuprema aquæ in vaſe deſcendat celeritate uniformi, quæ celeritas debeatur altitudini arbitrariæ c, quo facto reſultabit æquatio reſolvenda, quæ hæc eſt, nempe $(yy - \omega\omega)\, c\, dt - 2c\,\omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega\, t\, dt$. Sunt quædam indicia, ex quibus ſtatim ſuſpicabar dari quandam curvam algebraïcam, quæ huic æquationi in abſtracto ſumptæ reſpondeat; imo poſt brevem indagationem iſta protinus ſe mihi obtulit $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, & pro curva genitrice hæc $s^4 = \frac{b^4(t+3c)}{c}$, quæ rurſus eſt Parabola biquadratica, ſed cujus abſciſſæ t initium ſumunt, non ab ipſo ejus vertice, verum intra eundem in axe, in diſtantia $= 3c$. Interim inventa æquatio $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, quæ quidem in abſtracto ſatisfacit, ideo ſatisfacere non poteſt in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet; quæ conditio in hoc conſiſtit, ut exiſtente $t=0$, tota æquatio in nihilum abeat, ac proin etiam $\int \frac{dt}{y}$ debeat evaneſcere, id quod non fit per æquationem $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$.

Nil

Nil quippe novi eſt, ut quædam propoſitio, quæ in theſi eſt vera, non ſemper quadret in hypotheſi; cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem ſumendo in genere, attendi neceſſario non requiritur. Vera autem curva genitrix pro quæſita figura vaſis conoidici reperietur, ſi qua arte univerſaliter reſolvi poteſt æquatio $(yy - \omega\omega)\, c\, dt - 2c\,\omega\omega\, dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t\, dt$; ita ut y per t, vel vice verſa t per y determinetur; ſive id fiat in terminis finitis algebraïcis, vel exponentialibus, ſive demum per quadraturas. Hoc autem negotium, cum hujus loci non ſit, aliis, quibus vacat, perficiendum relinquo.

L X.

Scholium V.

Opportuna jam datur occaſio examinandi cataractam *Newtonianam*, quam deſcribit Auctor in Editione ſecunda *Princip. Math. Phil. Nat. Prop.* 36. Lib. II. pag. 303 & ſeq. Ubi ſtatim animadvertendum formam quam Newtonus tribuit ſuæ cataractæ ABNFEM [vid. *Fig.* 16, quæ *Newtoniana* eſt in loco allegato] prorſus eandem eſſe quam ſupra inveni [§. LV] pro figura Clepſydræ, quæ aquam per orificium ω emittit celeritate uniformi. Notemus jam, quod ipſe Newtonus agnoſcit, in tali cataracta quodlibet ſtratum MN, ea cum velocitate deſcendere, quam acquireret ſi libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO, nulla alia vi quam ſua naturali gravitate animatum: unde ſequitur ſtrata quidem inter ſe contigua manere deſcendendo, ſed ita tamen, ut in ſe mutuo nullam vim exerceant, nec premendo nec reſiſtendo, æque ac ſi ſingula pondere ſuo ſolitaria deſcenderent. Compreſſio itaque illa, de qua ſupra egi in peculiari capite, nulla erit per totam cataractam *Newtonianam*, neque proin de vi preſſionis, quam vocavi π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipſa mea formula quam pro π dedi in §. XII. Si

Tab. XCI. N°. CLXXXVI. Fig. 16.

enim illa ad caſum præſentem applicetur, comperietur, ut dixi, valorem ipſius π eſſe nullum per totam cataractæ altitudinem. Quid ergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod ſi latera cataractæ AME, BNF eſſent rigida, inſtar infundibuli, cum quo Newtonus comparat illam, atque ſi quocunque in loco, facto foramine, inſeratur fiſtula ad ſitum verticalem erecta, nihil aquæ transfluentis ex cataracta in fiſtulam ſit ingreſſurum & aſcenſurum; ſicuti fieret, ſi premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrſum verſus axem HG a pondere aquarum ſtagnantium in AMEC, BNFD, per ordinariam legem hydroſtaticam, quæ docet preſſiones in ſingulis locis M, N exercitas eſſe proportionales altitudinibus HO. Cum autem latera cataractæ non ſint rigida, & preſſiones iſtæ aquarum ſtagnantium nullas habeant preſſiones ſibi oppoſitas ab aquis transfluentibus; oportet ſane ut aquæ, quæ ſtagnare ponuntur, & continuo premunt, ſortiantur ſuum effectum, hoc eſt, ut ſe ingerant in cataractam, commiſceantque ſeſe cum ipſis aquis fluentibus. Ergo figura cataractæ deſtruetur, turbabitur, aliterque ſecundum noſtram explicationem aquæ deſcendunt.

Ergo explicatio *Newtoniana*, utpote legibus hydroſtaticis adverſa, ſubſiſtere non poteſt.

EPIMETRUM.

De vi per quam vas retrourgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali.

Veritas eſt receptiſſima *Actionem eſſe aqualem reactioni*; hoc eſt, vim quamlibet externam, quæ agit in corpus quoddam aliudve obſtaculum, ſimul quoque agere retrorſum in plagam directe oppoſitam, quemcunque habeat vel inveniat obicem; ſicuti fieri videmus, quando ex. gr. elaſtrum tenſum inter duo corpora poſitum, ſtatim ac ſoluto vinculo relaxari incipit, æquis viribus pellit corpus utrumque, unum antrorſum, alterum retrorſum.

Google

ſum. Nec aliter fieri obſervamus, dum globus ferreus per accenſum pulverem pyrium magna violentia ex tormento bellico exploditur; ſimul etiam ipſum tormentum in contrariam partem repelli, quamvis multo minori impetu, ob ingentem maſſam tormenti reſpectu ipſius globi.

Pari modo, cum videmus aquam explodi ex vaſe in directione horizontali, ſive id fiat immediate per foramen in latere vaſis apertum, ſive mediante aliquo canali ſitum horizontalem habente, concludere debemus adeſſe aliquam vim ſeu potentiam, quæ exploſionem hanc producat, quæ proin æque valide agat premendo retro in latus vaſis foramini extremo canalis directe oppoſitum. Id unum igitur diſpiciendum eſt, ut rite æſtimetur quantitas ſeu menſura illius potentiæ ultro citroque urgentis. Occurrunt menti ſtatim variæ ideæ, quæ primo intuitu videntur deducere ad quæſitum; ſed cum ſingulæ exhibeant ejus rei menſuras a ſe invicem diſcrepantes, incertum eſt, an aliqua ex illis ſit vera, aut potius annon ſingulæ a vero abludant. Quocirca tutiſſima erit via atque certiſſima, quam inibimus, ſi ex ipſis principiis in hac noſtra Theoria hydraulica ſtabilitis immediate eruamus quæſitum.

Hunc in finem, conſideremus quæ ab initio dicta ſunt de tranſlatione virium motricium ſingulorum ſtratorum aqueorum Fm, Nl, (*Fig.* 10) &c. ad amplitudinem communem ſupremam Ee; ubi oſtenſum eſt iſtas vires, ita collectas in unum, præſtare eundem effectum ad expellendum per aperturam Cc liquorem, licet gravitate deſtitutum, idque eadem velocitate ſingulis momentis, qua id fit modo naturali per gravitatem liquoris ſine tranſlatione deſcendentis. Nunc vero clare concipimus, tranſlationem illam ad amplitudinem ſupremam Ee eſſe arbitrariam; ſiquidem ex eodem principio hydroſtatico, quod aſſumſimus, facile colligi poteſt, poſſe transferri vires motrices ſtratorum ſingulorum ad aliam quamcunque aſſumtam amplitudinem ex. gr. ad Ff, quam ut datam ſeu conſtantem conſiderare licet; nec eſt quod dicas, vires ad illam tranſlatas agere tantum premendo ſtrata inferiora, non vero ſuperiora. Nam dum ſtrata

TAB. XC. *Fig.* 10.

ta contigua ita inter ſe adhærent, ut unum ſine altero de loco moveri non poſſit, haud ægre concipimus, quod propulſa maſſa aquea inferior FCcf etiam ſuperiorem EFfe ſimul quaſi ſecum trahere, atque cum ea effectum potentiæ prementis in Ff partiri debeat; adeo ut non alia velocitate elapſurus ſit liquor per Cc, quam ſi ſtratorum vires motrices ad amplitudinem ſupremam Ee fuiſſent tranſlatæ.

His probe perceptis, intelligamus jam vires ſtratorum transferri, non ad amplitudinem ſupremam Ee, neque ad aliquam intermediam Ff, ſed ad infimam Cc, ita ut potentia reſultans ex collectione omnium virium ſtratorum, dum agit immediate tantum in ſtratum infimum, hoc tamen totam maſſam aqueam ECce in motum concitare debeat; eadem prorſus lege, ac ſi vires motrices ad amplitudinem ſupremam Ee, vel ad aliam quamcunque Ff, fuiſſent tranſlatæ. Eſt autem, ex vulgari principio hydroſtatico, ſumma virium motricium ad quamcunque amplitudinem tranſlatarum proportionalis ipſi amplitudini: proinde, faciendo ut Ee ad Cc, ſeu ut h ad ω, ita gha, ſeu pondus cylindri aquei cujus baſis eſt Ee & altitudo verticalis AB, ad $g\omega a$, ſeu ad pondus cylindri cujus eadem eſt altitudo a ſeu AB, & baſis ω ſeu Cc: dicatur hoc pondus $= p$, atque ſic habemus quantitatem preſſionis p, quacum aqua per orificium Cc expellitur, & quæ pellendo antrorſum, ſimul nititur retrorſum in directione communi.

TAB XCI. N°. CLXXXVI. *Fig.* 13. Applicatio ut fiat: Eſto vas cujuſcunque figuræ ABD (*Fig.* 13) inſtructum canali oblongo CEK, non multum amplo, in ſitu horizontali jacente. Sit, brevitatis ergo, vaſis centrica verticalis, nec refert qualemcunque habeat canalis figuram, ſive ſit conoïdicus truncatus, ſive ex pluribus tubis compoſitus, cujus extremum orificium in K per quod aqua expellitur $= \omega$. Poſito jam vaſe conſtanter pleno, vidimus ſupra, pro determinatione velocitatis v aquæ erumpentis, hanc haberi æquationem $\frac{vv(hh - \omega\omega)}{2h} + \frac{hM\omega v dv}{dx} = gha$; ſi ſcilicet vires motrices tranſferuntur ad ſupremam amplitudinem h, ſeu ad AD; unde ſi

eaſ-

eaſdem transferamus ad amplitudinem infimam ω prodibit $\frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}+\frac{M\omega\omega vdv}{dx}=g\omega a=p$, ſeu ponderi cylindri aquei cujus baſis eſt ω & altitudo $=a=$ altitudini aquæ ſupra horizontalem BK. Finge igitur in vaſis pariete BA, ſuperficieculam Bb e regione oppoſitam & æqualem foramini K, patietur hæc Bb a retroactione potentiæ fluidum expellentis preſſionem ipſi ſimilem & $=p$.

Hæc quidem retropreſſio p in Bb exercita naſcitur in tota ſua intenſitate, ſtatim ac moveri incipit; hoc eſt, a primo motus momento, ubi velocitas eſt adhuc infinite parva, uſque dum pervenit ad gradum æquabilitatis, vis illa retropreſſionis conſtanter eſt eadem. Qualiſcunque enim eſt v, ſemper habetur $g\omega a$ ſeu $p=\frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}+\frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; unde ab initio fluxus, ubi v eſt $=0$, ſeu infinite parva, erit idem $p=\frac{M\omega\omega vdv}{dx}$; ubi vero v pervenerit ad uniformitatem, ita ut dv ſit $=0$, erit pariter $p=\frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}$. Ex quo ſequitur fore $\frac{M\omega\omega vdv}{dx}=\frac{vv\omega(bb-\omega\omega)}{2bb}$, ſumendo ſcilicet in primo termino v pro velocitate initiali, in altero vero v pro velocitate uniformi. Porro vel hinc quoque patet retropreſſionem noſtram eſſe æqualem ipſi ponderi cylindri aquei habentis baſin ω, & altitudinem eam quam habet aqua in vaſe ſupra horizontalem BK, quia notiſſimum principium hydroſtaticum docet amplitudinem CE, per quam ingreditur aqua in canalem CK, premi a pondere incumbentis columnæ aqueæ, cujus baſis eſt ipſa CE atque altitudo ſupremæ ſuperficiei AD ſupra EC. Poſita itaque amplitudine CE $=m$, & altitudine aquæ in vaſe $=a$; erit preſſio quæ urget aquam in canali a CE verſus K $=gma$: factoque, ut amplitudo CE ad amplitudinem aperturæ K, hoc eſt, ut m ad ω, ita gma ad $g\omega a$, erit, per eadem principia hydroſtatica, vis $g\omega a$ illa ipſa quæ aquam cogit ad eruptionem

per

per orificium ω: huic ergo vis directe oppoſita ex reactione naſcens, agenſque in Bb, pariter erit $= g \omega a = p$. *Q. E. D.*

COROLLARIUM.

Liquet in vaſis conſtanter plenis vim iſtam retropreſſionis eſſe invariabilem, a primo effluxus momento ad æquabilem uſque velocitatem, utpote ſemper $= g \omega a$. Errant igitur qui illam ſtatuunt variabilem, minorem nempe in effluxu tardiori, majorem in velociori, maximam in æquabili.

N°. CLXXXVII.

PROBLEMA HYDRAULICUM.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig. 1.*

A B *eſt tubus cylindricus, ſeu uniformiter amplus & utrinque apertus in* A *&* B. *Sit ille perpendiculariter aliquouſque immerſus fluido infinito cujus ſuperficies eſt* LR, *& pars tubi immerſa* BC: *Concipiatur totus tubus* AB *eodem fluido plenus, ita ut obducto pollice ad* A *nihil effluere poſſit. Quæritur nunc, ſi remoto pollice libertas detur fluido deſcendendi; quouſque infra* LR *ſit deſcenſurum, & quouſque poſtea ſupra* LR *ſit iterum aſcenſurum; hoc eſt, poſito* P *pro termino deſcenſus &* O *pro termino ſubſequentis aſcenſus, quæritur longitudo* CP, *ut & longitudo* CO?

SOLUTIO.

Conſiderandum primo eſt, partem fluidi in CB contentam nullius eſſe ponderis, vel potius ejus conatum deſcendendi a gravitate oriundum deſtrui a preſſione contraria fluidi tubum ambientis; atque ita ſtatim ac aliquid fluidi inter deſcendendum ex parte prominente AC deſcendit in partem tubi ſubmerſam, illud cenſendum eſt protinus amittere ſuam gravitatem; adeo ut tota vis acceleratrix, ſingulis momentis, dependeat

deat tantum a pondere ejus partis fluidi quæ in tubo eminente adhuc exiſtit. Unde ſtatim patet deſcenſum fluidi debere accelerari, quamdiu aliquid eſt in A C; proinde maximam velocitatem fore, cum deſcenderit ad horizontalem L R; deinde iterum retardari debere, ob prævalentem preſſionem fluidi ambientis; donec velocitate penitus deſtructa in P, cogatur fluidum a preſſione externa ambiente rurſus aſcendere ad O, atque habiturum in C rurſus maximam velocitatem: poſtea ab O altera vice delabetur, ſed non ad tantam qua prius profunditatem; mox iterum in altum aſcenſurum: & ita deinceps continuabit oſcillando. Quæritur itaque primus deſcenſus ad P, primuſque aſcenſus ſubſequens ad O; utpote a quibus omnes reliqui dependent.

Quod attinet ad determinationem deſcenſus; habetur ea per duplicem viam, vel directe ex principiis mechanicis, vel indirecte ex natura virium vivarum. Rem utroque modo ita perago.

PRIMUS MODUS.

Principia mechanica docent, incrementum momentaneum velocitatis haberi, ſi elementum temporis multiplicetur per vim acceleratricem: elementum autem temporis habetur, dividendo elementum ſpatii percurrendi per velocitatem acquiſitam. Sit itaque tota longitudo tubi A B $= a$, pars immerſa C B $= 1$, pars quælibet A E a fluido deſcendente percurſa $= x$, gravitas naturalis, qua ſcilicet corpora ad deſcenſum naturaliter animantur vel ſollicitantur, $= g$. Vocetur velocitas acquiſita fluidi delapſi ex A in E $= v$. His ita nominatis, erit pondus fluidi totum tubum adimplentis $= ga$; pondus partis C B $= g \times 1 = g$; pondus partis C E $= g \times$ C E $= ga - g - gx$. Nunc quia pondus partis C B ab æquivalente preſſione fluidi ambientis deſtruitur, reſtat tantum pondus fluidi C E, quod omne fluidum reſiduum E B ad deſcendendum accelerare debet. Erit itaque vis acceleratrix $= \frac{g \times CE}{BE} = \frac{ga - g - gx}{a - x}$; quare $\frac{ga - g - gx}{a - x}$

$\times \frac{dx}{v} = dv$; proinde $vdv = \frac{gadx - gdx - gxdx}{a - x} = gdx - \frac{gdx}{a-x}$; & integrando $\frac{1}{2}vv = gx + gl(a - x) - gla$. [*Nota*. Adjicio hic gla correctionis gratia; ut nimirum exiſtente $x = 0$, ubi velocitas nulla eſt, evaneſcat ejus valor inventus]. Ut itaque ſciatur quouſque liquor in tubo deſcendere debeat, ut iterum v fiat $= 0$; oportet facere $x + l(a - x) - la = 0$; eritque, capiendo AP = radici hujus æquationis, punctum P terminus in quo deſcenſus finitur.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 2. Radix vero x ope Logarithmicæ habetur hoc modo: Sit Logarithmica HCG, cujus ſubtangens $= 1 =$ BC = parti immerſæ tubi. In BC prolongata capiatur BA = longitudini totius tubi, quouſque nempe ab initio plenus eſt liquore, ex A ducta aſymtoto BL parallela AH, occurrens Logarithmicæ in H, atque ex hoc puncto H acta tangenti in C parallela HG, quæ ſecet curvam in G; unde porro ducatur GP aſymtoto BL parallela: erit punctum P terminus ad quem deſcendet fluidum; & in quo deſcenſus finietur. Demonſtratio eſt facilis. Quia enim $AH = lAB = la$, & $PG = -lPB = -l(AB - AP) = -l(a - x)$, & $AH + PG = AP$; erit $la - l(a - x) = x$; unde $x + l(a - x) - la = 0$. Quæ eſt ipſiſſima æquatio conſtruenda. *Q. E. D.*

SECUNDUS MODUS.

TAB. XCI. N°. CLXXXVII. *Fig.* 1. Ex Theoria virium vivarum idem invenio hunc in modum. Nominando hic iterum (*Fig.* 1) $AB = a$, $CB = 1$, pars indeterminata deſcenſus $AE = x$. Sit altitudo quædam verticalis z, per quam grave libere deſcendens acquireret velocitatem æqualem illi quam fluidum in tubo delapſum ex A in E acquirit; erit ergo hæc velocitas $= \sqrt{z}$. Abſcindendo autem BF = AE; clarum eſt per deſcenſum fluidi ex A in E, columnam AF eſſe tranſlatam in EB, & tunc ſingulas ejus particulas habere velocitatem $= \sqrt{z}$; quocirca omnis materia fluidi hanc columnam EB conſtituens habebit vim vivam =

(*a*:

$(a - x) \times \surd z \times \surd z = az - xz$; cui addendæ ſunt particulares vires vivæ collectim ſumtæ ſingularum particularum in ſpatio BF contentarum, quæ, deſcendente fluido ex A in E, ſucceſſive ex orificio B egreſſæ ſunt, quarum utique aggregatum eſt $= \int zdx$. Ergo quantitas vis vivæ totius materiæ in motu conſtitutæ $= az - xz + \int zdx$.

Quia vero hæc vis viva debet eſſe effectus gravitatis partis fluidi ſupra horizontem LR exiſtentis, oportet utique quantitatem illam vis vivæ $az - xz + \int zdx$, tanquam effectum, eſſe æqualem ſuæ cauſæ adæquatæ, hoc eſt, ſummæ productorum quæ fiunt multiplicando ſingulas fluidi deſcendentis particulas per ſuam cujuſque altitudinem, per quam quælibet a gravitate ſua deprimitur. Sumta igitur CD = AE, erit DC deſcenſus columnæ AD, adeoque AD × DC exprimit vim vivam a gravitate oriundam materiæ fluidi in columna AD contentæ, poſtquam deſcendit in ſitum EC, ubi partes inferiores jamjam infra horizontem delapſuræ incipiunt ſuam gravitatem amittere. Quod autem attinet ad particulas fluidi in DC contentas; ſingulæ ſingulares deſcenſus faciunt, antequam ad horizontem LR perveniant, pro earum diverſis diſtantiis ab LR, quæ diſtantiæ cum exprimantur per indeterminatam x, & quælibet particula ei reſpondens per dx; erit productum xdx vis viva cujuſlibet particulæ a gravitate oriunda, adeoque $\int xdx$ ſeu $\frac{1}{2}xx =$ vi vivæ collectim ſumtæ omnium particularum in CD contentarum; quæ ergo addita ad AD × DC, hoc eſt, ad $(a - 1 - x) \times x$ ſeu ad $ax - x - xx$, habebitur vis viva totalis a gravitate oriunda $= ax - x - \frac{1}{2}xx$; per conſequens æqualis inventæ vi vivæ ex motu collectæ $az - xz + \int zdx$. Differentiando itaque provenit $adx - dx - xdx = adz - xdz$, unde $dz = dx - \frac{dx}{a - x}$; rurſuſque integrando $z = x + l(a - x) - la$. Sed z eſt proportionale quadrato velocitatis quæſitæ vv. Ergo vv, ſeu ſi mavis $\frac{1}{2}vv = x + l(a - x) - la$; omnino ut ſuperiori modo directo invenimus, quod

 nempe

Digitized by Google

nempe quadratum velocitatis fluidi deſcendentis per altitudinem x debeat eſſe proportionale ipſi $x + l(a - x) - la$.

Ut nunc porro determinetur punctum O ad quod, finito deſcenſu, iterum aſcendet; advertendum eſt ante omnia, quod liquor ad ſupremum uſque punctum A eſſet aſcenſurus, ſi particulæ eædem, quæ inter deſcendendum ex orificio B egreſſæ fuerant, nunc iterum, inverſo ordine, retentis ſuis velocitatibus acquiſitis, ſingulæ per orificium B ſubintrarent, & ita quælibet cum præcedentibus junctim in altum protruderetur ab ambientis fluidi preſſione; ſicuti accidit in omni genere oſcillationum, quæ, ſepoſita reſiſtentia, eoſdem ſemper itus & reditus faciunt. Sed quoniam particulæ fluidi egredientes, ſtatim poſt egreſſum, intra ambientem liquorem dilabuntur, vel hinc inde divagantur; manifeſtum eſt eaſdem illas particulas ſuis acquiſitis velocitatibus non amplius tubum ſubingredi, ſed eorum loco alias, quæ orificium ſine motu obſident, ſucceſſive in altum rapi, cum præcedenti columna fluidi; quæ particulæ itaque, cum ab initio ingreſſus nullum adhuc habeant motum, id efficient, ut columna fluidi præcedens cum ipſis adhærentibus ſegnius aſcendat, quam faceret, ſi particulæ ingrederentur cum aliqua velocitate quæ aſcenſum juvaret. Hinc ergo liquor non ad A, ſed ad punctum aliquod inferius O aſcendere valebit. Hujus puncti O altitudo CO ſupra horizontem ut cognoſcatur; concipiamus tantiſper particulas ex orificio B dilapſas intra ambientem liquorem, in quo nullam habeant gravitatem, ſurſum dirigi; adeoque, nulla ſuæ velocitatis jactura facta, ad horizontem LR pervenire; ex quo poſtea ſingulæ, recuperata gravitate, in altum proſiliant, quantum poſſunt pro ſua cujuſque velocitate, occupantes ordine locum ſecundum aliquam curvam LMN. Jam vero, quia quantitas virium vivarum conſervari debet, neceſſe eſt, ut ſumma productorum ſingularum particularum in CO contentarum per ſuos reſpective aſcenſus ſupra horizontem LR, una cum aggregato productorum quæ fiunt pariter multiplicando ſingulas particulas in curva

LMN

LMN per ſuos aſcenſus & diſtantias ab LR, ſit æqualis ſummæ productorum ſimilium totius columnæ AC: hanc enim liquor habuit ab initio deſcenſus. Quocirca, ſi a ſumma productorum columnæ AC auferatur ſumma productorum particularum LMN, remanebit ſumma productorum in columna CO, & hinc ipſa altitudo CO innoteſcet. Nam ſumma prior $= \frac{1}{2} AC \times AC = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2}$; altera $= \int z dx = ax - x - \frac{1}{2} xx - az + xz =$ [in caſu quo x, ſeu indeterminata AE fit AP, ubi z evaneſcit] $ax - x - \frac{1}{2} xx$; adeoque $\frac{1}{2} aa - a + \frac{1}{2} - ax + x + \frac{1}{2} xx =$ ſummæ productorum in $CO = \frac{1}{2} CO^2$: unde $CO = \sqrt{(aa - 2a + 1 - 2ax + 2x + xx)} = 1 + x - a =$ [in eodem hoc caſu ubi $x = AP$] CP. Ex quo patet fluidum in tubo ad tantam altitudinem CO aſcendere ſupra horizontem LR, ad quantam profunditatem CP infra LR immediate prius deſcenderat.

COROLLARIUM.

Cognita CO, cognoſcetur, per constructionem ſupra datam, deſcenſus ſecundus, & ſubſequens aſcenſus ſecundus: ex hoc poſtea deſcenſus & aſcenſus tertii: atque ita porro excurſiones ſingularum oſcillationum limitari poterunt.

N^us. CLXXXVIII

AD CHRONOLOGIAM PERTINET.

De die, qua celebrandum Feſtum Paſchatis, Anno 1724 *.

LEgi, PATRES CONSCRIPTI, Concluſum de Celebratione Paſchatis Anni proximi 1724: quod exaratum eſt die 30 Januarii 1723, a Conſiliariis & Legatis Plenipotentiariis Electorum, Principum, & Statuum Evangelicorum in Comitiis *Sacri Romani Imperii*; & ab ipſis cum Illuſtriſſima *Tigurinorum* Republica communicatum, cujus Ampliſſimus Magiſtratus illud vobis, Magnifici Domini, perſcribi curavit. Ejus contenta ſumma ponderavi attentione; & ad gratioſa Veſtra Juſſa, hoc $\frac{13}{24}$ Februarii die hujus Anni 1723, ſequentem expoſitionem ſubmiſſo obſequio offero.

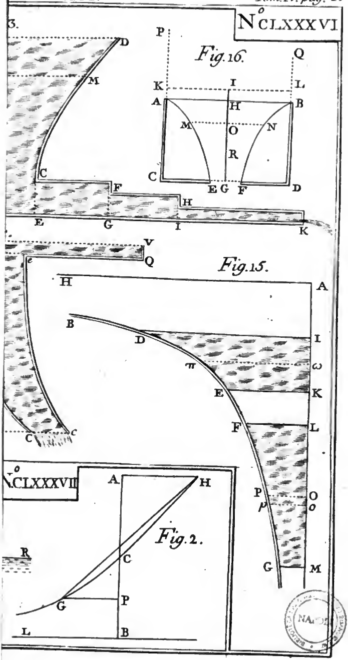
Ante omnia ſciendum eſt, hujus rei diſquiſitionem non Aſtronomice ſolum, verum etiam Theologice & Politice inſtitui; & hinc a me ad quæſtionem propoſitam non perfecte reſponderi poſſe; ſed ſolummodo, quantum ea ad Aſtronomiam ſpectat.

Primo itaque, quod attinet ad caput rei, unde reliqua omnia dependent: An nimirum plenilunium Paſchale [quo illud intelligitur plenilunium, quod aut ipſo æquinoctii verni tempore contingit, aut illud proxime ſequitur] anno Chriſti 1724, in 8 Aprilis diem incidat. Reſpondeo ad hanc quæſtionem *Affirmando.*

Ut

* Diſſertatio iſta, Germanico idiomate ſcripta ad Ampliſſ. Senatum *Baſileenſem*, a quodam Auctoris Diſcipulo latine verſa eſt.

Tab. XCI. *Tom. II. pag.* 494.



Digitized by Google

Ut autem appareat, hanc meam affirmationem nequaquam niti nuda illorum Aſtronomorum & Mathematicorum aſſertione, quorum in Concluſo Ratisbonenſi ſit mentio; opus omni modo eſſe judicavi, ut ipſe prædicti plenilunii diem, horam, & minutum proprio marte ſupputarem, ſine auxilio ullarum Ephemeridum ab aliis computatarum, utpote quibus ſemper tuto credi non poteſt. Facto igitur calculo, inveni prædictum plenilunium Paſchale anni 1724, hic & in omnibus locis ſub noſtro meridiano ſitis, fore die Sabbathi 8 Aprilis, hora 4, minuto 21, poſt meridiem, poſtquam æquinoctium vernum, id eſt, ingreſſus Solis in Signum Arietis, inciderat in 2 minutum horæ 10 antemeridianæ, diei 20 Martii.

Secundo, Jam porro quæritur, an hoc plenilunium Paſchale, ſi per Cyclos fiat computus, incidat, in ſequentem demum Solis [nonum nempe Aprilis] diem, ut volunt illi Aſtronomi, quorum nomina recenſentur in Concluſo Ratisbonenſi. Ad hanc etiam quæſtionem *affirmando* mihi eſt reſpondendum; quoniam Regula vulgaris inveniendi plenilunium Paſchale ope Epactarum id liquido monſtrat; ita ut exiguo valde opus ſit labore.

Mentionem hic facio Epactarum, & non Cycli decemnovenalis, id eſt, Cycli numerorum aureorum, ita dictorum. Tantum enim abeſt, ut Pontifex GREGORIUS XIII hunc Cyclum, ut quidam perperam aſſerunt, in reformatione *Calendarii Juliani* introduxerit, vel præſcripſerit, ut potius Pontifex iſte hunc ipſiſſimum Cyclum, antea in Calendario Juliano uſurpatum, utpote vitioſum aboleverit, & illius loco Epactas introduxerit, quarum ope novilunia & plenilunia multo exactius & accuratius determinantur, quæque proin etiam in *Calendario Gregoriano*, inde ab anno 1582 uſque in hodiernum diem adhibentur.

Quantumvis prope autem Epactæ novilunia & plenilunia indigitent; impoſſibile tamen eſt, ut ſemper præciſe in eundem diem coincidant cum veris & ope calculi aſtronomici inventis noviluniis & pleniluniis; nec ullus unquam Cyclus reperietur tam accuratus, qui non aliquando, ſpatio unius diei, differat.

ferat a computo aſtronomico, &, una vel altera vice, diem Solis loco diei Saturni exhibeat; cujus erroris quatuor in hoc decimo octavo Seculo habebimus exempla, in annis nempe 1724, 1744, 1778, & 1798.

Quantam autem hæc aberratio unius diei, in determinando Paſchatis Feſto, producet differentiam, ſi illud ſecundum decreta *Concilii Nicæni primi* celebrandum eſt, quod, anno Æræ *Dionyſianæ* 325, a 318 Epiſcopis habebatur, ex argumento horum Decretorum patebit; quod ſequentibus duobus capitibus comprehenditur:

1°. Quod Chriſtiani hoc Feſtum nunquam debeant eodem die celebrare, quo Judæi Paſcha ſuum celebrant.

2°. Cum itaque Judæi Paſcha ſuum ipſo illius plenilunii die celebrent, quod vel in ipſum æquinoctium vernum incidit, vel illud proxime ſequitur; Chriſtiani ſuum Paſchatis feſtum celebrare decreverunt die Solis immediate ſequente: quod ſi vero Paſcha Judaïcum in Solis diem incidat; tum illud poſt octiduum demum celebrare ſtatuerunt.

Hinc patet quidem, cum verum plenilunium Paſchale, anno proxime ſecuturo 1724, incidat in 8 Aprilis diem, qui dies erit Sabbathi, quo proinde Judæi Paſcha celebrare deberent; quod Feſtum Paſchatis a Chriſtianis die Solis proxime ſequente, nimirum nono Aprilis, ſine ulteriore mora celebrandum ſit; vi illius, quod *Concilium Nicænum* in poſteriore capite decrevit, quo etiam Concluſum Ratisbonæ exaratum nititur.

Quia vero ignotum eſt, qua regula Judæi per Orbem terrarum diſperſi ad determinandum plenilunium Paſchale utantur; conjici poteſt, eos forſitan Cyclum Epactarum adhibere, tanquam rem quæ ſine difficiliore calculo etiam a rudioribus peragi poteſt; cum nulli inter ipſos magni nominis Mathematici exiſtant, qui ipſis verum plenilunii tempus, ope calculi aſtronomici, indigitare queant. Quod ſi ita fuerit; Judæi Paſcha ſuum nono Aprilis die, & conſequenter, eodem tempore eſſent celebraturi, quo Chriſtiani Auguſtanæ Confeſſionis Paſcha ſuum celebrarent; quod priori capiti intentionis *Concilii Nicæni*

Nicæni adverſaretur: quod caput ſane Patribus hujus Concilii multo magis curæ fuit, quam poſterius, ob odium irreconciliabile veterum Chriſtianorum in Judæos; quod tam ingens fuit, ut Chriſtiani Orientales, ſive Aſiatici, qui Paſcha ſuum eodem cum Judæis die celebrarunt, [hinc Quarto-decimani dicti] reliquis abominationi eſſent, & tanquam Schiſmatici ex Eccleſia ejicerentur.

In hoc caſu igitur Pontificii, qui Paſcha ſuum anno 1724, 16 Aprilis die celebrabunt, in poſterius quidem; Proteſtantes autem in prius & majoris momenti caput impingent. Meo itaque judicio melius fuiſſet, [quandoquidem omnino a Methodo *Gregoriana* determinandi Paſcha recedendum fuit] ſi Domini Plenipotentiarii Comitiorum Ratisbonenſium, neque Statuta *Concilii Nicæni* eſſent ſecuti, neque Cyclis *Gregorianis* uſi: ſed potius, neglecto prorſus plenilunio, quendam Solis diem in principium Veris incidentem, exempli gratia, primum poſt æquinoctium vernum, aut poſt 21 Martii determinaſſent; ac decreviſſent, ut eo die in poſterum annuatim Feſtum Paſchatis celebraretur. Hac facili methodo, cujus ope quivis plebeius, etiam abſque Calendario, quovis anno ſcire poſſet quo die Paſcha ſit celebrandum, omnes lites & difficultates tolli poſſent; quæ certe nonniſi ſuperfluis & minime neceſſariis ſubtilitatibus ortum ſuum debent, ſicque ſummo jure vocari poſſunt difficiles nugæ. Vi hujuſmodi ſubtilitatum, in nimis rigida Canonum *Concilii Nicæni* obſervatione, accidere poſſet, ut, in quibuſdam locis Orbis Chriſtiani, ubi Concluſum Ratisbonenſe obſervaretur, adhuc dies eſſet Saturni, in aliis autem jam dies Solis, eo ipſo momento quo verum aſtronomicum plenilunium contingeret. Priores itaque, vi hujus Concluſi, eo ipſo die Solis; poſteriores vero, demum poſt octiduum, Paſcha ſuum deberent celebrare; unde mirabilis orietur confuſio.

Hoc autem revera contingere poſſe illi experientur, qui anno 1778 erunt ſuperſtites; quo anno æquinoctium vernum, ſecundum computum meum [ſalvo tamen errore calculi], hic

& in omnibus civitatibus ſub noſtro meridiano ſitis, erit viceſimo die Martii, hora pomeridiana, minuto 49, ſecundum horologia extra urbem adhiberi ſolita †: unde verum plenilunium Paſchale incidet in 11 diem Aprilis proxime ſequentem, qui erit dies Saturni, hora 9 pomeridiana, minuto 56, ſecundum eadem horologia: quo tempore autem media nox in aliis regionibus Orbis Chriſtiani multo magis verſus ortum ſitis jam præterierit, quarum incolæ proinde jam diem Solis habebunt, dum apud nos adhuc dies Saturni erit; quod omnibus notum eſt, qui Aſtronomiam & Geographiam vel e limine tantum ſalutarunt.

Sic, exempli gratia [locum enim nominabo intra Europæ fines ſitum] dicto plenilunii Paſchalis tempore, *Moſcuæ*, [quæ eſt Metropolis potentiſſimi *Ruſſorum* Imperatoris] jam ſeptem minuta poſt mediam noctem erunt præterlapſa. *Moſcovitæ* itaque, etiamſi ſupponamus eos ſe quoque Concluſo Ratisbonenſi accommodare, nihilominus tamen Paſcha ſuum octo diebus ſerius quam nos eſſent celebraturi. Niſi omnium locorum incolæ, neglecto proprio meridiano, communem aliquem meridianum ad calculum dierum, horarum & minutorum adhibere vellent: quem in finem, Corpus Evangelicum Ratisbonæ neceſſario meridianum Uranoburgicum proponit, ſub quo olim Celeberrimus *Danorum* Aſtronomus *Tycho* BRAHEUS obſervationes ſuas condidit. Interea probe ſciendum eſt, nullum meridianum præ alio aliquam prærogativam habere in rei natura fundatam, hincque ſpem non eſſe, ut omnes populi, qui ex ſcopo Corporis Evangelici calculo aſtronomico, utpote cæteris accuratiore, uti vellent, ſe adigi patiantur ad recipiendum alium meridianum a ſuo diverſum, in determinandis diebus & horis. Mihi certe perſuadere non poſſum, vel *Ruſſorum* Imperatorem, vel ejus Patriarcham, conceſſurum ut is dies qui jam a dimidio quadrante horæ apud ipſos cæpit eſſe dies Solis, nihilomi-

† Notum eſt horologia *Baſileæ* una citius hora quam extra urbem tempus indicare: adeo ut in Urbe hora ſecunda numeretur quo momento extra Urbem prima.

hilominus dies Saturni vocaretur; quæ res eſſet metamorphoſis admodum ridicula, non abſimilis illi, qua olim ſummus quidam Pontifex, occaſione exortæ tum in populo univerſalis lætitiæ, dicitur, pro auctoritate ſua, diem Veneris mutaſſe in diem Jovis, ut populo permitti poſſet eſus carnis & libertas genio indulgendi. His omnibus accedit, quod ſi certus quidam meridianus præſcribatur, cui omnes qui jam Concluſum Ratisbonenſe ſequuntur ſe accommodare debeant, in locis ab hoc meridiano procul diſſitis Paſcha non poterit celebrari ſecundum tenorem rigidum Decretorum *Concilii Nicani*, in annis ſupradictis; quæ tamen decreta in Concluſo Ratisbonenſi pro fundamento adducuntur. Unde ſequitur nimium rigorem parere contradictionem; quoniam accidere poteſt, ut principia, iiſque innixa praxis a Ratisbonenſibus præſcripta, ſecum invicem conſiſtere nequeant. Hoc, & alia hujuſmodi aſyſtata ſatis oſtendunt melius fore, ſi vel Dominica vigeſimam primam diem Martis proxime ſequens, vel alia quædam, methodo ſupra explicata, celebrationi Paſchatis aſſignaretur, & inde omnia hinc pendentia Feſta determinarentur; neglectis tam Canonibus *Concilii Nicani*, quam operoſa ſupputatione plenilunii Paſchalis ope calculi aſtronomici peragenda, ut & Cyclo Epactarum a GREGORIO XIII adhibito. Cum enim Lex Moſaïca ceremonialis nos Chriſtianos non amplius obſtringat; hi Canones modo memorati, aliæque hominum traditiones, nos multo minus obligabunt. PAULUS enim *Apoſtolus* diſerte ait: *Alius diem a die diſcernit; alius dies omnes eodem loco habet. Suam quiſque ſententiam exploratam habeat; qui dierum rationem habet, Domino habet.* Item *qui dierum rationem non habet, Domino non habet.* Rom. XIV. 5. 6. Et ad Galatas. *At nunc Deum cognoſcentes, vel potius a Deo cogniti, qui fit ut vos rurſus ad infirma egenaque rudimenta convertatis, quibus rurſum de integro ſervire vultis. Dies obſervatis, & menſes & tempora, & annos.* Gal. IV. 9. 10.

Optandum eſſet, ut Chriſtiani non tam ſolliciti forent de eligendo die Paſchatis, quam de eodem ſemel electo rite & mo-

re Chriſtianos decente celebrando, in honorem Dei & memoriam glorioſæ reſurrectionis Domini noſtri JESU CHRISTI.

Quia igitur determinatio diei Paſchatis apud Chriſtianos res eſt mere indifferens & arbitraria; neque ſperandum, id quod ſupra de Dominica vigeſimam primam Martii diem proxime ſequente propoſui, a Statibus Imperii Evangelicis probatum iri & vim Legis obtenturum; audiendæ imprimis erunt rationes politicæ circa eligendam alterutram methodum determinandi Paſcha.

Si itaque & mihi licet hac in re, ſalvo tamen aliorum judicio, mentem meam aperire; haud abs re alienum mihi videtur fore, ſi nuperrime exarato Concluſo Ratisbonenſi nos conformemus, non quidem ob cauſas in eo adductas, ſed potius quia Ratio Status videtur requirere ut in puris formalibus a reliquis Evangelicis non ſecedamus; quandoquidem maxima pars *Helvetiæ* Reformatæ, jam ſub finem Seculi præcedentis, ſe tum publicato Concluſo Statuum Imperii Evangelicorum accomodavit, recipiendo Calendarium novum & correctum quod Concluſo illo ſanciebatur & introducebatur: quo jam tum in Comitiis S. Rom. Imperii decretum fuerat, ut ſupputatio Paſchatis neque per Cyclum *Dionyſianum* in *Calendario Juliano* receptum, neque per Cyclum *Gregorianum*, ſed unice per calculum aſtronomicum inſtituatur; ut ita ipſo facto indigitetur Pagos *Helvetiæ* Reformatæ eodem quo Pontificii Calendario uti nolle. Ita ut hodiernum Concluſum Ratisbonenſe nihil aliud ſit, quam executio prioris a Reformatis *Helvetiæ* Pagis jam ab initio hujus Seculi approbati & recepti. Præterea attendendum etiam eſt ad hodiernum rerum ſtatum. Conamur enim ſtabilire arctiſſimam unionem inter Eccleſias Reformatas & Fratres *Auguſtanæ* Confeſſionis: quod opus nunquam ſatis laudandum diſſidio nullatenus neceſſario circa Calendarium facile impediri poſſet.

Hæc ad mandatum veſtrum gratioſiſſimum de hac materia adducere volui, PATRES CONSCRIPTI; omnia prudentiſſimo veſtro judicio debita reverentia ſubmiſſurus. Quod ſi autem

autem hæ meæ conſiderationes non viderentur ſufficere; negotium hoc, quod etiam ad ſcientias phyſicas ſpectat, ulteriori examini noſtri Profeſſoris Phyſices ſubmitti poſſet; ad exemplum Inclyti Magiſtratus *Tigurini*, qui in eadem conſultatione Profeſſorem Phyſicæ & Ingeniarium Profeſſori Matheſeos aſſociavit. Qui tres Viri illud ſcriptum compoſuerunt, cujus Apographum ad Vos, PATRES CONSCRIPTI, tranſmiſſum eſt.

Interea, Vobis apprecando perennem in adminiſtranda Republica proſperitatem & omnis generis felicitatem, ſumma veneratione ſemper ero,

PATRES CONSCRIPTI,

Die 26. Febr. 1723.

Veſter Obſequioſiſſimus Civis,
JOHANNES BERNOULLI
Doct. & Profeſſ.

N°. CLXXXIX.

DE TERRÆ MOTIBUS
Carolo-Heſychii factis.

I.

EPISTOLA Dni. TEXTORIS AD Dnum. BERNOULLIUM.

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Honoratiſſime Domine Profeſſor, Fautor colendiſſime,

INæſtimabili afficior voluptate, præter omnem expectationem occaſionem nactus, meum in Te, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, affectum plane ſingularem litteris ad Te meis teſtandi. Poſtquam enim, inde ab undecimo die Maii ad minimum uſque ad 26 ejuſdem menſis diem, perpetuis fere, modo quidem debilioribus, modo autem vehementioribus Terræ motibus, modo in his regionibus inuſitato prorſus, fuimus agitati; Sereniſſimus Princeps, Dominus meus Clementiſſimus, mihi in mandatis dedit, ut Tibi, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, gratioſiſſime a ſe ſalutato, illorum hiſtoriam, quanta id fieri poterit ἀκριβεία, exponerem; additis inſuper precibus, ut Tu, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, quantum id Tibi graviſſima Tua permittent negotia, & commode poterit fieri, nos pro Tua humanitate digneris reddere certiores: An & quamdiu hujuſmodi Terræ motus *Baſileæ* & in vicinia fuerint obſervati? Item, ut paucis, iiſque generalioribus, judicium tuum aperias, quod nobis maximi erit ponderis, ob fiduciam, quam merito in Tuo iſto, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, acumine ingenii plane ſingulari collocamus, unde hujuſmodi inſolita phænomena hoc tempore potuerint oriri? cum nemo noſtrum meminerit, ab annis innumerabilibus, in hiſce regionibus tale quid accidiſſe, uti nunc ſumus experti, paucis exceptis Terræ tremoribus, & tamen interea nullæ mutationes, quoad cauſas univerſales, antea fuerint obſervatæ, quæ potuerint ſufficere producendis hiſce effectibus. Additam rei enarrationem non potui exigere ad rigorem geometricum, cum mihi non ſit horologium accuratum, quod notet minuta prima & ſecunda, & cum fuerim ſæpiſſime impeditus negotiis quæ poſtulabat officii ratio, quibus factum eſt, ut non potuerim pro rei neceſſitate obſervationibus vacare; ſed nunc hic, nunc illic, debuerim viſitare ægrotos. His accedit, quod ſubitanei hujuſmodi naturæ effectus nullas admittant obſervationes

vationes accuratas. Nihilominus tamen ſpero, hiſtoriam horum effectuum, quam Tecum communicavi, ſufficere explendo deſiderio Sereniſſimi & Gratioſiſſimi Principis. Cæterum me Tuo favori & benevolentiæ inæſtimabili humillime commendo, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, & omni, qua poſſum, nominis Tui veneratione indeſinenter ero,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

Carolo-Heſychii 28 Maii 1737.

Tuus obſequioſiſſimus Cultor

TEXTOR

Doctor, Conſiliarius aulicus, & Medicus Sereniſſimi Principis.

NARRA-

Digitized by Google

II.

NARRATIO PROLIXA *TERRÆMOTUS*,

Quem menſe Maïo Anni 1737 *Carolo-Heſychii* ſenſimus.

Nota diviſionem Barometri, quo ſum uſus in fine hujus narrationis exhiberi.

Baromet. 16 grad. inter cælum ſubnubilum & ſerenum.

Subſolanus, æſtus vehemens, cælum ſudum, malacia.

POſtquam hic amænitſima Veris tempeſtate ſatis diu cœloque conſtanter ſereno fuimus uſi, ſpirantibus ſubſolanis; experti tandem ſumus æſtum extraordinarium, fere qualis eſſe ſolet in menſe Julio & Auguſto.

1 11 Maii, anni currentis, die Saturni, hora circiter 3 matutina, minuto 45, cepimus ſentire primum notabilem Terræ motum, cum ſtridore, qualem equi curribus juncti ſolent excitare.

2 Hora 2 pomeridiana, minuto 30, ſenſimus ſubitaneum Terræ motum, cum tanto fragore, ac ſi e longinquo vehemens audiretur tonitru, vel ictus tormenti bellici per aerem tranſiens. Tremor fragorem hunc ſecutus, & titubatio durabat circiter duo minuta. Cuidam cæmentario turrem operienti pileus ex capite deciderat, & Præfectus cæmentariorum affeverabat turrim in eo motu, quantum quidem oculis dijudicare potuerit, 3 ½ pedes a perpendiculo in alterum latus declinaſſe. Hic quidem ædificia hoc tremore cum magno fragore huc illuc concuſſa ſunt; unde quibuſdam in locis cibi e parietibus, imagunculæ, peræ, & vaſa vitrea ex abacis deciderunt; camini concuſſi ſunt; ſellæ & ſpecula in quibuſdam conclavibus huc illuc titubarunt. Verumtamen poſtea edocti ſumus, hunc Terræ motum *Rudadii*, [quod 5 horis hinc *Argentoratum* verſus diſtat] multo fuiſſe violentiorem.

3 Hora 10, & rurſus hora 12 nocturna, iterum
4 Terræ motum concuſſionibus notabilem ſentiebamus; cum illo tamen non comparandum, quem antea hora 2 & 3 ſenſeramus.

Barometri

Digitized by Google

Barometrum in eodem gradu.
Turbines procelloſæ, ſed cito deſinentes.
SW. SSW. & WSW. variant.

5 Die Solis 12 Maii, hora tertia matutina, minuto 45, vehementem ſenſimus concuſſionem & fragorem, cum conquaſſatione domuum. Toto die quemvis ventorum impetum comitabatur concuſſio notabilis, præter tremorem perpetuum.

Cælum ſudum, æſtus.
Baromet. in eodem gr.
SW. Turbines, nubes,
Hora 3 pomeridiana, procellæ, æſtus.

6 Die Lunæ 13 Maii, $\frac{3}{4}$ poſt horam tertiam pomeridianam, ſenſimus ab occidente vehementem fragorem ſubterraneum & vehementem Terræ motum.

7 Inter horam tertiam & quartam notabilem concuſſionem.

8 . Hora 5, iterum notabilem concuſſionem.

Baromet. in eodem gr.
SW. & WSW.
Cælum ſerenum & ſudum, æſtus.

9 Die Martis 14 Maii, hora 2 matutina, vehementem Terræ motum cum crepitu parietum in domibus.

Barometer in eod. gr., ut & ventus & tempeſtas.

10 Die Mercurii 15 Maii, hora circiter tertia matutina, minuto 49, vehementem Terræ tremorem.

11 Hora quinta, minuto 45, vehementem Terræ motum, cum fragore concuſſione & conquaſſatione domuum, & ſubſequente titubatione tria minuta durante.

12 Hora ſexta, minuto 46 & 47, duas vehementes concuſſiones, cum titubatione.

13 Hora 8, minuto 20, notabilem concuſſionem, cum vehemente titubatione, 8 minuta durante.

14 Hora 10, vehementem tremorem, cum pertinace & vehemente titubatione. Tremorem debilem, qui a 12 hujus Menſis die conſtanter duravit, & etiam hoc toto die ſine intermiſſione.

Barometrum, ventus & tempeſtas in eodem gr.

15 Die Jovis, 16 Maii, ab hora quinta matutina uſque ad 15 minutum horæ ſequentis, quinque aut ſex vehementes concuſſiones. Minuto 37, vehementem tremorem cum trepidatione parietum.

16 Minuto 46, concuſſionem vehementem, cum tremore & trepidatione.

17 Poſt meridiem, imprimis paulo ante horam 4, uſque ad horam 5 & ultra, complures & vehementes concuſſiones cum tremore & trepidatione.

18 Die Veneris, 17 Maii, hora 5 matutina uſque ad 6, concuſſiones frequentes & vehementes ut die præcedente.

Barometrum deſcendit, uſque ad horam 2 pomerid. ad gradum 14.

19 Hora 8 antemeridiana, ſtrepitum e longinquo, ſequente tremore vehemente cum trepidatione.

Cælum incipit eſſe nubilum.

20 Poſt quinque minuta, ſimiles ſtrepitus, tremores ac trepidationes, qui ſæpius repetiti durarunt minimum 15 minuta.

Verſus horam 4, barometrum deſcendit ad gradum 13.

a S. SW. & W. tres apparent tempeſtates.

Cælum incipit eſſe ſerenum, hora 8 pomerid.

Noctu, cælo ſereno fulgurat a SW. & WSW.

21 Die Saturni 18 Maii, mane, ab hora 5 uſque ad horam 6, complures concuſſiones atque tremores.

Barometrum in eod. gr.

Cælum ſubnubilum, nubes a SW.

22 Hora nona, quoſdam tremores vehementes.

Hora 8 antemer. tonitru, tempeſtas, pluvia.

Verſus horam 9 ceſſat pluvia.

23 Hora 9 nocturna, minuto 45, Terræmotum terribilem cum fragore & tonitru ſubterraneo conjunctum, ab occaſu & libe, cum concuſſione domuum vehementiſſima, quæ omnes terrore haud exiguo affecit. Duravit iſta concuſſio in maximo ſuo vigore, minimum 3 vel 4 minuta; eratque ad ſenſum multo vehementior ea, quæ hora 2 & 3 pomeridiana, diei 11, contigit.

Hora 9 nocturna, minuto 45, meteoron ignitum. Vide infra obſervatione quinta.

24 Inter horam 10 & 11, tremores quoſdam notabiles: hora 10, minuto 45 circiter, vehementem impetum perpendicularem cum fragore ſubterraneo, quem ſecutus eſt ſonitus hujuſmodi, ac ſi ſolum ſub pedibus noſtris eſſet fornicatum.

25 Ultra 40 minuta poſt horam 11, vehementior adhuc tremor Terræ productus a duobus impulſibus perpendicularibus ſe invicem ſecutis, cum fragore veluti Tormenti bellici vehementer tonante, & hujuſmodi ſono, ac ſi antrum ſpatioſiſſimum, eſſet, ſub pedibus noſtris.

26 Ab hora 12, uſque ad 1, frequentes tremores notabiles.

27 Die Solis, 19 Maii, paulo ante horam primam matutinam, vehementes ſoli concuſſiones, debiliores tamen iis, quas duabus horis præcedentibus, circiter

Hora 2 antemer. W, cælum nubibus magis tegitur.

Hora

Hora 4 antemer. nubes ſparſæ in horizonte. Aurora.

Barometrum 14 grad.

Ante meridiem, poſt horam 7, ventus validus. Frigor notabilis.

Ab hora 11, cœlum magis nubilum, S & SO. In meridie, ab hora 12 ad 1, æſtus vehemens, mox rurſus aër frigidus. Omnibus horis pomerid. W, & SW.

circiter decima & duodecima, ſenſeramus.

28 Verſus horam tertiam, vehementem Terræ motum, cum concuſſionibus & tremoribus.

29 Quibuſdam minutis ante horam quartam, duos vehementes impetus perpendiculares, ſe invicem immediate ſequentes, cum fragore tormenti bellici in diſtantia mediocri diſploſi.

30 Hora 6, 40 & aliquot minutis, duas concuſ-
31 ſiones terribiles ſe invicem excipientes. Deinde, minuto ſequente, tertiam concuſſionem, cum tremore & trepidatione pertinace.

32 Poſt horam 12 meridianam, vehementem impetum perpendicularem, cum fragore tormenti diſploſi.

33 Iteratum & multiplicem impulſum & concuſſionem, cum multiplice fragore & crepitu.

34 Hodiernus fragor, ab hora 6 uſque ad præſens tempus, videtur, judicio aurium, procedere a Notapeliote, ſive ab Euroauſtro.

35 Hora prima pomeridiana, ſenſimus iterum fragorem tormenti & concuſſionem vehementem ab Euroauſtro.

36 Hora duodecima, minuto 30, vehementem concuſſionem.

37 Hora prima, minuto 30, fragorem tormenti cum concuſſione ab Euroauſtro.

38 Hora 2, minuto 15, fragorem tormenti cum concuſſione ab Euroauſtro.

39 Aliquot minutis poſt horam tertiam, concuſſionem abſque fragore notabili. Eodem die didicimus aliquos caminos nocte præterita damnum cepiſſe, & quoſdam parietes *cratitios*, ligno & lapidibus interpoſitis confectos, & calce illitos, ſolvi cœpiſſe. Impetus horæ 12 noctis præteritæ concutiebat ſpeculam excubitoris ante arcem. Impetus vero immediate ſequens excubitorem, e ſpecula hacce metu ruinæ exſilientem, in terram proſternebat, ita ut ſemianimis ad contubernales deportaretur. Specula, licet ſatis ponderoſa, corruebat; ita ut plures aſſeres e tecto deciderent.

Excubiæ Portæ Linkhemienſis & Durlacenſis in parietem projiciebantur.

Barome- Bbbb 2 40 Die

Barometrum 13 grad. W. & SW. Aurora, cælum nubibus ſparſis obductum, verſus SW, tenues & atræ nubes tempeſtatem minantes. Aër obſcuratur a nubibus ſpiſſis; verſus horam 8, pluvia exigua; poſt horam 8, cælum ſubſerenum; verſus horam 9, cælum redditur ſerenum.

Verſus horam 12 merid. Barom. 12 ½ grad. Aër frigidus. Soles ardentes. SW & W.

Verſus horam 1, Barometrum 12 grad.

Verſus horam 4, Barom. 11 ¾ grad.

Verſus horam 7 pom. Barom. 11 grad.

SW & W pergit.

Cælum nubibus obductum, ventus validus, quandoque fulgures. Hora 11 & 12 nocturna, imber & caligo. Poſt horam 12, ceſſat pluvia.

40 Die Lunæ, 20 Maii, hora prima antemeridiana uſque ad horam duodecimam, ſenſimus quoſdam tremores notabiles.

41 Poſt horam ſeptimam antemeridianam, fragorem tonitrus, raucum quidem, ſed vehementem ab Africo, & e longinquo venientem, cum concuſſione domuum.

42 Paulo ante horam decimam, impetum vehementem cum fragore tormenti e longinquo & ab Africo venientem, atque concuſſionem domuum & ſoli.

43 Quibuſdam minutis poſt horam 10, ſimilem impulſum, cum vehemente tremore Terræ.

44 Minuto 45 poſt horam 10, mediocrem impulſum & concuſſionem.

45 Hora 10 nocturna, minuto 30, tremorem cum trepidatione.

Barometrum 11 grad. SW, & W. Fulgor notabilis. Mane Sol per vices intercurrens.

46 Die Martis, 21 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum cum trepidatione & titubatione.

Poſt meridiem 2—3, tempeſtas valde nubila, pluvia tempeſtatem annuntians. Hora 3, aër a nubibus valde obſcuratus. Ante Solis occaſum Iris; crepuſculum in horizonte occiduo, inſtar incendii ingentis; præterea pluvia, quæ demum poſt horam decimam ceſſavit.

Poſt mediam noctem tonitru.

47 Die

Barometrum 11 *grad.*

Ventus in eodem, frigor, interdum pluvia. Montes, ab occidente meridie uſque ad orientem, vaporant modo inſolito, ac ſi ingentes fornaces ibi fumarent. Poſt meridiem, ceſſatio pluviæ, malacia.

47 Die Mercurii 22 Maii, ab hora prima
48 matutina uſque ad horam tertiam, ſucceſ-
49 ſive quatuor Terræ motus mediocres, cum
50 tremore & trepidatione conclavium & lectorum.

51 Hora 10 nocturna, 40 & aliquot minutis, notabilem Terræ motum, qui 4 minuta duravit, in unica ſerie, cum mediocri trepidatione & titubatione; ita ut nonnulli hanc ob rem e domibus voluerint aufugere.

Barom. 11 ½ *grad.*

Ventus in eodem. Cœlum valde nubilum & perquam nebuloſum; pluvia generalis; e montibus ſurgunt plurimi vapores ſpiſſi in altum. Pluvia copioſa uſque ad noctem.

Ante occaſum Solis nubes moventur a S O verſus N W, a N W verſus S O, & a N O verſus S W, & a S W verſus N O. Sol per vices intercurrens, crepuſculum.

Ventus ſimiliter a S W verſus N O, a N O ad S W, &c.

52 Die Jovis, 23 Maii, hora 12 pomeridiana, impulſum notabilem & trepidationem ſoli.

53 Hora 3 & 5, Terræ motum debilem.

Barom. 12 *grad. Tempeſtas nubila, N O. Turbines procelloſi. Nubes a N O verſus S W, & ab N W verſus S O. Montes iterum vehementer fumant. Pluvia ſpiſſa & nebuloſa.*

Hora 4 pomer. Barom. 13 ½ *grad. Malacia. Cœlum nubilum abſque pluvia.*

54 Die Veneris, 24 Maii, hora 2 matutina, vehementem impulſum & fragorem, cum concuſſione conclavium & lectorum.

Barom. 14 *grad.*

S W, ab occaſu per ſeptentrionem, uſque ad S O, nubes tenues

55 Die Saturni, 25 Maii, hora 6 matutina, minuto circiter 45, impulſum perpendicularem & vehementem e locis inferioribus,

Digitized by Google

tenues & ſparſæ. Sol per vices intercurrens. Deinde a SO ad W, Nubes pluvioſæ. Poſt horam 7, turbines procelloſæ ſed cito tranſeuntes.

cum ſequente trepidatione & titubatione quatuor circiter minuta durante.

Verſus horam 9, NW, nubes pluvioſæ, quæ movebantur a NW verſus SO.

Verſus horam 11, N a N verſus S, moventur nubes, pluvia larga & continua.

Sub veſperam tempeſtas valde nubiloſa. Pluvia durans per integram noctem, cum aëre procelloſo.

Hodie tempeſtas aliquantum magis calida.

56 Hora 6, minuto circiter 40, vehementem impulſum, cum trepidatione & titubatione.

57 Hora 8, frequentem & vehementem trepidationem & titubationem.

58 Hora 9, minuto 15, impulſum notabilem & concuſſionem, aliquot minutis poſtea redeuntem.

59 Hora 4 pomeridiana, minuto 30, tremorem ſubterraneum & notabilem perquam frequentem; & quandoque huc illuc trepidantem.

60 Hora 5, tremorem notabilem.

Barometr. in eodem gr.

Hora 10, Barom. 14 $\frac{1}{2}$ grad.

Mane, ante horam 1, ventus validus & procelloſus, indeſinenter uſque ad ortum Solis, poſt ortum Solis pluvia larga, pergit ventus procelloſus. Boreas. Nubes, Lumen boreale.

Frigor ingens. Tempeſtas nebuloſa, montes nebulis ſpiſſis & caliginoſis obducti.

Poſt meridiem pluvia larga & generalis, quæ poſt horam 10 pomerid. ceſſat aliquantulum, & brevi poſtea rurſus incipit, & pergit uſque ad tempus matutinum ſequens.

Hora 9 & 10 nocturna, in montibus nebulæ ſpiſſæ & caliginoſæ, cum coruſcationibus ſubobſcuris.

61 Die Solis, 26 Maii, hora 1 antemeridiana, minuto 30, Terræ motum, cum vehemente trepidatione & procelloſo turbine.

62 Hora 7 matutina, Terræ motum cum trepidatione.

63 Hora 6 pomeridiana, impulſum perpendicularem cum fragore rauco.

64 Hora 8 nocturna, impulſum perpendicularem & vehementem, cum fragore rauco.

65 Deinde, poſt minutum dimidium, alterum, ſed paulo debiliorem.

Barome-

66 Die

Digitized by Google

Barometrum in eodem grad. W a S. ſive Meſolibonotus.

Pluvia generalis, nubes valde obſcura, nebula ſpiſſa, imber perpetuus per totam noctem, montes modo inſolito fumantes.

66 Die Lunæ, 27 Maii, hora ſecunda pomeridiana, impulſum perpendicularem cum tremore.

Barometr. 15 *grad.*
Boreas.

Hora 8 *Baromet.* 15 $\frac{1}{2}$ *grad.*
Hora 9, *Barom.* 16 *grad.*
Hora 12, *Barom.* 16 $\frac{1}{2}$ *grad.*
Hora 1, *Barom.* 17 *grad.*

Toto tempore antemer. montes nebulis & vaporibus adeo fumantes, ut prorſus non potuerint conſpici.

Mane verſus horam ſextam, adhuc parum pluviæ; quæ deinde ceſſat uſque ad horam 7: *poſtea pluvia larga, cum nebulis, per totum tempus antemerid.*

Poſt horam 9, *S W.*

Poſt meridiem, Boreas, pluvia ceſſat; ante Solis occaſum, cælum fit aliquantiſper ſerenum. Noctu, nubes ſparſæ cum ſtellis intermicantibus.

Major æſtus, quam diebus præcedentibus.

67 Die Martis, 28 Maii, hora 2 matutina, Terræ motum, cum tremore & trepidatione, abſque tamen fragore, circiter 8 vel 10 minuta durantem.

Horum Terræ motuum vehementiſſimi fuerunt illi, quos experti ſumus die 11 Maii, hora 2 pomeridiana, minuto 30; die 18 Maii, hora nona pomeridiana, minuto 45; deinde hora 11, min. 45.

His proxime accedunt quos ſenſimus die 11 Maii, hora 4 matutina; eodem, hora 12 pomeridiana; die 12 Maii; die 14 Maii, hora 2 matutina; die 15 Maii, hora 3 matutina, minuto 45; die 18 Maii, hora 10 pomeridiana, minuto 45; die 19 Maii hora 0 matutina, 40 & aliquot minutis; horis itidem, 3; 4; 6; 12; & 12 minuto 15, matutinis; & 1; 1, 30 minuto, 2; 15 minuto veſpertinis. His autem adhuc debiliores erant reliqui ſupra memorati.

Præter

Præter hos impulſus & concuſſiones, admodum notabiles in campo etiam aperto, toto hoc tempore, uſque ad 26 Maii, facillime ſentiri potuerunt perpetui tremores, trepidationes & titubationes: deinde etiam impulſus & ſtrepitus debiliores ſatis frequentes.

Cæterum die 17 Maii, poſt meridiem, ab hora ſexta uſque ad noctem; die 20 ejuſdem, ab hora prima matutina uſque ad horam quintam, ab hora 11 antemeridiana uſque ad horam 10 nocturnam, ſolum valde adhuc erat quietum, ſi paucos tremores debiliores excipias. Econtrario ſenſeramus iterum moleſtiam tanto majorem, ob frequentiores tremores & concuſſiones, quibus a die 21 uſque ad diem 26, fuimus obnoxii.

OBSERVATIONES

Hac occaſione facta.

In omnibus hiſce, tam vehementioribus concuſſionibus, quam debilioribus tremoribus Terræ, omnes galli urbani & agreſtes, interdiu & noctu, ſemper multo quam ſolent vehementius cecinerunt. Plurimæ etiam gallinæ hujuſmodi ediderunt cantum, ac ſi omnes in gallos fuiſſent mutatæ. In concuſſionibus autem vehementioribus, hæ aves celerrime ad ſe invicem acceſſerunt, ac ſi quam-maxime fuiſſent perterritæ. Unde colligi poteſt, ſolum toties peculiares vapores exhalaſſe, quoties fuit concuſſum; qui has aves peculiari affecerint ſenſatione, iiſque occaſionem ita canendi ſubminiſtraverint.

2°. Poſtquam Terræ motus ab initio jam tres dies duraviſſet, calor deſiiſſet & aër jam ſatis refrixiſſet; tam hic in Urbe, quam in agro, obſervatum fuit, lac vaccinum, noctu emulſum, mane ſequente in optimis cellis acorem contraxiſſe, etiamque coagulatum fuiſſe, ſi quis illud fervefecerit, ut in tempeſtatibus ſolet coagulari.

3°. Homines fide digni, & alieni ab omni ſuperſtitione, digitis ſolo infixis, calorem peculiarem & tam inſolitum ſenſerunt, ac ſi illud aqua bulliente tinctum fuiſſet; quamvis hoc experimentum tum demum tentaverint, poſtquam Terræ motus jam diu duravit, & jam aër cœpit eſſe pluvioſus & frigidus.

4°. Complures, qui aurem noctu ſolo admoverunt, in eoque ſæpius ultra quadrantem horæ perſtiterunt, hujuſmodi ſtrepitum audiverunt, ac ſi magna aquæ copia in gremio Terræ perpetuo coqueretur & ebulliret.

5°. Homines fide digni, tres ſeptimanas ante initium Terræ motus, verſus hypophœnicem diutiſſime ignem viderunt, quem ab initio ignem terreſ-

terreſtrem crediderunt, ſed poſt attentam & accuratam obſervationem deprehenderunt, illum fuiſſe phænomenon in nubibus procul a terra remotis apparens.

Cuſtos agreſtis *Cillensfeldii*, ita dicti, hora non prorſus dimidia verſus Euro auſtrum hinc diſſiti, nomine DAUSIO, vir honeſtus & fide dignus, affirmat, ſe, die 18 Maii, & ut conjiciebat, paulo ante horam 10 nocturnam, quercui innixum, vultu trans *Carolo-Heſychium*, *Landaviam* verſus, ſive Meſargeſtem directo, animadvertiſſe ignem, minimum 15 pedes longum & latum, vehementiſſime radiare; unde conjecerit, incendium ortum eſſe *Carolo-Heſychii*, & poſtquam, ut aiebat, hoc phænomenon tamdiu viderit, ut interea Oratio Dominica commode potuerit bis recitari, illudque *Landaviam* verſus, id eſt, ab ortu in occaſum progredi obſervaſſet, ſibi viſum fuiſſe, ſe una cum quercu in altum tolli, & una cum illo rurſus in terram decidere; quam primum autem, poſt concuſſionem hanc violentam & inde ortum terrorem, ad ſe redierit, & ſupradictum ignem diutius voluerit obſervare, illum jam prorſus diſparuiſſe.

6°. Quamvis eruptiones notabiles & vehementes horum Terræ motuum non ſtricte & accurate eadem hora diei redierint; nihilominus tamen ex hac mea vera narratione apparebit, eos ordinem quendam horarum diei obſervaſſe; nempe, ante meridiem circiter ab hora tertia uſque ad 7 aut 8, poſt meridiem ab hora 12 uſque ad horam tertiam vel quartam, & tandem noctu ab hora 9 uſque ad horam 12.

7°. Tandem *Ulma* accepimus, auctore Viro honeſto & prænobili, Terræ motum ibi quidem obſervatum eſſe valde exiguum, verum Ulmenſes quotidie fere tempeſtatibus fuiſſe territos.

Tempus præterlapſum & negotia urgentia mihi nullum relinquunt otium plura notandi. Hoc tantum paucis addere volui, me uſum eſſe Barometro communi, cujus hæc eſt diviſio.

a 1 uſque ad 4	gradum incluſive:	Procellæ.
a 5 -- -- -- 8	— — —	Pluvia larga.
a 9 -- -- -- 12	— — —	Pluvia & Ventus.
a 13 -- -- -- 16	— — —	Tempeſtas variabilis.
a 17 -- -- -- 20	— — —	Cœlum ſerenum.
a 21 -- -- -- 24	— — —	Serenitas conſtans.
a 25 -- -- -- 28	— — —	Valde ſiccum.

III.

Ad præcedentes litteras & narrationem Dni. TEXTORIS *Reſponſio.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Domine & Fautor honoratiſſime, æſtumatiſſime.

Litteræ Tuæ graviſſimæ, die 28 Maii exaratæ, die 4 hujus menſis ad me pervenerunt, una cum Relatione prolixa & cognitu jucunda multiplicium Terræ motuum quos, intra 15 aut 16 dies, *Carolo-Heſychii* & in vicinia ſenſiſtis.

Ante omnia gratias Tibi habeo, quantas poſſum, pro communicatione hujus relationis; deinde veniam rogo, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, quod ad humaniſſimas litteras Tuas non ſtatim reſpondi. Cujus rei cauſa eſt, non tam multitudo negotiorum meorum, quam imbecillitas corporis mihi a morbo graviſſimo relicta, quem hoc vere ſui perpeſſus; & quo præcipue trepidatio manuum mearum, qua jam a multis annis laboravi, adeo invaluit, ut difficulter calamum ſcriptorium regere potuerim.

Admiratione dignum utique eſt, quod talis regio, qualis Veſtra eſt, ubi concuſſiones Terræ ſunt rariſſimæ, ut probe animadvertis, *Vir Nobiliſſime & Clariſſime*, jam brevi adeo tempore a pluribus hujuſmodi terribilibus caſibus ſubito obruta & perturbata ſit; adeo ut amæniſſimum *Carolo-Heſychium* (hoc ſaltem tempore) ſuo nomine haudquaquam reſponderit, ſed ſummo jure vocari poſſit *Carol-Aneſychium.*

Ex omnibus hiſce Terræ motibus, in Urbe noſtra nonniſi duos ſumus experti. Nempe 11 Maii, hora tertia pomeridiana, ſecundum noſtrum numerandi modum, & deinde hora quinta matutina diei ſequentis, quorum uterque nihilominus tam debilis fuit, ut pauciſſimi homines eos animadverterint vel ſenſerint, etſi poſterior aliquantulum fortior fuerit priore.

Argen-

Argentorato mihi ſcriptum eſt, eaſdem binas concuſſiones ibi paulo majore impetu vim ſuam exeruiſſe. Unde conjicio originem ipſarum *Argentinenſibus* propiorem fuiſſe quam *Baſileenſibus*, & *Carolo-Heſychianis* adhuc propiorem quam *Argentinenſibus*.

Concludo tamen primam hujus veſtri continui Terræ motus cauſam, ubicunque primum ſortita fuerit effectum, non adeo violentam fuiſſe; cum illius effectus, quantumquidem notum eſt, ſe non in regiones remotas extenderit, ut ſæpe fieri ſolet, & ut præſertim in eo eſt obſervatum quem, circiter ante quinque vel ſex annos, hora ſexta pomeridiana, ſenſimus, quique ſe extendit a confiniis *Poloniæ* uſque ad *Montes Pyrenæos*.

Anno proxime præterito, die 12 Junii, paulo ante horam octavam pomeridianam, Terræ motum valde fortem experti quoque ſumus per totam *Helvetiam* & loca vicina, qui nullo quidem damno notabiliore nos affecit, præterquam quod aliquos caminos dejecit, & aliquas murorum fiſſuras produxit. In quibuſdam locis Terræ motus ſunt multo frequentiores quam in aliis; præſertim in regionibus *Italiæ* & *Siciliæ*, haud procul diſſitis a montibus ignivomis *Veſuvio* & *Ætna*, quemadmodum etiam, ante annos circiter octo vel decem, Urbs Siculorum *Panormus* Terræ motu vehementiſſimo fere prorſus fuit everſa, & in ea deleta fuerunt multa hominum millia; qui partim miſerrime conquaſſati, partim vero prorſus a Terra abſorpti fuerunt.

Etiam Urbs noſtra *Baſilea* huic malo quandoque fuit obnoxia, præſertim antiquis temporibus; quippe, anno 1356, duæ tertiæ Urbis partes Terræ motu horribiliſſimo fuerunt everſæ, & magna etiam pars flammis exortis in cineres abiit.

In vaſtiſſima *Americæ* regione *Peruviana*, & cum primis in illius Metropoli, Terræ motus tam ſunt frequentes, ut rariſſime dies præterlabatur, quo non aliquæ ſentiantur concuſſiones; unde etiam omnia ejus ædificia perquam humilia & ſolida ſolent exſtrui.

Quod itaque attinet ad cauſam unde hi tam prodigioſi effectus oriuntur; vellem certe lubentiſſime deſiderio Sereniſſimi &

Gratioſiſſimi Principis per omnia ſatisfacere, ſi hoc ullo modo fieri poſſet.

Ut tamen nihilominus generales meas conjecturas Ipſi ea, qua decet, reverentia aperiam, ſequentia breviter notabo.

1°. Circumſtantiæ, quarum in recenſione Tua mentionem facis, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, abunde evincunt eſſe plurimas cavitates ſeu cryptas ſubterraneas; cum ſubinde dicas auditum eſſe fragorem ſubterraneum, qui hujusmodi ſonum poſt ſe reliquerit, ac ſi ſolum eſſet fornicatum.

2°. Hinc itaque poteſt concludi, in ſpatioſis iſtis cavitatibus formari materiam inflammabilem; quæ ſi accenditur, magno impetu conatur erumpere, & Terram longe lateque concutit, inſtar cuniculi ſubterranei in loco munito, qui incenſus diſſilit, Terramque circumjacentem ita concutit, ut illius tremor ad aliquot milliarium diſtantiam quaquaverſum poſſit ſentiri.

3°. Hoc illis confirmatur Terræ motibus, qui in vicinia *Veſuvii*, *Ætnæ*, & reliquorum montium ignem eructantium oriuntur, & communiter tum incipiunt, cum novæ flammæ magno fragore & crepitu e montibus iſtis conantur erumpere. Tum enim concuſſiones atque tremores iſti tam diu durant, donec ignis exitum liberrimum abſque ullo impedimento ſortitur. Conſiderandum etiam eſt in poris particularum, exempli gratia, nitri in pulvere pyrio contenti incluſum eſſe aërem quamarctiſſime condenſatum atque compreſſum; qui, cum pori admoto igne aperiuntur, ſubito erumpit, & conjunctis viribus, mediante vi ſua elaſtica, fortiſſimos parietes cavitatum ſubterranearum penetrat atque diſrumpit, [ut hoc etiam fieri ſolet, quando cuniculus ſubterraneus, vel ſaltem bomba diſſilit] unde in regione circumjacente neceſſario concuſſio debet oriri, major vel minor, pro ratione quantitatis materiæ incenſæ.

4°. Quam fortem & violentum autem effectum aër in poris coarctatus poſſit habere, ſi per illorum aperturam emittitur, ex eo fere poteſt concludi, quod vi aëris in ſclopeto pneumatico vi humana condenſati, ſi illud ejaculamur, globus tanta vi propellatur ut in 50 paſſuum diſtantia hominem occidere poſſit;

ſit;

ſit; quamvis non niſi decies aut duodecies denſior reddi poſſit aëre externo & naturali.

5°. Quid jam non fiet, ſi aër in poris nitri, naturæ viribus, non decies tantum, ſed & centies, imo millies & ſæpius, condenſatur pluſquam aër naturalis, & ejus vis elaſtica in eadem augetur ratione; quemadmodum peculiari experimento demonſtravi in Diſſertatione mea *de efferveſcentia* *, quam, jam ante annos 47, edidi, cum eſſem adhuc juvenis.

6°. Si igitur hoc ut hypotheſis ſtabilita conceditur, & porro ſupponitur ſulphurem & nitrum in cryptis ſubterraneis naturaliter poſſe generari, ex quibus pulvere carbonario mixtis pulvis pyrius confici ſolet; facile apparet, poſt harum materiarum permixtionem, mediante unica ignis ſcintillula, [quæ oriri poteſt, ſi tantum unus ſilex in alterum incidit] hanc ita natam materiam illico capturam ignem, & terram ſuperjacentem, inſtar cuniculi incenſi, magna vi & fragore diſrupturam, & ita longe lateque concuſſionem Terræ, ſive Terræ motum producturam.

7°. Verum etiam fieri poteſt, ut materia inflammabilis in tam exigua copia adſit, & tam profunde jaceat, aut tanta mole terræ tegatur, ut realis ignis eruptio non ſequatur; ſed ut ignis multos cuniculos & fornices ſucceſſive penetret, & tandem pedetentim per meatus terræ evaporet; unde non niſi tremores aut concuſſiones ſe invicem ſequentes ſentiuntur, & varii ignes fatui exhalationibus oriri debent: quod ais, *Vir Nobiliſſime & Clariſſime*, apud Vos obſervatum eſſe.

8°. Si ingens adeſt materiæ copia, eaque ubique ſimul incenditur, ut fere fieri ſolet in incenſione cuniculi ſubterranei, tunc neceſſario a ſubitanea diſruptione ſoli circum circa terribilis Terræ motus oriri debet, qui unicam tantum, verum vehementiſſimam, concuſſionem producet, præcedentibus lentibus tremoribus deſtitutam; quia initium, medium, & finis hujus effectus unico veluti momento tranſeunt. Quod merito vocari poteſt ſubitanea & in ſummo gradu excitata efferveſcentia, quod

* N°. I. pag. 3. *Tom. I.*

in permixtione quorundam liquorum chymicorum apparet, veluti olei vitrioli cum oleo tartari, quorum effectus, quantumvis ſubitaneus, nequidem comparari poteſt cum eo quod obſervatur in fulguratione accenſi pulveris pyrii.

9°. Quod ſi autem ſubitanea effervescentia caſu quodam impeditur, ut hoc fit in præparatione pyroboli, vel cum ſolummodo pulvis pyrius humectatur & ſubigitur; tum ipſa materia per incenſionem ſenſim conſumetur; aër autem in poris incluſus & condenſatus, de quo ſupra egi, ſe nihilominus exeret, quamvis lentius, & vehementi ſua preſſione & pulſu in parietes fornicum ſubterranearum, varios per aliquod tempus durantes tremores, concuſſiones, aliaque ſymptomata, ut apud Vos obſervaſti, producere poterit; quæ autem profecto non tam periculoſa erunt, quam unicus impetus, qui oritur ex incenſione ſubitanea univerſæ, quæ adeſt, materiæ.

10°. Idem judicium eſt ferendum de omnibus fermentationibus in quacunque materia ortis; obſervabimus enim eam ſtatim extendi, & majus ſpatium occupare, quamprimum incipit fermenteſcere; adeo ut, ſi alicubi incluſa eſt, magna vi exitum quærat; quod utique abunde apparet ex muſto fermenteſcente, quod dolium etiam ferreis circulis circumdatum poſſet diſrumpere, niſi in ſuperiore parte ſuperficiei dolii fieret apertura. Cauſa hujus vis ſupernaturalis, ut videtur, non niſi ex condenſatione perquam violenta aëris oritur, qui ante initium fermentationis in poris particularum muſti incluſus, poſtquam aperiuntur, erumpit & omni ſua vi in aſſulas dolii ita agit, ut illud neceſſario diſrumpi debeat; niſi aër, qui ſe dilatare conatur, per apertum ſpiramen exitum inveniat.

11°. In fermentationibus communiter ingens exoritur æſtus, ob internum motum particularum in ſe invicem impingentium; ita ut materia, natura ſua inflammabilis, ſua ſponte facillime in flammas abire poſſit; quemadmodum fænum demeſſum, quod, antequam prorſus ſiccum eſt & aridum, in horreum colligitur & coarctatur, ſæpiſſime ſponte in flammas abit & incendium gignit.

12°. Cele-

12°. Celebris Chymicus Dominus LEMERY edidit in *Commentariis Academiæ Scientiarum Pariſinis* Anni 1700, pag. 101 & ſeqq. Diſſertationem lectu dignam, cui titulus eſt: *Explicatio phyſica & chymica Ignium ſubterraneorum, Terræ motuum, Ventorum furentium, Fulgurum & Tonitrus.* In ea eſt ſententia non tantum Terræ motus ſed & reliqua meteora, quorum titulus meminit, una cum phænomenis & effectibus ſuis, oriri ex ſulphure, qui ſub terra generatur & ferro miſcetur. Quomodo autem hoc re ipſa demonſtrari, & ope præparationis artificioſæ ante oculos poni poſſit, ſequenti docet deſcriptione.

13°. Sumit portionem limaturæ ferri, eamque miſcet cum ingenti portione ſulphuris in pulverem redacti, ex qua materia deinde, affuſa copia aquæ ſufficiente, paſtam conficit, quam horis aliquot in digeſtione ſinit. Hæc ſenſim incipiet magno æſtu fermenteſcere & intumeſcere, ac hinc inde aget rimas, ex quibus aſcendent vapores, qui quidem tantum erunt calidi, quando mediocris tantum adeſt materiæ copia; ſed qui in flammas erumpent, quando magna aderit, veluti cum paſta adhibetur triginta vel quadraginta librarum.

14°. Quamvis Auctor putat effectum hujus operationis in eo tantum conſiſtere, quod particulæ acutæ ſulphuris, violenta intruſione in particulas ferri, mutuam cum iſtis & vehementem attritionem, hincque magnum æſtum producant; tamen, me judice, nodus nondum eſt ſolutus. Quamvis enim, mediante hac hypotheſi, inflammatio aliquo modo poteſt explicari; nondum tamen apparet, unde intumeſcentia, vehemens impetus, exhalatio, aliaque ſymptomata oriantur; niſi dixero, hæc omnia præcipue oriri ex dimiſſione particularum martialium, quæ in poris incluſæ ſunt & condenſatæ, quando nimirum cuſpidatæ & acutæ ſulphuris particulæ poros aperiunt; ut jam ſupra in explicatione effectus pulveris pyrii oſtendi: hac tamen differentia, quod particulæ ſulphureæ hic agant in poros particularum nitroſarum, ibi autem in poros particularum martialium: ubi notandum, in his æque ac in illis aërem condenſatum tamdiu

con-

Digitized by Google

contineri, uſque-dum per aperturam pororum libertatem adipiſcitur magna vi erumpendi. Particulæ pulveris pyrii, quæ per ſe nullo motu gaudent, primum ſuum motum accipiunt ab igne exterius admoto, quem ſubitanea efferveſcentia ſtatim ſequitur; quare pulvis iſte omnis dicto citius in aërem evolat. E contrario autem particulæ mixturæ Domini LEMERII, ob fluiditatem aquæ ſenſim ſponte incipiunt moveri, & ſupradictæ fermentationi omnibuſque reliquis effectibus hinc fluentibus dant ortum.

15°. Narrat, ſe aliquando in æſtate maſſam quinquaginta librarum ſuæ mixturæ ingenti & profundo vaſi immiſiſſe, illudque linteo tectum in terram defodiſſe, poſtquam linteum luto duos pedes alto operuiſſet. Quo facto, poſt octo vel novem horas poſtea, obſervaverit quod ſolum inceperit intumeſcere, incaleſcere, rimas agere, ſulphureoſque & calidos vapores emittere, qui tandem in lucidas ignis flammas fuerint mutati, quæ actas rimas magis adhuc aperuerunt, & circa locum illum ubi vas erat defoſſum, flavum & atrum pulverem abjecerint: abſoluta autem prorſus fermentatione, ſolum adhuc diu fuiſſe calidum: denique ſe, poſtquam materia refriguerit, reperiſſe quod nihil remanſerit, præter pulverem nigrum & gravem, qui erat limatura martis jam libera a ſulphure, quocum erat permixta.

16°. Ex omnibus hiſce circumſtantiis a ſemet obſervatis, oſtendit Dominus LEMERI, quomodo, juxta hypotheſin ſuam, non ſolum Terræ motus, verum etiam venti furentes, turbines, fulgura, tonitrua, fulmina, aliique hujuſmodi effectus violenti poſſint oriri. Quamvis autem ejus methodus ratiocinandi mihi non per omnia placet, quandoquidem ex ratiociniis ejus minime poteſt oſtendi, unde iſte perquam violentus motus oriatur; nihilominus tamen experimentum illius modo memoratum pulcherrimum eſt, & aptiſſimum unde, ex hypotheſi mea, cauſa probabiliſſima horum effectuum poterit doceri; imprimis vero cauſa Terræ motus, omniumque quæ ipſum comitantur circumſtantiarum.

17°. Qua ratione autem hujuſmodi mixtura, qualem Dominus

nus LEMERI confecit, a natura poſſit formari, non opus eſt pluribus demonſtrare. Sufficit enim ingredientia hujus maſſæ, nempe ſulphur & ferrum, magna copia gigni. Poſſunt itaque, dum generatur iſthæc materia, effluvia aut vapores ſulphuris, & ſcoriæ ferri ſubtiliſſimæ tanta copia permiſceri, ut cuniculum ſubterraneum impleant, & poſtea, quando maſſa hæc permixta fit matura, facillime inflammari; unde neceſſario Terræ motus oriri debet, omnibus ſuis accidentibus terrore plenis junctus.

Quod, ſi jam mihi contingeret eſſe tam felici, ut hæ meæ ſimplices cogitationes deſiderio Sereniſſimi & Gratioſiſſimi Principis poſſent ſatisfacere, maximo certe afficerer gaudio. Rogo Te itaque, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, ut Sereniſſimum Principem velis reddere certiorem, quam devota mente Ipſum colam. Interea ſemper ero,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

Baſileæ die 19 Junii 1737.

Tibi Deditiſſimus
JOH. BERNOULLI
Doct. & Profeſſ.

P. S.

Quod ais, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, obſervatum fuiſſe; quod in omnibus Terræ concuſſionibus & tremoribus, tam interdiu quam noctu, galli urbani & agreſtes, modo inſolito, vehementiſſime cecinerint, imo quod & gallinæ multis in locis hujuſmodi ediderint cantum, ac ſi omnes fuiſſent mutatæ in gallos; imo quod hæ aves, in concuſſionibus vehementiſſimis, celerrime ad ſe invicem acceſſerint, ac ſi quammaxime fuiſſent perterritæ; exiſtimo hæc omnia ſubitanei terroris fuiſſe effectus, & ſic minime, ut ſingulare quid, Terræ motui debere tribui: quoniam obſervamus idem illis accidere, quoties alias alio modo ſubito exhorreſcunt & perterreſiunt, aut etiam quoties accipitrem quendam ſupervolantem deprehendunt; unde ſubitaneo

perculluntur terrore, & ad varios ſtrepitus & motiones impelluntur.

Quod porro notas, lac vaccinum noctu emulſum mane ſequente etiam in optimis cellis aceſcere; nulla alia utique hujus rei eſt cauſa, præter eam, quæ in tempeſtatibus horrendis eundem producit effectum. Tremor nimirum in lacte producit motum inteſtinum vehementiſſimum; unde oritur diſſolutio partium, & per conſequens diffluxus earundem, & acor, idque eo magis, quoniam æque in tonitru, ac in Terræ motu, multi vapores ſulphurei accedunt, qui acore prædicti ſunt, ut ex corroſivitate ſpiritus ſuphuris ſufficienter apparet.

I V.

Dni. TEXTORIS *Reſponſio.*

Vir Nobiliſſime & Celeberrime, Honoratiſſime Domine Profeſſor; Patrone Colendiſſime,

JUdicium tuum de nupero Terræ motu Principi Sereniſſimo Domino meo clementiſſimo perplacuit, qui & affirmavit, ſibi a Te, *Vir Nobiliſſime & Celeberrime*, per omnia eſſe ſatisfactum, ſeque ex animo dolere, quod hac re tantopere fueris occupatus. Interea Te, per me, gratioſiſſime ſalutat, & certiorem reddit, ſe gratum ſuum animum proxima occaſione ipſo facto eſſe teſtaturum. . . . .

. . . .

Cæterum inſigni hac fruor voluptate, ut me favori Tuo inæſtimabili humillime commendare & ſumma veneratione perpetuo eſſe poſſim,

Vir Nobiliſſime & Celeberrime,

Carolo-Heſychii die 10 Julii 1737.

Tuus obſequioſiſſimus Servus

TEXTOR.

FINIS.

INDEX

INDEX NUMERORUM

Quos Tomus Quartus *complectitur.*

NUM. CL. De Seriebus varia, *pag.* 5
CLI. Methodus exhibendi ſummas progreſſionum finitarum per numerorum naturalium quamcunque potentiam datam procedentium, 16
CLII. Summatio Seriei Quadratorum reciprocæ, 20
Appendix, 24
CLIII. Probl. Maximum terminum binomii ad quamcunque dimenſionem elevati invenire, 25
CLIV. De Alea, ſive Arte conjectandi, Problemata quædam, 28
CLV. Geometricæ Propoſitiones variæ, 33
CLVI. Methodus reſolvendi æquationem differentialem primi gradus, in qua incognitæ non aſcendunt ultra primam dimenſionem, 42
Applicatio ad exemplum de curva velocitatum in Cycloïde, 44
CLVII. Probl. Invenire conditiones ſeparabilitatis differentialium in æquationibus hujus formæ $as^m ds + bu^q s^p ds = du$, 49
CLVIII. Formulæ reductionum, 52
Methodus pro reductione Formulæ *Petropoli* miſſæ, 56
CLIX. Reſolutio binomii $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales duarum dimenſionum, 58
CLX. Inveſtigatio & Demonſtratio Theorematis *Coteſiani*, 67
CLXI. Æquationes differentiales incompletas cujuſque gradus completas reddere, 77
CLXII. Reductio æquationis $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ ad æquationem differentialem primi gradus, 79
Reductio æquationis ejuſdem ad genus Parabolarum, 88
CLXIII. Probl. Rectificare curvam datam, per aliam formulam quam $\int\surd(dx^2 + dy^2)$, 89

Num. CLXIV. De transformationibus & rectificationibus curvarum, *pag.* 92

CLXV. De evolutione ſucceſſiva & alternante curvæ cujuſcunque in infinitum continuata, tandem Cycloïdem generante, Schediaſma Cyclometricum. 98

CLXVI. Probl. In ſuperficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta breviſſimam, 108

Applicatio ejuſdem Methodi ad ſuperficies conoïdicas, 118

Ejuſdem Problematis Solutio per methodum de maximis & minimis, 127

CLXVII. Animadverſiones in Cl. Cheynæi *Methodum Fluxionum inverſam*, 129

CLXVIII. Obſervationes in Cl. Moivræi *Animadverſiones in Dni.* Cheynæi *Tractatum de Fluxionum methodo inverſa*, 146

CLXIX. Extrait d'une Lettre à l'Auteur du *Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits*, 160

CLXX. Remarques ſur le Livre de Mr. Stone, intitulé, *Analyſe des infiniment petits, contenant le Calcul integral, &c.* 169

CLXXI. Optica varia.

I. Problema Opticum, de inveniendo puncto, unde tria objecta inæqualia in rectam lineam diſpoſita, æqualia videantur, 193

II. Problema Dioptricum generale, quod comprehendit omnia Hugeniana circa lentes, 195

III. Ordre du Calcul pour la détermination des Iris ou Arc-en-Ciels de toutes les Claſſes, 197

CLXXII. Le Cabeſtan délivré des inconvéniens ordinaires, par raport à ſon uſage ſur mer, 205

CLXXIII. Solutio Problematis catenarii generaliter concepti, per methodum Hermanni ab errore repurgatam, 234

CLXXIV. Solutio Problematis curvaturæ laminæ elaſticæ a pondere appenſo curvatæ, 242

CLXXV. De lege virium, qua fit ut mobile ad centrum deſcendat temporibus quæ ſint ut poteſtates datæ diſtantiarum a quibus deſcenſum inchoat, 243

CLXXVI. De curva quam deſcribit corpus incluſum in tubo circulante, 248

CLXXVII. Propoſitiones variæ Mechanico-dynamicæ, 253

De compoſitione & reſolutione virium, 253

De viribus motricibus ad vectem applicatis, 256

De communicatione motus per vectem, 262

De centro ſpontaneo rotationis, 265

De motu corporum irregularium, ex percuſſione vel colliſione aliorum producto, 273

De

De Corporum aquæ inſidentium oſcillationibus, & de invenienda longitudine Penduli ſimplicis oſcillationibus illis iſochroni. . p. 286
De oſcillationibus corporum titubantium ſuper ſuperficie aliquà immobili, 296
De Pendulo luxato, & ejus reductione ad Pendulum ſimplex iſochronum, 302
De Pendulis ſympathicis, 310
CLXXVIII. De Pendulis multifilibus, 313
Idea ſolutionis pro Pendulis trifilibus, quadrifilibus, ſeu quibuſcunque multifilibus, 318
Typus alterius ſolutionis Problematis de multifilibus Pendulis, 325
Solutio brevior & ſimplicior ex natura oſcillationum petita, 329
CLXXIX. Problema ſtatico dynamicum, 332
CLXXX. Continuatio Tractationis de deſcenſu gravis ſuper hypothenuſa Trianguli rectanguli mobilis ſuper plano horizontali immobili, 341
CLXXXI. Problema *Newtonianum* generaliter conceptum & ſolutum, 347
CLXXXII. Problema balliſticum, 354
CLXXXIII. De oſcillationibus Penduli in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum, 374
CLXXXIV. De Corporis gravis aſcenſu & deſcenſu per arcus æquales in medio reſiſtente. 378
CLXXXV. Du Pendule composé dans un milieu réſiſtant, 382
CLXXXVI. Hydraulica, 387
Euleri *ad Auctorem Epiſtola*, 389
Præfatio, 391
Hydraulicæ Pars I, agens de motu aquarum per vaſa & canales cylindricos, qui ex pluribus tubis cylindricis ſibi invicem adaptatis ſunt conflati, 397
Problema hydraulicum, 409
De preſſione fluidi in fundum vaſis cylindrici (ſine annexo tubo) per foramen effluentis, 423
Appendix, 427
Hydraulicæ Pars II, continens methodum directam & univerſalem ſolvendi omnia Problemata hydraulica, quæcunque de aquis per canales cujuſcunque figuræ fluentibus formari ac proponi poſſunt, 432
De Preſſionibus quas ſuſtinent latera canalis a liquore transfluente, 442
Corollaria generalia circa velocitates & preſſiones, 447

Applicatio Theoriæ noſtræ ad Exempla vaſorum & canalium ſemper plenorum, *pag.* 4ſ2
De brevitate temporis ab initio effluxus uſque ad velocitatem ſenſibiliter æquabilem ſeu uniformem, 4ſ6
Theorema hydraulicum generale, directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per methodum indirectam virium vivarum, 4ſ9
Exemplum ſingulare determinandi motus aquæ in canali conoidico verticaliter deſcendentis, ubi nihil effluit, nullaque nova aqua deſcendenti ſuccedit, 463
Collatio hujus ſolutionis per vires vivas cum ea quæ elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam, 466
De Vaſis quæ interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil novi liquoris deſuper influentis accipiunt, 47ſ
De Clepſidris conficiendis, 478
EPIMETRUM. De vi per quam vas retro urgetur, dum aqua ex eo erumpit in directione horizontali, 484
CLXXXVII. Problema Hydraulicum, 488
CLXXXVIII. De die qua celebrandum Feſtum Paſchatis anno 1724, 494
CLXXXIX. De Terræ motibus *Carolo-Heſychii* factis, ſ02
I. *Epiſtola* Dni. TEXTORIS *ad* Dnum. BERNOULLIUM, ibid.
II. *Narratio prolixa Terræ motus, quem menſe Maio anni* 1737 Carolo-Heſychii *ſenſimus*, ſ04
III. Ad præcedentes litteras & narrationem Reſponſio, ſ14
IV. Dni. TEXTORIS *Reſponſio*, ſ22

INDEX

INDEX
RERUM NOTABILIORUM.

A

Abbreviationis Penduli ſub æquatore cauſa. I. 524
Acceleration *des corps peſants dans leur chute, comment elle peut être conſiderée.* III. 48
Acidum (Sal) Chymicorum. I. 13. 15
— effervescere ſæpius poteſt, alcali ſemel. I. 16
— qualem figuram habeant ejus particulæ. I. 15. 18
Acor lactis poſt Terræ motum. IV. 512. 522
Action & réaction, *leur égalité.* II. 14 III. 16
Actioni æqualis & contraria reactio. I. 372. IV. 484
Ænigma geometricum teſtudinis hemiſphericæ quadrabilis. III. 211
— — univerſaliter ſolutum. I. 160
Æquabilis preſſionis curva Geometris indaganda proponitur. I. 141
Æqualitas cauſæ & effectus. III. 242
— curvarum diverſarum. I. 152. 406. 414. 419. 423. 437. ſ. 449. 451. IV. 92. ſ. 144. ſ.
Æquatio canonica. III. 116
— — primi gradus ſoluta. III. 119. IV. 42. 46.
— — ſecundi & ulteriorum graduum. IV. 46
— curvæ æquilibrationis. I. 131
— — Beaunianæ. I. 128. 147. III. 424
— — brachyſtochronæ, vel celerrimi deſcenſus. I. 191. II. 468. 470. 472
— — catenariæ. I. 233. 234. III. 493. 498. 501. 503. 507. IV. 235. 238
— — cauſticæ circularis. I. 56. III. 468
— — clepſydrarum. IV. 478. 481. 482
— — cujus planum oſculans ad planum tangens habet inclinationem datam. IV. 114
— — cujus radius oſculi eſt ad normalem in ratione data. II. 278. 280. 283. 290. 300. 308. 469

Æquatio

Æquatio curvæ deſcriptæ a corpore deſcendente per hypothenuſam curvam Trianguli mobilis. IV. 345
— — — a corpore in Tubo circulante. IV. 250. 251
— — — a projectili in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. II. 400
— — elaſticæ. I. 122. IV. 89. 243
— — exponentialis. I. 184. 186. 270. 310. II. 271. III. 376
— — genitæ ex biſectione arcus circuli. IV. 37. 38
— — iſochronæ. III. 484
— — — paracentricæ. I. 120. III. 487. 488
— — linteariæ. III. 515. IV. 89
— — logarithmicæ exponentialis. I. 186
— — pantogoniæ. II. 608. 609
— — per cujus arcus grave deſcendens a quiete impendat tempora quæ ſint ut poteſtates altitudinum. IV. 246
— — quæ inter iſoperimetras dat aliquod maximum. II. 214. 215. 218. 228. 229. 231. 233. 234
— — quam formant applicatæ ſemi-circuli in punctis biſectionum. I. 52. III. 469
— — — perpetuo tangit recta fluens intra anguli recti crura, & ejus evolutæ. I. 57. III. 448
— — — quam refert catena oſcillans. IV. 329
— — — quam refert chorda muſica vibrans. IV. 210
— — rectam per datum punctum ductam ita ſecantis ut ſegmentorum rectangulum datum ſit. I. 157
— — rectam datæ poſitione parallelam ita ſecantis ut datum ſit rectangulum ſub ſegmentis. *ibid.*
— — rectam per datum punctum ductam ita ſecantis ut ſegmentorum ſumma data ſit. I. 158. IV. 41
— — ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 309. 316
— — tautochronæ. III. 490
— — velariæ. III. 512
— — velocitatum corporis cycloidem deſcribentis in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. II. 44. 375
— curvarum algebraïcarum univerſalis. I. 379. 384
— lineæ breviſſimæ in ſuperficie curva. IV. 111. 112. 115. 121. 122. 123. 125. 128
— modularis trajectoriarum orthogonalium. II. 302. 455. 460. 464
— parabolæ helicoidis vel ſpiralis parabolicæ. I. 46
— parabolarum omnis generis. I. 380. II. 300
— trajectoriarum orthogonalium. I. 270. 271. 277. 398. II. 271. 276. 278. 284. 285. 303. 460. 461

Æquatio

Æquatio trajectoriarum reciprocarum. II. 565. 615
Æquationi differentiali uni infinitæ curvæ ſatisfaciunt. I. 124
Æquationis aſſumptæ cum coëfficientibus indeterminatis conditiones. IV. 131. 139
Æquationis differentialis cujuſdam ſecundi gradus reductio ad primum. IV. 79
—— ad genus Parabolarum. IV. 88
Æquationes differentiales homogeneæ, quales. III. 110
—— lineis rectis conſtruuntur. III. 117
—— incompletas completas reddere. III. 412. IV. 137. 150. 77. II. 442
Æquationum differentialium primi gradus conſtructio. I. 123. III. 108. 419
—— ſolutio. I. 175. 320. II. 441. III. 108–124. 110. 419. IV. 42. 46. 381. 408
Æquationum radices quomodo per approximationem continuam inveniantur. III. 537. ſ.
Æquilibrationis curva eſt epicyclois. I. 133
—— ejus conſtructio. I. 129. 140
—— generalior & ſimplicior. I. 134
—— uſus. I. 132
—— Leibnitio conſiderata. I. 139
Aër, an generetur de novo. I. 23
— ex fermentatis exhalans animalibus noxius. *ibid.*
— in particulis corporum latet denſus. I. 14. 19. ſ.
— in pulvere pyrio centies denſior naturali. I. 34
—— quales effectus edat. IV. 516
— nocet lumini barometro, niſi ſit valde rarefactus. II. 348
— quanta vi elaſtica gaudeat. I. 34. 114
— ſubtilior exiſtit. I. 102. II. 330
V. Air.
Aërea bullula in barometro lucida apparet. II. 328. 345
Agens. V. *Corpus agens.*
Agens, *quand ils ſont en equilibre.* III. 23
Air, *ſon elaſticité eſt-elle proportionelle à ſa denſité.* III. 101. 105
Alcali (Sal) chymicorum. I. 13. 15
— effervеſcere ſemel poteſt. I. 16
— qualem figuram habeant ejus particulæ. I. 15. 18
Alea (Quæſtiones de). IV. 28. ſ.
V. Hazard, Jeux.
Alimenta convertuntur in ſubſtantiam humani corporis. I. 286
Altitudo ad quam liquor, concepto impetu, aſcendit in Tubo in liquorem partim immerſo. IV. 419
— aſcenſus projectilis in medio reſiſtente. IV. 360. 371
— liquoris in fiſtula canali per quem aqua fluit inſerta. IV. 444 ſ.

Amplitudo curvæ, quid. I. 412
Anagrammatum explicationes. I. 227. 229. 239. II. 557. 577.
Analyſe des infiniment petits, *quelle part Mr.* BERNOULLI *a à cet Ouvrage.* II. 500 508. ſ. IV. 168
Analytici Problematis a TAYLORO propoſiti ſolutio. II. 402 ſ.
Anaſtomoſis venarum capillarium cum arteriolis. I. 280
Angle *de la Derive.* II. 13
Angularis motus duplex in uno eodemque corpore. IV. 279
Anguli multiplicatio & diviſio per ſeriem. I. 386. ſ. II. 526. ſ. IV. 69
— — — — ſine ſerie. I. 511 ſ.
Angulus turbinationis. II. 192
Animadverſiones in CHEYNÆUM. IV. 129 ſ.
— in CRAIGIUM. I. 136. 140. 144. 408. 451
— in Fratrem ſuum. I. 262. ſ. 331. ſ. 386 ſ.
— in HERMANNUM. II. 297. 306. 427. ſ. III. 259. IV. 239
— in HOSPITALIUM. I. 132. ſ. 317 ſ.
— in MOIVREUM. IV. 146 ſ.
— in NEWTONUM. I. 534. 542. 548. II. 275. 293. III. 253. IV. 340. 350 ſ. 483
— in NIEUWENTIITIUM. I. 145. 179
— in Principii hydraulici demonſtrationem. II. 210
— in ſolutiones Problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 424 ſ.
— in ſolutionem Probl. trajectoriarum reciprocarum. II. 521. ſ. 578 ſ.
— in TSCHIRNHAUSIUM. I. 52. 158. 176. III. 407. 469
— in varias explicationes refractionis. I. 369.
Animalibus noxius aer e fermentatis exhalans. I. 23.
Animari vi quadam corpora quando dicantur. II. 169. III. 365
Aphélie, *leur mouvement expliqué.* III. 162. 328
— — — *imité par celui d'un Pendule.* III. 169
— — — *inexplicable dans le ſyſtème de* NEWTON. III. 164. 327
— — — *ſi lent que pluſieurs Aſtronomes en doutent.* III. 135. 163.
Apologia TAYLORI. II. 478 ſ.
— — ad eandem Reſponſio. II. 483 ſ.
Appropinquatio continua & prompta ad inveniendas radices numerorum. IV. 15. 16.
— — — — — — aquationum. III. 537 ſ.
— — — — — menſuram circuli. I. 444. ſ. IV. 98 ſ.
— — — — — — ellipſis. I. 437. ſ. 447 ſ.
— — — — — — ſpatiorum. I. 162 ſ.
Apſides. V. Aphélie.
Aquæ guttula barometri lucem extinguit. II. 328. 343. 347.
Aquarum a mari ad fontes & a fontibus ad mare circulus. I. 43
V. *Fluidum. Liquor.*
Arc-en-Ciels, *leur calcul* &c. IV. 192 ſ.

Arcus circuli in partes incommenſurabiles non poteſt geometrice dividi. III. 452
—— multiplicatio & diviſio per ſeriem. I. 386. II. 526. IV. 69
—— —— ſine ſerie. I. 511
Arcuum parabolicorum comparatio erronea. I. 151. 159. 171
—— vera. I. 242. ſ.
—— differentia rectificabilis. I. 247. 252
Arquebuſe a vent, *quelle doit être ſa longueur.* III. 22
Arteriolarum cum venis anaſtomoſis. I. 280
Artis Conjectandi Problemata. IV. 28 ſ.
Artificia DIOPHANTI in calculo integralium utilia. III. 293
—— integrandi varia. I. 320. 478. II. 407. ſ. 441. III. 108 ſ. 149. 155. 232. 388. ſ. 416. ſ. IV. 42. ſ. 49. ſ. 52. ſ. 79. ſ. 408
—— ſeparandi indeterminatas. I. 175. II. 316. III. 422. IV. 49. ſ. 381
Aſcenſus & deſcenſus corporis gravis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
—— fluidi in tubo vacuo cujus pars quædam immergitur. IV. 419
—— projectilis gravis in medio reſiſtente. IV. 360. 371
Aſſignabilis quantitas quæ. I. 184
Aſſumptæ æquationis vel ſeriei cum indeterminatis coefficientibus conditiones. IV. 131. 139
Aſtronomicum vel Gnomonicum Problema. I. 91
Atmoſphæra Planetarum. IV. 284
Atmoſphere *du ſoleil.* III. 281
Attraction *n'eſt pas ſi évidente que l'impulſion.* III. 137. 266
—— refutée. III. 299
Avancemens (*courbe des plus promts*). II. 29
Aura elaſtica, annon aer. I. 23
Axe *de l'équilibre des impulſions du vent ſur le Voile.* II. 83. 84
—— *de la réſiſtance moienne d'un corps mû dans un fluide.* II. 74. 77
—— *de rotation des planetes, pourquoi oblique au plan de leur orbite.* III. 324
—— —— *ſon paralleliſme.* III. 326
Axis turbinationis. II. 191

B

BAlle de plomb, *quel chemin elle parcourt dans l'air, avant que perdre la moitié de ſa viteſſe.* III. 72
V. Conoide, *Globus.*
Balliſticum Problema de aſcenſu & deſcenſu gravis in altum projecti in medio reſiſtente. IV. 354 ſ.
Barometra lucentia. II. 326 ſ.
—— quomodo parentur. II. 353 ſ.
Barometres lumineux. I 337 ſ.

Barometri Hireani & Hugeniani defectus. II. 206
— lux humore quovis extinguitur. II. 328. 343. 347
Barometrum, cur in eo mercurius ſuſpenſus. I. 88
— novum. II. 204
BARTHOLINI experimentum rarum. I. 29. 30
Baſſette (*Problême ſur la*). I. 457
BEAUNE (De) *ſolution de ſon Problême.* I. 62
Beauniana curva eſt logarithmica ſemirectangula, & trajectoria reciproca. II. 513
— — per ſe rectificabilis. I. 66
— — ejus æquatio & conſtructio. I. 65. 128. 147. III. 423
BERNOULLI (Dan.) Opus hydrodynamicum. IV. 392
BERNOULLI (Jac.) I. 45. 46. 48. 50. 52. 58. 60. 61. 64. 107. 119. 122. 136. 138. 175. 200. 206. 214 215. 220. 221. 222. 230 231. 253. 256. 262. 328. 330. 336. 377. 379. 386. 391. 424. II. 81. 82. 90. 132. 168. 214. 219. 235. 257. 467. III. 212. IV. 22. 125. 190. 381.
BERNOULLI (Nic.) Joh. fil. II. 270. 286. 299. 303. 423 ſ.
BERNOULLI (Nic.) Nic. fil. I. 509. II. 294. 305. 419. 437. 442
Binomialis quantitas quando perfecte integrabilis. IV. 129
Binomii ad potentiam indefinitam elevatio. III. 522
— — — — elevati terminus maximus. IV. 25
— poteſtates & rectanguli differentiæ comparatæ. II. 486
— $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales reſolutio. IV. 58
BONTEKOE notatus. I. 16
BORELLI hypotheſis de efferveſcentia. I. 24
— — de motu muſculorum. I. 96. 100. 104
Boulet, *ſa viteſſe dans & au ſortir du Canon.* III. 16 ſ.
BOYLEUS, an audivit de barometro lucente. II. 324
Brachyſtochrona curva ad indagandum propoſita. I. 161. 165. 166
— — cyclois. I. 187. 191
— — eadem cum tautochrona in hypotheſi Galilæana. I. 189
— — ejus æquatio generalior. II. 468. 470. 472
Brachyſtochrones. V. Courbe de la plus vite deſcente.
Brachyſtochroniſmus Cycloidis. I. 324
Branchiarum in piſcibus uſus. I. 20
Breviſſima linea in ſuperficie curva. V. *Linea.*
Bullula aerea. V. *Aerea Bullula.*
BURCARDI Reſponſio ad Apologiam TAYLORI. II. 483 ſ.

C.

Cabeſtan, *delivré de ſes inconvenients.* IV. 207
— quelle machine. IV. 209
— ſes inconvéniens. IV. 211

Calculi

——— reduits au calcul. IV. 213
——— leur remede. IV. 215 ſ. 222. 228
Calculi differentialis admirator HUGENIUS. I. 179
—— uſus in inveniendo valore fractionis cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. I. 401 ſ.
Calculi exponentialis principia. I. 179 ſ.
Calcul integral de Mr. Stone, Remarques ſur cet ouvrage. IV. 169
——, Problême important ſur ce calcul. I. 393
Calculi integralium prima ſtamina LEIBNITIO debentur. I. 96
—— methodus. III 387. ſ.
—— Problemata. I. 175. II. 402. 442. III. 108. 400. 482. IV. 42. 49. 52. 77. 79. 381. 408
—— uſus: III. 390
——— in ſolvendis Problematibus phyſico-mechanicis. III. 482 ſ.
Calendarii reformatio a GREGORIO XIII. IV. 495
—— apud Proteſtantes quando recepta. IV. 500
Calor, an explicet abbreviationem Penduli ſub æquatore. I. 524
Canalis conicus vel conoïdicus. IV. 416. 455
— duorum pluriumve tuborum. IV. 397. 410
— latera qualem preſſionem a transfluente liquore patiantur. IV. 442 ſ.
Canonicæ æquationes. V. *Æquationes canonicæ.*
Canons, *calcul de leur juste longueur.* III. 20
Cantus gallorum & gallinarum in Terræ motibus. IV. 512. 521
Carolo-Heſychii Terræ motus facti. IV. 502 ſ.
Carteſiana Geometria defectus & ſupplementum. I. 155
—— uſus in inveniendis cauſticis & evolutis. I. 52. 58. III. 435. 448
CARTESII explicatio refractionis vitioſa. V. DES CARTES. I. 369 ſ.
Cataracta Newtonianæ a gurgite diſcrimen. IV. 451
—— confutatio. IV. 483 ſ.
Catenæ oſcillantis curva. IV. 328
Catenaria curva mechanica. I. 48. III. 491
— quo caſu hyperbola. IV. 241
Catenariæ conſtructiones variæ. I. 49. III. 426. 428. 491 ſ.
— figura, quando inæqualiter craſſa. I. 50. III. 497
—— quando extenſibilis. III. 505
— generalis ſolutio. I. 108. II. 232. IV. 234
— gravitatis centrum infimum. I. 50. II. 232. III. 497
— proprietates. I. 49. III. 495. 504
— varia inſunt maxima & minima. II. 218
V. Chainette.
Catoptricæ fundamentum demonſtratum. I. 375
Cavitatum ſubterranearum exiſtentia. IV. 516
Cauſæ & effectus æqualitas. III. 242
Cauſtica curva per reflexionem. III. 464 473
——— rectificabilis. III. 466 474

Cauſtica curva tangitur a radio reflexo. III. 465
—— — per refractionem. III. 546. 554
——— ——— rectificabilis. III. 548
——— ——— tangitur a radio refracto. III. 546
Cauſtica circularis per reflexionem. I. 52. III. 467. 475
—— — eſt cycloidalis. I. 62. II. 469. 476
——— ——— evoluta aliam ſimilem gignit. III. 469
——— ——— invenitur per Geometriam CARTESII. I. 58
—— — per refractionem. III. 552
— cycloidalis. I. 61. III. 472. 478. 480
—— — eſt cyclois. I. 61. III. 479
— parabolica per reflexionem. III 471. 477
—— — per refractionem. III. 552
— ſpiralis logarithmicæ ipſa eſt. I. 61. III. 481
Celeritas. V. Velocitas.
Centre de gravité *de la chainette deſcend le plus bas qu'il eſt poſſible.* I. 208
——— *de deux corps mûs par un reſſort interpoſé, reſte en repos.* III. 24
——— *quelle eſt la figure où il eſt le plus éloigné de l'axe.* I. 226. 227. 239
——— *ſon mouvement ne change point par le choc des Corps.* III. 32
——— *ſon uſage pour déterminer la direction moyenne de pluſieurs forces.* II. 15
Centre d'oſcillation, *déterminé par la théorie des forces vives.* III. 4. 77
—— *d'un Pendule compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 385
— *de percuſſion & d'oſcillation, s'ils ſont toujours le même point.* IV. 180
— *de réſiſtance moyenne.* II. 77
— *du Tourbillon.* III. 279 f.
——— *la matiere céleſte y eſt plus denſe.* III. 156
Centrica linea, quæ. IV. 396. 433
—— — ſtratis fluentis liquoris perpendicularis. IV. 396 440
Centri gravitatis catenariæ deſcenſus infimus. I. 56
—— — conſideratio ſummationem involvit. II. 139
—— — deſcenſus maximus, principium ſtaticum. I. 373. 375
—— — duorum corporum interpoſito elaſtro motorum quies. III. 248
—— — gravium æquilibratorum aſcenſus aut deſcenſus nullus. I. 134. 374
—— — proprietas inſignis. I. 151. 160. 170
—— — quies aut motus uniformis. IV. 340
—— — ſegmenti & ſectoris ſolidi cycloidici determinatio algebraïca. I. 332. 333. 336. 391
—— — uſus in metiendis curvis. I. 151. 153. 158
Centri oſcillationis determinatio. II. 168 f.
— — inveniendi methodus indicata. I. 528
——— ——— an TAYLORO primum perſpecta. II. 474. 476. 480. 492. 516. 518

Centri oſcillationis inveſtigatio ex theoria virium vivarum. III. 252
——— nova, ex applicatione virium motricium ad vectem. IV. 259
—— penduli in liquoribus oſcillantis determinatio. II. 182
—— relatio cum centro rotationis ſpontaneo. IV. 269. 271
—— uſus in determinanda velocatitate corporum rotando deſcendentium & tenſione fili eadem ſuſtinentis. III. 127. 129
Centrum oſculi. V. *Circulus oſculator.*
Centrum rotationis ſpontaneum. IV. 265. 270
——— qualem cum centro oſcillationis relationem habeat. IV. 269. 271
Centrum turbinationis. II. 191
—— determinatum. II. 195. 198. 200. 201
—— figuræ turbinantis in planum, idem quod centrum gravitatis ſolidi a figura deſcripti. II. 202
Cercle, *eſt la plus grande figure de celles qui ont le même circuit.* I. 207
— *polygone infini-lateral.* IV. 162
— *ſa quadrature indéfinie impoſſible.* IV. 172
— *ſes ſegmens proportionels aux ordonnées extérieures de la Cycloïde.* I. 198
Chainette, *methode pour la recherche de leur courbure.* I. 430. II. 96. 251
— *ſa conſtruction par Mrs.* HUYGENS, LEIBNITZ & BERNOULLI. I. 59
— *ſon centre de gravité deſcend le plus bas qu'il ſoit poſſible.* I. 208
— *une de ſes proprietés.* I. 61
V. *Catenaria.*
Chaleur, *combien augmente la force du reſſort.* III. 98
— *comment produite par les raions du ſoleil.* III. 289
CHEYNÆUS *in* BERNOULLIUM injurius. II. 491
— in ejus methodum inverſam fluxionum animadverſiones. IV. 129
Choc, *des corps durs.* II. 126
——— — *ou elaſtiques.* III. 27. 28. 32. 33. 59. 65. 70
— *des corps fluides.* II. 125
— *oblique des corps elaſtiques.* III. 34
— *ſa force dépend des viteſſes reſpectives.* III. 27
Chordæ oſcillantis curvatura. III. 210
— muſicæ oſcillationes. III. 125. 207
— ponderibus onuſtæ oſcillationes. III. 127. 198
Chordarum arcus ſimpli & multipli relatio. I. 387. 388. IV. 69
Chronologica quæſtio de Feſto Paſchatis a°. 1724 celebrando. IV. 494
Chute & *acceleration des corps peſants comment elle doit être conſiderée.* III. 48
Chylificatio. I. 278
Chymia digna quæ excolatur. I. 13
Circulabiles curvæ, quæ. I. 142. 152. 158. 172. 417
Circulatio aquarum a mari ad fontes & a fontibus ad mare. I. 43

Circularis lineæ cum algebraïca conjunctæ rectificatio. IV. 96 ſ.
—— cum parabolica comparatio per approximationem. I. 445
—— in curvam algebraïcam transformatio. I. 423
Circuli evolutione curva genita. III. 446 ſ.
— quadratura indefinita impoſſibilis. I. 91. 150
—— per celerem approximationem. I. 446 ſ. IV. 98 ſ.
— ſegmentis proportionales arcus curvæ algebraicæ. IV. 94
Circulus oſculator. III. 432 ſ.
—— curvam tangit ſimul & ſecat. III. 434
—— ejus centrum determinatum. *ibid.* ſ.
———— eſt in evoluta. III. 433
—— in curvæ verticæ. III. 439
Circumferentiæ ad radium ratio per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Ciſſoide, IV. 175. 177. 179
Clauſarum figurarum quadratura impoſſibilis. I. 91. 150
Clepſydrarum Problema. IV. 478 ſ.
Clepſydres (*Problème des*). IV. 188
Colliſio corporum irregularium. IV. 273
Colorum mutatio in fermentatis. I. 40
Cometes, *leurs Orbites dipoſées irrégulierement, & pourquoi.* III. 310
——— *s'aprochent inſenſiblement du plan de l'équateur ſolaire.* III. 313
Commentaire *ſur l'Analyſe des infiniment petits.* IV. 160 ſ.
Communication du mouvement, *ſes loix.* III. 1. 7. 28 ſ. 55. 57
Communicatio motus per triangulum rectangulum. IV. 332
—— per vectem. IV. 262
Comparatio curvarum. II. 402. ſ. IV. 52 ſ.
—— per theoremata Moivreana inſufficiens. IV. 133 ſ.
Complanatio ſuperficierum conoidicarum & ſphæroidicarum. I. 160
Completam reddere æquationem differentialem primi gradus. III. 412. IV. 137. 150. II. 442
———— ſecundi gradus. IV. 77
Compoſitio & reſolutio virium demonſtrata. IV. 253
— barometrorum lucidorum. II. 351
— phoſphori mercurialis. II. 365
Conchoidis quadratura. III. 400
Conciliation *des ſyſtèmes de* DESCARTES *& de* NEWTON. III. 270
Concilii Nicæni decreta de Paſchate. IV. 496
Condeſcriptæ curvæ una evolutione. I. 143
—— ſummam habent vel differentiam æqualem arcui circuli. I. 143. 417
—— una earum ſi rectæ vel arcui circuli æqualis ſit, aliæ per arcus circulares menſurantur. I. 144

Conditio.

Digitized by Google

Conditiones æquationis aſſumptæ cum coefficientibus indeterminatis, integrationis gratia. IV. 131. 139
— ſeparabilitatis indeterminatarum in æquatione quadam differentiali. IV. 49
Cone iſoſcele de plomb, *ſon chemin dans l'air, avant qu'il ait perdu la moitié de ſa viteſſe.* III. 72
Conicæ ſuperficiei inſcripta breviſſima linea I. 257. 265. IV. 122
Coni recti proprietas inſignis. I. 160
Coni ſecti omnium latus rectum. I. 45
— — menſura per quas curvas detur. I. 150
Conoïde, *quel chemin il parcourt dans l'air avant que perdre une certaine partie de ſa viteſſe.* III. 72
Conoidicarum ſuperficierum complanatio. I. 160
— — proprietas. I. 174
Conoidicum corpus quale ſpatium in medio reſiſtente percurrat, priusquam datam velocitatis partem amittat. IV. 357. 367
Conoidis parabolici titubantis oſcillationes. IV. 300
Conſenſus mirus inter poteſtates binomii & differentias rectanguli. II. 486
Conſervation *des forces vives.* III. 38
Conſervatio motus non indiget principio motrice. III. 253
— virium vivarum. V. *Vires vivæ.*
Conſtructio, æquationum differentialium. V. *Æquationum diff. conſtructio*,
— brachyſtochronæ. I. 192
— catenariæ. I. 49. III. 491 ſ.
— clepſydrarum. IV. 478 ſ.
— curvæ æquilibrationis. I. 129. 133. 140
— — algebraicæ quæ ſpirali propoſitæ ſit æqualis. I. 47
— — Beaunianæ. I. 65. 148. III. 423 ſ.
— — cujus perpendiculares ſint æquales ordinatis alterius curvæ. III. 431
— — quæ ſit ad tangentem ſuam in data ratione. III. 425
— — quam deſcribit corpus in tubo circulante. IV. 248
— — — — projectile in medio reſiſtente. II. 399
— curvarum ex arcuum circuli biſectione. IV. 36 ſ.
— — ex arcuum circuli comparatione. I. 553
— — exponentialium. I. 184. 186
— cycloidis per quam citiſſime a puncto ad rectam grave delabitur. I. 254
— elaſticæ. I. 122
— geometrica Problematum ſolidorum & hyperſolidorum. III. 539. 542
— iſochronæ. III. 482
— — paracentricæ. I. 121
— lineæ breviſſimæ in ſuperficie conoidica. I. 256. IV. 108
— linteariæ. III. 515
— pantogoniæ. II. 603
— perpetui mobilis. I. 42

Digitized by Google

Conſtructio problematis aſtronomici. I. 91
—— de methodo tangentium directa. I. 138
— problematum de maximis & minimis. I. 254. 256
—— geometricorum. IV. 33
— radiorum oſculi in curvis quibuſvis. I. 382
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 310. 313. 316
— ſynchronæ. I. 192
— trajectoriarum orthogonalium. I. 256. 266. II. 271. 290. 313
—— reciprocarum. II. 536. 541. 545
— trajectoriæ reciprocæ ſimpliciſſimæ. II. 577. 593
Conſtruction *de l'axe & du centre de la moienne réſiſtance d'un arc de cercle mû dans un fluide.* II. 77
— *de la courbe de Mr.* DE BEAUNE. I. 62
———— *déterminatrice des viteſſes pour un vaiſſeau rectangulaire.* II. 23
———— *par laquelle un corps deſcend le plûtôt d'un point donné à une droite donnée.* I. 212
— *de la viteſſe d'un Vaiſſeau retenu par une corde infinie.* II. 142. 158.
— *des barometres lumineux.* I. 344.
— *des courbes algébriques rectifiables décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 233
— *des égalités avec une portion donnée de courbe.* I. 67 ſ.
— *des tautochrones dans un milieu réſiſtant.* III. 176.
— *du Cabeſtan delivré de ſes inconveniens.* IV. 222. 228
— *d'une Table pour la manæuvre des Vaiſſeaux.* II. 68
— *du Problême inverſe des forces centrales.* I. 476
Conſtructiones problematum, quænam ſimpliciſſimæ. I. 132. 133.
Continuïté (*Loy de*). III. 9
Contractio muſculorum, quomodo fiat. I. 100. 108. 109.
— venæ aqueæ fluentis. IV. 448
COPERNIC, *vérité de ſon ſyſtême.* III. 136.
Coradius, quid. I. 531
Corde *roulée autour d'un cylindre, ſa preſſion.* IV. 220
Corporis ex gravitate deſcendentis vis viva. III. 251
— gravis deſcendentis & poſt ſe aliud aſcendens trahentis velocitas. III. 125. 237
—— deſcendentis rotando velocitas. III. 127
—— deſcenſus & aſcenſus per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
Corporis humani moles quanta fieret, ſi nihil de ſua ſubſtantia deperderet. I. 294
—— mutatio ſucceſſiva per calculum determinata. I. 288
—— partes omnes tempore renovantur. I. 285
—— reſurrectio. I. 297 ſ.
Cor-

Corporis humani ſubſtantia nunquam remanet eadem numero. I. 285. 287
Corporum aquæ inſidentium oſcillationes laterales. IV. 286. 291
——— verticales. IV. 294
——— ſitus ab ARCHIMEDE recte definitus. IV. 286
— durorum in ignem injectorum diſruptio. I. 21
— gravium in liquoribus levioribus ſolutio. I. 38. 39
— gravium pendulorum & projectilium motus. I. 514 ſ.
— irregularium colliſio. IV. 273
— ſpecifica gravitas quomodo per Pendula explorari poſſit. I. 524. 527
— titubantium oſcillationes. IV. 296
Corps *durs*, *leur choc*. II. 126
— *élaſtiques ou roides*, *les loix de leur mouvement*. III. 1. 7. 28 ſ. 55. 57.
— *fluides*, *leur choc*. II. 125
— *frottés dans l'obſcurité*, *lumineux*. I. 435
— *leur inertie*. III. 36
Corpus agens & patiens, eorumque actio mutua. I. 14. 15. 18
— ſimplex. I. 8
—— non effervefcit. I. 8. 9
— vivens de ſua ſubſtantia perpetuo amittit. I. 276
Coteſianum Theorema, demonſtratum. IV. 67
COTES ſa méthode & ſes Tables. IV. 175. 178
Courbe *algébrique rectifiable décrite ſur une ſurface ſphérique*. III. 230 ſ.
— *ciſſoide*. V. Ciſſoide.
— *de la chainette*. V. Chainette.
— *de la plus vite deſcente*, *eſt la Cycloide*. I. 194. II. 253. IV. 190
——————— *reduite à une chainette*. I. 199
——————— *réſout le Problème des iſopérimetres*. I. 218. 221. 430
——————— *Problème de cette courbe & remarques ſur les ſolutions qui en ont été données*. I. 194 ſ.
——————————, *méthode directe de le réſoudre*. I. 197. 198. II. 267
——————— *entre les iſopérimetres*. II. 254
— *de la voile*. I. 60. II. 85. 94
— *de Mr. de* BEAUNE. I. 62
— *de projection des Epicycloides ſphériques*. III. 219.
— *des plus promts avancemens*. II. 29
— *des viteſſes d'un corps jetté en haut dans un milieu réſiſtant*. III. 77
— *des viteſſes d'un boulet dans le canon*. III. 16
— *des viteſſes & du tems d'un corps mû dans un milieu réſiſtant*. III. 75 ſ.
— *déterminatrice des viteſſes d'un Vaiſſeau rectangulaire*. II. 23. 31
— *dont l'arc eſt proportionel à l'abſciſſe*. III. 223
— *du linge rempli de liqueur*. I. 431. II. 95
— *élaſtique*. V. Elaſtique.
— *entre les iſochrones qui renferme le plus grand ſegment*. II. 263

Digitized by Google

Courbe *entre les iſopérimetres dont l'aire a le centre de gravité le plus éloigné de l'axe.* I. 227. 239
— *epicycloïde.* V. Epicycloïdes.
— *iſochrone, ou de l'egale deſcente.* IV. 184
— *loxodromique.* IV. 185
— *que décrit un mobile jetté & attiré vers un centre.* I. 474 ſ.
— *qui réſout le Problême des iſopérimetres.* I. 202. 208. 225. 428. 430. II. 244. 249. ſ. 254
— — — — — — *proprieté de leurs raions oſculateurs.* I. 210.
— *ſynchrone.* I. 211
Courbes ſemblables, *quelle eſt celle par laquelle un corps peſant parvient le plûtôt d'un point à une droite.* I. 212.
Courbure *d'un fil preſſé perpendiculairement en tous ſes points.* I. 434. II. 91. 95
Craigius an primus quadraturas tranſcendentes dederit. IV. 137
— ejus methodus quadraturarum non eſt univerſalis. I. 136. 140. 144.
— — reducendi quadraturas ad extenſiones curvarum non eſt idonea praxi. I. 136.
— ſolutionem dedit erroneam Problematis de transformatione curvarum. I. 406. 409. 449. 451.
— ejus recantatio. I. 452.
Crépuſcule (*Problême du plus petit*). I. 64.
Crousaz (De) *ſon Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits.* IV. 160 ſ.
— *ſon Diſcours ſur le mouvement.* ibid.
Cube de plomb, *quel chemin il parcourt dans l'air avant que perdre la moitié de ſa viteſſe.* III. 72.
Cubi duplicatio per normam & circinum. III. 542.
Cuborum ſeries reciproca. IV. 11
Curvæ algebraïcæ quam mechanicæ rectificatione præſtat uti in conſtruendis Problematibus. I. 121.
— amplitudo quid. I. 412.
— geometricæ cauſtica & evoluta eſt geometrica. III. 434.
— geneſis ex evolutione curvæ alterius. III. 433. 441. 446.
— natura ex relatione punctorum ejus. I. 156. 169. 173. 178.
Curvæ datæ aliam æqualem invenire. I. 152. 406. 409. 449. 451. IV. 92 ſ.
— — aliam apponere ſic ut ſumma vel differentia ſit æqualis arcui circuli. I. 143. 417
— — — — — — rectificabilis. I. 249. IV. 95
— — parallelam ducere. I. 154. 158
Curvæ datæ, an connexionem habeant cum menſura arcuum circularium. I. 143
— —, quali in medio deſcribantur. I. 481. ſ. 537. ſ. IV. 347 ſ.
— directrices. I. 122.

Curvæ genitæ ex evolutione curvæ duarum partium æqualium & ſimilium circulabiles. I. 143
— infinitæ uni æquationi differentiali ſatisfaciunt. I. 124
— per ſe rectificabiles. I. 66
— ſimiles quotuplici ſenſu dicantur. II. 480
Curva æquabilis preſſionis. I. 141
— æquilibrationis V. *Æquilibrationis curva.*
— algebraïca cujus partes circuli ſegmenti ſunt proportionales. IV. 94
— algebraïca ſpirali propoſitæ æqualis. I. 47
— Beauniana. V. *Beauniana curva.*
— brachyſtochrona. V. *Brachyſtochrona.*
— catenæ oſcillantis. IV. 329
— catenaria. V. *Catenaria.*
— cauſtica. V. *Cauſtica.*
— chordæ muſicæ oſcillantis. IV. 210
— clepſydræ. IV. 478. ſ.
— cujus reſectæ ſit ad tangentem in ratione data. I. 66
— cujus planum oſculans ad planum tangens habeat datam inclinationem. IV. 114
— cujus radius oſculi ſit ad normalem in ratione data. II. 278. 280. 283. 290. 300. 308. 469
— cum qua datus arcus circuli ſit rectificabilis. IV. 96
— cyclois. V. *Cyclois.*
— deſcenſus æquabilis. V. *Iſochrona.*
— elaſtica. V. *Elaſtica.*
— elliptica. V. *Ellipſis.*
— evoluta. V. *Evoluta.*
— ex arcuum circuli comparatione genita. I. 553
— ex biſectione arcuum circuli genita. IV. 36. 37
— ex evolutione genita. III. 433. 441. 446
— exponentialis. I. 184 ſ. 270. 310. II. 271. III. 376
— funicularia. V. *Catenaria.*
— hyperbolica. V. *Hyperbola.*
— iſochrona. V. *Iſochrona.*
— lintearia. V. *Lintearia.*
— logarithmica. V. *Logarithmica.*
— multigibba. I. 440
— pantogonia. II. 571. 581. 600 ſ.
— parabolica. V. *Parabola.*
— per cujus arcus grave deſcendens tempora impendit altitudinum poteſtatibus proportionalia. IV. 246
— quæ habeat ſpatia numero determinato quadrabilia. III. 406 ſ. II. 315 ſ.
— quæ inter iſoperimetras det maximum aliquod. II. 214. 215. 218. 228. 229. 231. 233. 234

Curva quæ ſit ad ſuam tangentem in ratione data. III. 425.
— quæ ſui evolutione ſe ipſam deſcribat. I. 52. 61. III. 459
— quam applicatæ ſemi-circuli in punctis biſectionum formant. I. 52. 57 III. 468
— quam deſcribit corpus deſcendens per hypothenuſam curvam Trianguli mobilis. IV. 345
— quam deſcribit corpus in Tubo circulante. IV. 248
— quam deſcribit projectile in medio reſiſtente. II. 396. 399. 417. 513
— quam deſcribit radius ſolaris in atmoſphæra. III. 516
— quam tangit perpetuo recta fluens intra anguli recti crura, & ejus evoluta. I. 57 ſ. III. 447
— receſſus æquabilis a puncto dato. V. *Iſochrona paracentrica.*
— rectas omnes per datum punctum actas, vel datæ poſitione parallelas ita ſecans ut ſegmentorum rectangulum vel ſumma aut differentia poteſtatum quarumvis data ſit. I. 156. 158. 169
— refractionis. I. 201
— reptoria. I. 413 ſ. 437 ſ.
— ſinuum verſorum. I. 334. III. 210
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 308. 310. 318
— ſpiralis. V. *Spiralis.*
— ſynchrona. V. *Synchrona.*
— tautochrona. V. *Tautochrona.*
— trajectoria. V. *Trajectoria.*
— velaria. III. 510. 512
— velocitatum gravis in medio reſiſtente cycloidem deſcribentis. IV. 44. 375
— viribus cubo diſtantiarum proportionalibus deſcripta. I. 553
Curvarum additio & ſubtractio. I. 416
— comparatio per Theoremata Moivreana non ſatis generalis. IV. 153 ſ.
— dimenſio. I. 149. 153
— — per arcus circulares. I. 142. 152. 158. 172. 417. 440 ſ.
— geneſis per focos. I. 144. 159. 170. 171
— mechanicarum varia genera. III. 430
— quadratura. I. 125. 162. III. 394. 399
— — ad rectificationes revocata. I. 121. 137. II. 582. IV. 144
— rectificatio ope ſuæ evolutionis. III. 444
— — ſingularis. IV. 89
— ſimilitudo quotuplex. II. 450 ſ.
— tranſcendentium gradus. II. 591
Curvatura fili ex preſſione fluidi. I. 106. III. 507
— funis extenſibilis. III. 505
— funis inæqualiter craſſi. III. 497
— laminæ elaſticæ. IV. 242
— lineæ curvæ, quomodo determinanda. I. 486
— radii lucis in diaphano non uniformi. I. 187. 197. III. 516

Curvaturæ radius determinatus. I. 379. 384. III. 432 ſ. 437
V. *Radius oſculi.*
Cycloidalis cauſtica. V. *Cauſtica cycloidalis.*
Cycloide, *a ſes ordonnées extérieures proportionelles aux ſegmens du cercle generateur.* I. 198
— *eſt la courbe de la plus vite deſcente.* I. 194. II. 256
— *eſt une de celles qui ſatisfont au Problême des Iſopérimetres.* I. 209
— *quelle eſt celle par laquelle un corps peſant deſcend le plûtôt d'un point à une droite.* I. 202. 211. 218. 221
— *ſon tautochroniſme mal demontré.* I. 240
Cycloides curvæ quales. III. 449 ſ.
— — aliæ geometricæ, aliæ mechanicæ. III. 450
Cycloidis cauſtica Cyclois. I. 61. III. 479
— evoluta Cyclois. I. 52. III. 458
— inventor & hiſtoria. I. 322
— radius oſculi. III. 438 ſ.
— ſegmentum & ſector ſolidus quorum centra gravitatis algebraice determinari poſſunt. I. 332. 333. 336. 391
— ſociæ figuram refert chorda muſica oſcillans. II. 210
— — ſegmentum quadrabile. I. 334
— ſpatia quadrabilia. I. 322. 328. 330. 336. 389. III. 460. 463
Cycloidum contractarum & protractarum ſegmenta quadrabilia. I. 334
— omnium communis initii trajectoria orthogonalis ſynchrona. I. 193. II. 279. 314
— quadratura & rectificatio. III. 453. 455
Cyclois eſt curva brachyſtochrona. I. 189. 191
— eſt trajectoria orthogonalis reciproca. II. 521. 523. 524. 539. 542. 550. 559. 573
— naſcitur tandem ex evolutione ſucceſſiva & alternante cujuslibet curvæ. IV. 98
— qualis illa ſit per quam citiſſime a dato puncto ad datam rectam grave delabitur. I. 254. 262
— quomodo ex dato vertice per datum punctum duci poſſit. I. 192
Cyclometria nova. IV. 98
Cyclus numerorum aureorum a GREGORIO XIII rejectus. IV. 495

D.

DEgrés *des infiniment petits.* IV. 165
DE LA HIRE, *ſon paralogiſme ſur le Tautochroniſme de la Cycloide.* I. 240
V. HIRIUS.
Denſitas aëris in pulvere pyrio latentis. I. 34. 35
— — an ejus elaſticitati proportionalis. I. 114

Denſitas medii, qualis eſſe debeat, ut corpus datam curvam deſcribere poſſit. I. 481. ſ. 542. ſ. 546. ſ. IV. 348 ſ.
Denſité *de l'air eſt-elle proportionelle à ſon élaſticité.* III. 101. 105
— *de la matière céleſte plus grande vers le centre du Tourbillon.* III. 156
Deliacum Problema per circinum & normam ſolutum. III. 542
Derive. II. 13 ſ.
— *d'une Planéte ſphéroide cauſe de l'inclinaiſon de ſon orbite à l'équateur du Tourbillon.* III. 336
— *d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 18 ſ.
— — — *rhomboique.* II. 44. 51
— — — *qui a la figure de deux ſegmens de cercle egaux ſur une même chorde.* II. 60
Descartes *comparé à* Huguens. IV. 372
— *ſa méthode de réſoudre les égalités.* I. 67
— — — — — — *moins aiſée que celle de* Sluse. I. 73
— *ſes élemens.* II. 273
— *ſon ſyſtème des Tourbillons.* III. 264 ſ.
— — — — — *Penſées ſur ce ſyſtème.* III. 133 ſ.
— — — — — *comparé a celui de* Newton. III. 136
Deſcenſus æquabilis curva. V. *Iſochrona*
— & aſcenſus corporis gravis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
— corporis gravis ſuper Trianguli rectanguli hypotenuſa. III. 365. IV. 337. 341
— corporum rotantium. III. 128
— globi in altum projecti in medio reſiſtente. IV. 360. ſ. 372 ſ.
Deſcente (*Courbe de la plus vite*) V. Courbe de la plus vite deſcente,
Deus nihil efficit quod ſuis perfectionibus repugnet. I. 296
— potentiam & ſapientiam ſuam manifeſtavit in ſuis operibus. I. 306
Dez (*Queſtions ſur les jeux de*). I. 461
V. *Teſſera*,
Diamant *luit frotté dans l'obſcurité.* I. 436
Differentiæ rectanguli cum poteſtatibus binomii comparatæ. II. 486
Differentialis æquatio. V. *Æquatio differentialis.*
Differentialis calculus V. *Calculus differentialis.*
Differentialis quantitas, & integralis ejus eaſdem habent radicum varietates. I. 140. 144
Differentiatio de curva in curvam. II. 439 ſ.
— quantitatum exponentialium. I. 183
— logarithmi. *ibid.*
Differentielles *leur transformation.* I. 399
— *d'un degré plus élevé que le premier, mal priſes par* Newton. I. 509
Dimenſio curvarum. I. 149. 153

Dimenſio

Dimenſio per arcus circulares. I. 142. 152. 158. 172. 417. 440 ſ.
— ſpatiorum ex proprietate centri gravitatis deducta. I. 153. 158
— functionum ſimilium quomodo æſtimetur. II. 453
Dimenſions *des fonctions ſemblables comment on les eſtime.* III. 174
DINOSTRATIS quadratrix per puncta deſcribitur. I. 447
DIOPHANTI artificia in Calculo integrali utilia. III. 393
Dioptricæ fundamentum demonſtratum. I. 373
Dioptricum Problema generale. IV. 195
— theorema SUELLII. I. 370
Direction *ſa quantité la même avant & après le choc.* II. 254
Direction moienne *de pluſieurs forces qui agiſſent ſur un même point.* II. 15
— — — — — — *qui agiſſent perpendiculairement ſur un même fil.* II. 85. 87
Directrices curvæ. I. 122
Diviſio angulorum & arcuum. I. 586. 511. II. 526. III. 452. IV. 69
— figurarum curvilinearum in elementa ſua. III. 394
— — — in ratione data. I. 173
— ſectoris elliptici in partes æquales. I. 150. 159. 160. 170. 177
DUILLERIUS (FATIO) problema ſolvit de ſolido minimæ reſiſtentiæ. I. 307
— reſponſio ad ejus querelas. I. 307. 311
Duplicatio cubi per circinum & normam. III. 542
Dureté *ce que c'eſt.* III. 8. II. 81
— *parfaite ou abſolue, impoſſible.* III. 9
— *qualité accidentelle des corps.* III. 275
DUTAL, Defenſio phoſphori Bernoulliani. II. 375

E

Bullitio. I. 7
— ſanguinis & ſpirituum animalium muſculorum energiam explicat. I. 101. 110
Effectus & cauſæ æqualitas. III. 242
Effervescentia. I. 7
a fermentatione num differat. I. 7. 8. 9. 10
efficitur triplici mixtionis genere. I. 10
ejus cauſæ ſpuriæ. I. 12. 13
— cauſa vera. I. 15. 28
— hiſtoria & proceſſus. I. 11
— phænomena. I. 30
Egalité *de l'action & de la réaction.* II. 14. III. 16
— *de l'action du Vent ſur la voile & de la réſiſtance de l'eau au corps du vaiſſeau.* II. 105 ſ.
Egalités, *leur reſolution au moien d'une portion donnée de courbe.* I. 67. 72. 90

Elaſticæ curvæ analyſis. IV. 242
— — conſtructio. I. 122
— — proprietas quædam. IV. 89. 91
Elaſticitas aeris, an denſitati proportionalis. I. 114
Elaſticité. III. 13
— *de l'air eſt-elle proportionelle à ſa denſité?* III. 101. 105
— *ſa cauſe.* III. 89 ſ.
V. Reſſort.
Elaſtique (*courbe*) *eſt une de celles qui réſout le Problème des iſopérimetres.* I. 209
— *n'eſt pas entre les iſopérimetres celle dont le centre de gravité deſcend le plus bas.* I. 227. 377.
Elaſtra quomodocunque applicata, corpori ſemper eandem velocitatem dant. III. 245
Elaſtrorum a corpore moto tenſorum numerus eſt ut quadratum velocitatis ejus. I. 321.
Elaſtrum inter duo corpora poſitum qualem vim utrique communicet. III. 249
— tenſum non agit, ſed habet facultatem agendi. III. 245.
Electionum alea. IV. 32
Elemens *de* DESCARTES. III. 273.
Ellipſes *décrites par les Planétes.* III. 135. ſ. 139. 157. 161. 309
Ellipſium ejuſdem centri & verticis trajectoria orthogonalis. II. 272
Ellipticæ curvæ ad circularem reductio per approximationem. I. 437 ſ. 447.
Elliptici ſectoris diviſio in æquales ſectores. I. 150. 159. 170. 177
Enuntiatio. I. 79
Enuntiationes variæ. I. 83 ſ.
Epactæ a Gregorio XIII. introductæ. IV. 495.
Epicycloides ſphæricæ. III. 211. 213 ſ.
Epicycloides ſphériques. III. 216
— — *accourcies & allongées.* III. 228
— — *leur generation.* III. 225. 236
— — *leur rectification dépend en general de la quadrature de l'hyperbole.* III. 219.
— — *quand rectifiables.* III. 223
Equateur du Tourbillon *coincide avec celui du Soleil.* III. 332
— — — *pourquoi les Planétes ne ſe meuvent pas dans ſon plan.* III. 334 ſ.
Equation *de la chainette.* I. 60
— *de la ciſſoide.* IV. 175
— *de la courbe de la plus vite deſcente entre les iſopérimetres.* II. 255 ſ.
— — — — *décrite par un corps jetté & attiré vers un Centre.* I. 475. 480
— — — — *des viteſſes d'un boulet dans le canon.* III. 19.
— — — — *des viteſſes & des tems d'un corps mis dans un milieu réſiſtant.* III. 75 ſ.

Equation *de la courbe qui coupe à angles droits une infinité de Paraboles.* I. 398
———— *qui, entre les iſochrones, renferme le plus grand ſegment.* II. 265
———— *qui, entre les iſopérimetres, a le centre de gravité de ſon aire le plus éloigné de l'axe.* I. 227. 239
— *de la linteaire.* II. 95
——— *tautochrone dans un milieu réſiſtant.* III. 179
——— *vélaire.* I. 60. II. 94
——— *viteſſe des couches d'un Tourbillon.* III. 149 ſ. 152. 155
— *des chainettes en general.* II. 253
— *des courbes algébriques décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 233. 236
— —— *qui réſolvent le Problème des iſopérimetres.* I. 208. 209. 219. 225. 226. 230. 423. 430. II. 244. 246. 249. 250
— *des épicycloides ſphériques.* III. 219
— *des ſections coniques en general.* I. 470. 472
— *du deuzième degré réſolue.* I. 74
— *du troiſiéme dégré réſolue.* I. 68
— *exponentielles.* III. 179
Equations *ſemblables.* I. 67
Equilibre *entre deux agens, quand il a lieu.* III. 23
Equinoxes, *cauſe de leur préceſſion.* III. 355
Etoiles fixes, *leur génération.* III. 280
— — leur latitude eſt peut-être variable. III. 357
EULERUS ſolvit Problema de invenienda trajectoria reciproca dati ordinis. II. 616
——— de linea breviſſima in ſuperficie curva. IV. 112
——— de oſcillationibus corporum aquæ inſidentium. IV. 288
Evolvens radius. V. *Radius oſculi.*
Evoluta curva. III. 434 ſ.
—— curvæ geometricæ eſt geometrica. *ibid.*
— ejus inventio per Geometriam Carteſianam. I. 58. III. 435
— cycloidis eſt cyclois. I. 52 III. 458
— parabolæ. I. 58 ſ. III. 435
— ſpiralis logarithmicæ eſt eadem curva. I. 61. III. 459
Evolutio curvarum. III. 432 ſ.
—— curvæ datæ. III. 441
—— circuli. III. 446
—— parabolæ cubicalis ſecundæ. III. 443
Evolutione ſui ſe ipſas deſcribentes curvæ. I. 52. 61. III. 458. 459
Evolutiones infinitæ variæ. I. 150. 159. 172. 177
Evolutionis motus ab HUGENIO in Geometriam introductus. I. 415
— ope curvæ rectificantur. III. 444
Exercitatio geometrica de trajectoriis orthogonalibus. II. 423 ſ.
Expériences *de la conſtruction d'un Barométre lumineux.* I. 344
—— *qui confirment la meſure des forces vives.* III. 51

Digitized by Google

Experimentalis philoſophiæ vindicatio. I. 306
Experimentum aëris denſioris in poris corporum latentis. I. 21. 23. 33
— aëris in pulvere pyrio latentis. I. 35
— efferveſcentiæ duorum ſolidorum. I. 29. 30
— ferri & ſulphuris fermentantium. IV. 519 ſ.
— Hawksbeianum de mercurio lucente. II. 347
— penduli in aqua oſcillantis. I. 523
— POLENI de fluxu aquæ per foramen. IV. 439
Exponentiales quantitates. I. 180. III. 133. 151
— — mediæ inter algebraïcas & tranſcendentes. I. 180
Exponentialis æquatio. V. *Æquatio exponentialis.*
Exponentialis calculi principia. I. 179
— curvæ conſtructio. I. 184. 186. IV. 251
— — ordinata minima. I. 185
— — quadratura. I. 185. III. 376
Exponentialium quantitatum differentiatio. I. 183
— — gradus. I. 180
Extractio radicum commoda per approximationem. IV. 15. 16
— — — per ſeries. III. 529 ſ.
— — Rolliana vitioſa. III. 529. 533

F

Factores reales duarum dimenſionum binomii $1 \pm x^n$. IV. 58
Facultates chymicæ Veterum ridentur. I. 277
FATIO. V. DUILLERIUS.
FERMATII explicatio refractionis. I. 189
— — — inſufficiens. I. 370
Fermentatio. I. 7. 8
— ab efferveſcentia non differt, niſi gradu. I. 8. 9. 10. 17
— ejus cauſa. I. 15. 18
— — effectus miri. IV. 517
— — phænomena. I. 30
— — vis quanta. I. 33
— muſti. I. 17
— non ſuccedit in aëre frigido, vel loco clauſo. I. 31 ſ.
— panis. I. 31
— quomodo impediatur. I. 32
— ſulphuris & ferri. IV. 519 ſ.
Fermentum. I. 7
Ferri & ſulphuris fermentantium experimentum. IV. 519 ſ.
Feſtum Paſchatis, quo die a 1724 celebrandum. IV. 494 ſ.

Fibres muſculaires *ſe courbent en Cercle.* II. 93
Fibrillæ muſculares. I. 98. 104
— — arcuantur in circulum. I. 106. 108. 113
Figuræ clauſæ quadraturam indefinitam non admittunt. I. 150
— quæ ſint quadrabiles. III. 395
Figuratorum numerorum ſeries. III. 521. IV. 14
Figure *de la Terre.* III. 345
Figures curvilignes iſopérimetres, quelle eſt celle dont le centre de gravité eſt le plus éloigné de l'axe. I. 226. ſ. 239
— — leur mouvement dans un fluide. II. 55
Fil (*courbure d'un*) *dilaté par un fluide élaſtique.* II. 93
— — — *preſſé par une infinité de puiſſances.* I. 434. II. 96 ſ.
Fili curvatura ex preſſione fluidi. I. 106. III. 507
— tenſio, cum ſuſtinet grave rotando deſcendens. III. 128
Firmitatis vis reſiſtens inclinationi corporum aquæ inſidentium. IV. 295
Fiſtula canali per quem aqua fluit implantata. IV. 444 ſ.
V. *Preſſio liquoris.*
Fixes. V. Etoiles fixes.
Fluentis per canalem liquoris preſſio. V. *Preſſio.*
— — — — velocitas. V. *Velocitas.*
Fluentium fluentes. II. 486
Fluides, *force avec laquelle ils frapent un plan.* II. 10. 101
— *leur choc.* II. 125
— *leur réſiſtance.* V. Réſiſtance.
Fluidi in ſyphone vel tubo inflexo oſcillationes. II. 125. IV. 474
— in tubo partim immerſo motus. IV. 419. 488
— preſſio in fundum & latera. V. *Preſſio.*
— preſſio qualem filo curvaturam inducat. I. 106. III. 507
— reſiſtentia. V. *Reſiſtentia.*
— retropreſſio in Vas ex quo effluit. IV. 484 ſ.
— velocitas. V. *Velocitas.*
Fluidum nerveum. V. *Spiritus animales.*
Fluxionum methodus Newtoniana. IV. 129. 134. 136
Fluxus liquoris e vaſe. II. 208. III. 124. IV. 391 ſ.
Focorum uſus in geneſi curvarum. I. 149. 159. 170. 171
Focus lentis datæ determinatus. IV. 195.
— per reflexionem. III. 464
— per refractionem. IV. 546 ſ.
Fonction *d'une variable, ce que c'eſt.* II. 241
Fonctions *ſemblables.* III. 174
— — *comment on eſtime leurs dimenſions.* ibid.
— — *de dimenſion nulle ſont égales.* III. 175
Fonticulus ſaliens lucidus. II. 391
Fontium aquæ, a mari ad montes cur aſcendant. I. 43

Force, *avec laquelle un fluide frape un plan.* II. 10. 101. 125
— *centrifuge.* III. 89
— — *ſa meſure.* III. 90
— *communiquée à un corps par un ou pluſieurs reſſorts.* III. 25. 44
— *morte.* III. 23
— — — *conſiſte dans un ſimple effort.* III. 35
— — *differe de la force vive.* III. 37
— *mouvante* (Ligne de la) II. 11. 12
— *vive.* III. 23
— *differe de la force morte.* III. 37
— *ne peut ni naitre ni périr en un inſtant.* III. 41. 51. 53
— *proportionelle au quarré de la viteſſe.* III. 4. 25. 39. 45. 47. 51. 52. 53
— *ſa meſure.* III. 44
— *ſa nature.* III. 37 ſ.
— *ſa quantité ſubſiſte la même dans le monde.* III. 38
Forces *centrales* (*le Problême inverſe des*) I. 469. 470
— — *dans les milieux réſiſtans.* I. 502 ſ.
— — (*Theoréme ſur les*) I. 477
— *de deux corps mus par un reſſort interpoſé.* III. 25
— (*direction moyenne de pluſieurs*) *qui agiſſent ſur un même point.* II. 25
— — — — — *qui preſſent ou tirent perpendiculairement un fil.* II. 87
Formulæ reductionum pro quadraturis. II. 307. 417. 419. IV. 52
Fractionis, cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt, valor. I. 401
Fractions rationelles, *leur intégration.* I. 393
Fractionum integrandarum ratio. III. 389. 397. 399. IV. 132
Frottement *de certains corps produit de la lumiere.* I. 435
— *d'une corde roulée autour d'un cylindre.* IV. 216
— *proportioné à la preſſion.* IV. 214
— *utile dans l'uſage du Cabeſtan.* IV. 215
Functiones ſimiles II. 453
— — harum dimenſiones quomodo æſtimentur. *ibid.*
— — inter ſe quam rationem habeant. *ibid.*
— — nullius dimonſiones ſunt æquales inter ſe. *ibid.*
Funicularia. V. *Catenaria.*
Funis extenſibilis curvatura. III. 505 ſ.
— inæqualiter craſſi curvatura. III. 497 ſ.
— quo caſu curvetur in circulum. III. 502. 504
— — — — — hyperbolam. III. 503
— — — — — logarithmicam. *ibid.*
— — — — — parabolam. III. 501. 502. 503. 504

GALI-

G

GALILÆUS Cycloidem primus conſideravit, ſecundum Italos. I. 322
— putavit catenariam eſſe parabolam. I. 48
GALILE'E *ſa mépriſe ſur la nature de la chainette & de la courbe de la plus vite deſcente.* I. 199
Galli & gallinæ, durantibus Terræ motibus vehementius cecinerunt. IV. 512. 521
Geneſis curvarum per focos. I. 150. 159. 170. 171
Geometria Carteſiana V. *Carteſiana Geometria.*
Geometrica ſolutio, quæ. I. 256. 263
— conſtructio Problematum ſolidorum & hyperſolidorum. III. 539. 542
Globi ferrei in medio reſiſtente uniformiter denſo, tam elaſtico quam non elaſtico motus, & reſiſtentia. IV. 356. ſ. 365 ſ.
— reſiſtentia duplo minor quam cylindri. IV. 368
Globis pluribus ludentium ſortes. IV. 30
Gnomonicum Problema. I. 91
Gouvernail, *ſa ſituation pour faire tourner le Vaiſſeau le plus promtement.* II. 40. IV. 192
GRANDI (*Guid.*) Problemata Vivianea. III. 212
Grave. V. *Corpus grave.*
Graviora corpora liquoribus levioribus ſoluta cur innatent. I. 38. 39
Gravitas materiæ ſubtiliſſimæ & agitatiſſimæ debetur. I. 89. II. 330
— ſpecifica corporum quomodo explorari poſſit ope Penduli. I. 524. 527
— tangentialis, normalis. I. 530
Gravitatis a pondere diſcrimen. II. 169
— vires in diverſis Terræ locis per Pendula agnoſcuntur. I. 519
Gregoire DE ST. VINCENT. IV. 171
GREGORI (*Dav.*) Series abrumpentes. III. 520
GREGORII XIII Reformatio Calendarii. IV. 495 ſ.
GULDINI Regula pro dimenſionibus figurarum promota. I. 153. 158
Gurges in fluxu liquorum formatus. IV. 392. 398
— a nemine præter Auctorem animadverſus. IV. 392. 399
— diverſus a cataracta Newtoniana. IV. 451
— pro diverſa liquoris fluentis qualitate curvaturam habet diverſam. IV. 432. 451
— quamvis infinite parvus, requirit ad ſui formationem vim finitam & conſtantem. IV. 392. 398. ſ. 400

Har-

Digitized by Google

H

Harmonica ſeries infinita. IV. 8. 11
HARTZOEKERI contra phoſphorum mercurialem objectiones diſcutiuntur. III. 377
HAWKSBEII de luce mercurii experimenta Bernoullianis originem debent. II. 347
— explicatio luminis barometrici. II. 383
Hazard (*Problèmes ſur les jeux de*) I. 453 ſ.
V. *Alea.*
Helix. V. *Spiralis.*
Hemiſphærii titubantis oſcillationes. IV. 300
HERIGONII explicatio refractionis inſufficiens. I. 371
HERMAN (Jaq.) *ſa mépriſe ſur les Epicycloïdes ſphériques.* III. 220
— *ſa ſolution du Problème inverſe des forces centrales.* I 469
HERMANNI conſtructio curvæ quam deſcribit projectile in medio reſiſtente. II. 399
— de epicycloidibus ſphæricis. III. 211
— error in determinanda velocitate gravis per curvam deſcendentis & aliud aſcendens poſt ſe trahentis. III. 237. 259
— methodus ſolvendi Problematis catenarii ab errore repurgata. IV. 234
— ſolutio Problematis de inveniendis curvis quæ datum habeant numerum ſpatiorum quadrabilium. III. 315
— inverſi virium centralium. I. 555
— — — offenburgii erronea. III. 212. 215
— — — trajectoriarum orthogonalium. II. 275. 296
— — — — — ſupplementum ejuſdem. II. 279. 297. 306. 428
— — — — — & additamentum. II. 299. 428
HIRII barometrum quales habeat defectus. II. 206
— experimentum Penduli in aqua oſcillantis. I. 523
— explicatio abbreviationis Penduli prope æquatorem inſufficiens. I. 521
— paralogiſmus in demonſtratione tautochroniſmi cycloidis I. 247
V. DE LA HIRE.
Hiſtoria Problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 286
HOMBERGII experimentum de barometris lucidis infauſto ſucceſſu tentatum. II. 360
— objectionibus reſpondetur. I. 371. 372
Homo, ſi nihil de ſua ſubſtantia amitteret, ad quam molem excreſceret. I. 294
V. *Corpus humanum.*
Homogeneæ æquationes differentiales. III. 116
— — — harum integratio. *ibid.* IV. 42 ſ.

Horolo-

Digitized by Google

Horologium nocturnum mercuriale lucidum. II. 389
HOSPITAL (*le marquis de l'*) *a réſolu le Problême de la courbe de Mr. de* BEAUNE. I. 63
— — — — — — — — — *de la plus vite deſcente.* I. 199
— — — — — — *de la cycloide par laquelle un corps parvient le plus vite d'un point donné à une verticale donnée.* I. 213
Hoſpitalianæ Lectiones. II. 509. III. 385
HOSPITALIUS (*Marchio*) conſtruxit Problema de curva æquilibrationis. I. 129. 140
— — — de curva preſſionis æquabilis. I. 142
— — — de curva ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 311 ſ.
— — Problemata de maximis & minimis. I. 258
— quam multa a BERNOULLIO mutuatus ſit. II. 508 ſ.
HUGENII barometrum quo defectu laboret. II. 206
— de calculo exponentialium jocus. I. 180
— de cycloide inventa. I. 323 ſ.
— de pendulo turbinante. II. 187
— error notatus. I. 138
— explicatio refractionis. I. 370
— Regula de centro oſcillationis demonſtrata. II. 175. 181. III. 252. IV. 261
HUGENIUS calculi differentialis admirator. I. 179. 187
— contra PARENTIUM vindicatus. I. 188
— evolutionis motum in Geometriam introduxit. I. 415
HUGUENS, *a bien déterminé la viteſſe d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 31
— *a découvert les loix du choc des corps à reſſort.* III. 3
— *a réſolu le Problême de la chainette.* I. 59.
— *comparé à* DESCARTES. IV. 172
— *ſa diſpute avec Mr.* RENAU *ſur la manœuvre des Vaiſſeaux.* II. 4. 99. 115. 129
— *ſa mépriſe ſur cette manœuvre.* II. 71
— — *ſur le choc des corps, corrigée.* III. 34
— *ſa regle pour trouver le Centre d'oſcillation démontrée par la théorie des forces vives.* III. 80
— *ſa ſolution des Problêmes ſur les jeux de hazard.* I. 460 ſ.
Humidité *nuiſible à la lumiere du barometre.* I. 348
Humoris nutritii e vaſis eductio. I. 281
Humorum ſecretio. I. 280
Hydrargyrum. V. *Mercurius.*
Hydraulica ſcientia IV. 391 ſ.
— problemata. IV. 419. 488
— vis. IV. 436
Hydraulicorum problematum ſolvendorum methodus directa. IV. 432 ſ.
Hydraulici principii demonſtratio. II. 208

— — — impugnata. II. 210
— — — propugnata II. 212
Hydraulicum theorema de velocitate æquabili liquoris e vaſe effluentis. IV. 401. 459
H drodynamica Dan. BERNOULLI. IV. 392
Hydropis tympanitis cauſa. I. 103
Hydroſtatica ſcientia. IV. 391
— vis ſeu potentia. IV. 436
Hyperbola biquadratica clepſydræ conficiendæ idonea. IV. 479. 480
— communis, extremitate umbræ bacilli deſcripta. I. 91
— in quali medio a projectili gravi deſcribatur. I. 489
— — ſcala elaſticitatum. I. 115
Hyperbolæ figuram quo caſu catena flexilis aſſumat. IV. 241
— quadratura dat longitudinem Parabolæ. I. 242
— quadraturæ ſubſtitui poteſt deſcriptio Logarithmicæ. I. 65
— radius oſculi. III. 438
— ſegmenta æqualia, quomodo abſcindenda. I. 242. III. 411
Hyperbolarum ejuſdem centri & verticis trajectoria orthogonalis. II. 271. 276. 311
— in alias curvas transformatio. IV. 93
Hyperbolica ſpiralis. I. 552
— tuba in qua deſcendit liquor. IV. 463 ſ.
Hyperbolicorum ſpatiorum differentialia. III. 396
Hyperboloides in quali medio a projectili gravi deſcribatur. I. 490

I

J*Actus* (quot) colluſoribus concedendi, ut ſortes eorum æquales fiant. IV. 29
Idem numero nunquam remanet corpus humanum. I. 287
— reſurget corpus, ſed non idem numero. I. 255
Jeux de hazard (*Problêmes ſur les*). I. 453 ſ.
V. *Alea.*
Ignées (*Particules*) *peu vraiſemblables.* I. 364
Impedimenta fluxus liquorum. IV. 396. 446
— luminis barometrici. II. 337 ſ.
Inclinaiſon de l'orbite *de la Lune avec le plan de l'équateur.* III. 359
— — — *des Cometes.* III. 310
— — — — — *diminue peu a peu.* III. 313
— — — *des Planètes, leur cauſe.* III. 330
— — — *des ſatellites de Saturne.* III. 361
— — — *d'une Planète ſphéroide eſt. différente, ſelon que le ſphéroide eſt applati ou allongé.* III. 339
— — — *du ſecond ſatellite de Jupiter.* III. 361

Incom-

Incompatibilité *des deux loix de* KEPLER *dans le ſyſtême ordinaire des Tourbillons.* III. 269
Inertie *des corps.* III. 36
Indeterminatarum ſeparatio. I. 120. 123. 175. II. 316. III. 110. 422. IV. 49. 79. 381
Infiniment petits, *leurs degrés.* IV. 165
— — *ne ſont pas les indiviſibles.* IV. 161. 167
Infiniti ſcientia, opus LEIBNITIO meditatum. I. 119
Inſidentia aquæ corpora. V. *Corpora aquæ inſidentia.*
Intégral. V. Calcul intégral.
Integrale & differentiale eaſdem habent radicum varietates. I. 140. 144
— negativum quod deſigner. III. 399
— quantitatis binomialis & trinomialis quibus in caſibus haberi poſſit terminis finitis. IV. 129. 130
— quantitatis differentialis non ſemper haberi poteſt. III. 391
Integralem æquationem completam reddere. III. 412. IV. 137. 150. 77. II. 442
Integralia quæ ad circuli & hyperbolæ quadraturam reduci poſſunt. III. 391. II. 402. 407. 418
— quantitatum quæ duæ indeterminatas complectuntur, quomodo ſumenda. III. 416
Integralis calculus. V. *Calculus integralis.*
Integrationum natura & calculus. III. 387 ſ.
Integrandi modus & artificia. III. 388. 392. ſ. 397. 399
— ratio ſingularis. II. 487
Integrationes æquationum. I. 175. 320. 469. 470. 478. II. 407. 417. 419. 441. III. 108. 110. 119. 149. 155. 232. 233. 388. ſ. 416. IV. 42. 45. 46. 49. 52. 80. 129. 381. 408
— fractionum. III. 389. 397. 399
— quantitatum logarithmicarum. III. 378. 381. 382. IV. 148
Intenſitas vis motricis. IV. 394
Jocus HUGENII de calculo exponentiali. I. 180
Jovis motus diurnus. IV. 184
Iris. V. Arc-en-Ciels.
Irregularium corporum colliſio. IV. 273
Iſochrona curva. III. 482
— pendula, qualia. I. 518. II. 194
Iſochronæ paracentricæ æquatio. I. 120. III. 486
— — conſtructio. I. 121
— — infinitæ diverſæ. I. 138
Iſochrones, *quelle courbe entre les iſochrones comprend le plus grand ſegment.* II. 263
Iſopérimetres (*Problême des*) *propoſé.* I. 202. 208
— — — *réſolu.* I. 208. 424. ſ. II. 235 ſ.

——— —— diſpute à ce ſujet. I. 206. 214. 215. 220. 221. 222. ſ. 230. 231. 377. II. 235. 257. 273
Iſoperimetrici Problematis propoſitio. I. 201
—— analyſis. II. 219
—— ſolutio. II. 214
——— impugnata & defenſa. II. 475. 431. 503
Judicium, quid. I. 79
Jupiter, *calcul de ſon mouvement diurne.* III. 320
— *inclinaiſon de l'orbite de ſon ſatellite.* III. 361
JURINI objectiones in demonſtrationem principii hydraulici. II. 210

K

KEILLIUS. II. 393. ſ. 501. 512
KEPLER, *incompatibilité de ſes deux Loix dans le ſyſtême ordinaire des Tourbillons.* III. 269
KLINGENSTIERNÆ. IV. 108

L

LAc, poſt Terræ motum aceſcens. IV. 512. 522
Laminæ elaſticæ curvatura. IV. 242
Lanſquenet, *avantage de la main à ce jeu.* I. 457
Laſſitudinis gradus æſtimati. I. 116
Lateralis ſimilitudo curvarum. II. 450
Latitude *des fixes eſt peut-être variable.* III. 357
Latus rectum Coni ſectionum determinatum. I. 45
Lectiones Hoſpitalianæ. II. 509. III. 385
LEIBNITII cogitata de curva æquilibrationis. I. 139
— conſtructio catenariæ. III. 494
—— iſochronæ paracentricæ. I. 137
— defenſio. II. 403
— error notatus. I. 137. 139
— inventa de uſu centri gravitatis in dimenſionibus curvarum. I. 153. 158
— methodus ſerierum ingenioſa. I. 125
— opus de ſcientia infiniti. I. 119
— problema de trajectoriis orthogonalibus. II. 270. 288 ſ.
— quadratura ſegmenti cycloidalis. I. 324
— ſolutio ænigmatis florentini. III. 212
—— problematis brachyſtochronæ. I. 188
——— de transformatione curvarum. I. 410
——— funicularii. I. 48
— teſtimonium de phoſphoro mercuriali. II. 369

— theorema de virium vivarum menſura. I. 321
LEIBNITIO debentur prima ſtamina calculi integralium. I. 96
— debetur introductio motus tractionis in Geometriam. I. 415
LEIBNITS *a découvert que la force vive eſt comme le quarré de la Viteſſe.* III. 4. 39. 49
— a réſolu le Problême de la chainette. I. 59
— — — — — de la plus vite deſcente. I. 194. 198. 200
— défendu. IV. 169. 170
LEMERI, experimentum de ferro & ſulphure fermentantibus. IV. 518
Lentis focus determinatus generaliter. IV. 195
Lex virium qua fit ut tempora deſcenſus corporum ad centrum, ſint ut poteſtates datæ altitudinum. IV. 243
LIEBKNECHT de phoſphoro mercuriali. II. 387
Ligne *de la force mouvante.* II. 11. 12
— *des plus promts avancements.* II. 29
Linea breviſſima in ſuperficie curva. I. 256. 264. IV. 108. 115. 127
— — in ſuperficie conica. I. 257. 265. IV. 122
— — — — conoidica. I. 256. 264. IV. 118. 125
— — — — plana, eſt recta. IV. 121
— — — — — ſphærica eſt circulus maximus. IV. 122 ſ.
Linea centrica. IV. 396. 433
— — eſt perpendicularis ſtratis liquoris fluentis. IV. 396. 440
Linea centri in Pendulo oſcillante. II. 181
— — — — turbinante. II. 191
Linge *qui contient une liqueur peſante, ſa courbure.* I. 224. 431. II. 95
— — — — *eſt une des courbes qui réſolvent le Problême des iſopérimetres.* I. 209
— — — — *n'eſt pas celle entre les iſopérimetres dont le centre de gravité de l'aire eſt le plus bas.* I. 227. 377
Lintearia curva. III. 512
— — ejus conſtructio. III. 515
— — proprietas quædam. IV. 89. 91
Liquoris fluentis in canalibus preſſio in fundum vaſis. IV. 423. 430
— — in Latera canalium. IV. 442. 448. 449. 450. 453
— — — — — velocitas. IV. 401. ſ. 411. ſ. 427. 437. ſ. 447. ſ. 452. ſ. 473 ſ.
— in tuba hyperbolica deſcenſus. IV. 463 ſ.
— in tubis inflexis aut ſyphonibus oſcillationes. III. 125. IV. 174
— in tubo partim immerſo motus. IV. 419. 488
Locorum inventio nondum ſatis univerſalis per Geometriam Carteſianam. I. 155
Logarithmes *imaginaires, ſe réduiſent à des ſecteurs circulaires réels.* I. 400
Logarithmi dati numerus per ſeriem exhibitus. I. 127. III. 378
— differentiale quomodo ſumendum. I. 183

Logarithmica curva, ejus æquatio. I. 186
— — ejus radius oſculi. I. 383. III. 439
— — eſt curva velocitatum corporis in medio uniformiter denſo. IV. 354. 367
— — — exponentialis curva. I. 180
— — — per ſe rectificabilis. I. 66
— — — trajectoria reciproca. II. 521. 523. 525. 539. 550. 559
— — — tranſcendentium ſimpliciſſima. I. 180
— — — utilis conſtruendis æquationibus differentialibus. I. 65. 184 186. 258. 260. 261. 270. 313. 395. II. 271. 400. 608. III. 77. 397. IV. 380. 490
— Hugeniana. V. *Tractoria.*
— rectangula, acutangula, obtuſangula. II. 523
Logarithmicarum infinitarum trajectoria orthogonalis. I. 260. 269. II. 277. 310
Logarithmicæ quantitatis differentiatio. I. 185
— — differentiale. IV. 132
— — integrale. III. 378. 381. 382. IV. 147 ſ.
Logarithmicæ ſpiralis evoluta eſt ipſi æqualis & ſimilis. I. 61. III. 459
— — in medio reſiſtente deſcriptio. I. 495. 500. 547 ſ. IV. 350 ſ.
Logarithmique, *courbe des viteſſes du boulet dans le canon.* III. 18. 19
— *courbe des viteſſes & des tems d'un corps mû dans un milieu réſiſtant comme le quarré de la viteſſe.* III. 75
Logarithmus dati numeri per ſeriem exhibitus. I. 126
Loi de continuité *dans la Nature.* III. 9
Loix *de* KEPLER *incompatibles dans le ſiſtème ordinaire des Tourbillons.* III. 269
— *de la communication du mouvement.* III. 1. 7. 28. 55
— — — — — —, *leur liaiſon.* III. 57
Longitudo viæ quam Conoides deſcribit in medio reſiſtente, priuſquam velocitatis partem datam amittat. III. 369
Loſange, *route & viteſſe d'un vaiſſeau qui a cette figure.* II. 41. 45. 51
Lotio mercurii, ut magis luceat. II. 350
Loxodromique (*Solution du Problème*). IV. 185. 186
Lucerna mercurialis inextinguibilis. II. 390
Ludentium ſortes. IV. 28. 30. 31. 32
Lumen barometri conſpicitur deſcendente hydrargyro. II. 327. 336
— — — in ſummitate columnæ. II. 327. 337
— — cur non conſpicitur in omnibus barometris. II. 337. 344
— — debilitatur tempore & tandem extinguitur. II. 328
— — eo vividius quo fortius agitatur mercurius. II. 327. 337
— — guttula humidi prorſus extinguitur. II. 328. 343. 347
— — qualem cauſam agnoſcat. II. 334
— — quomodo ab aliis explicetur. II. 382

Digitized by Google

Lumen zodiacale. I. 89
Lumiere *des corps frottez.* I. 435
— *du mercure dans le barometre.* I. 337 ſ. 349 ſ. 357 ſ.
— — — — — — *ſa cauſe.* I. 339 ſ.
— *du ſoleil ne conſiſte pas dans une ſimple preſſion.* III. 286
— *zodiacale, ou équinoctiale.* III. 281
Luminis cauſa & natura. II. 329. 331
— velocitas. II. 332
— unda qualis. I. 193 ſ.
Lune, *inclinaiſon de ſon orbite ſur le plan de l'équateur.* III. 359
— *mouvement de ſon orbite.* III. 165
Luxata pendula. IV. 302

M

MAin (*avantage de la*) *aux jeux de hazard.* I. 458
MAJOWII experimentum, utrum aër de novo generetur. I. 22
MAIRAN (*De*) *ſon explication du mouvement diurne des planetes.* III. 314
Manœuvre *des Vaiſſeaux.* II. 1
Mare, quomodo aquæ inde ad montium cacumina aſſurgant. I. 43
MARIOTTE *ſur le mouvement.* III. 3
Martis motus diurnus. IV. 184
Mât, *où il doit être placé.* II. 73
Materiæ aëre ſubtilioris exiſtentia. II. 329. 339
Matiere céleſte *n'eſt pas toute d'une même denſité.* III. 154
— *du ſecond élément.* III. 276
— *première diviſée à l'infini.* III. 275
— — *ne réſiſte point au mouvement des corps.* III. 277
MAUPERTUIS (*De*) *ſon expoſé des ſyſtêmes de* DESCARTES *&* *de* NEWTON. III. 264
De Maximis & Minimis (*Problêmes*) I. 64. 202. 204. 211. 254 ſ. 308 ſ. 424. II. 32. 40. 214 ſ. 242 ſ. III. 62. 64. 193. 372. IV. 189.
— — — (quæſtiones numericæ). IV. 25. 27
Maximum. I. 50. 225. 235. 424. II. 33. 40. 214 ſ. 242 ſ. III. 21. 62. 64. 193. 372. IV. 25. 27. 189. 376. 406. 438. 473
Maximorum & minimorum Methodus non ſufficit inveniendis curvis quæ ipſæ maximi vel minimi proprietate gaudent. I. 188
Maximum maximorum *comment il ſe détermine.* II. 36
Mechanicarum curvarum genera. II. 591. III. 470
Medii reſiſtentia & denſitas, qualis eſſe debeat, ut corpus in data curva moveatur. I. 481 ſ. 532 ſ. 537 ſ. 543 ſ. IV. 347 ſ.
— — quæ ſit ejus cauſa. I. 529

Digitized by Google

—— quantum retardet projectile. IV. 356. 366 ſ.
in *Medio reſiſtente* motus. I. 481 ſ. 502 ſ. II. 399. 513. IV. 347 ſ. 354 ſ. 374 ſ. 378 ſ. 382 ſ.
Mémoire *de Mr.* RENAU *ſur un principe de Méchanique* II. 97
Menſura virium vivarum, qualis. I. 321. III. 245. 248. 371. 374. 375. IV. 264. 459. 490
Mercure (*le*) *contracte dans l'air une pellicule.* I. 341
— *quel qu'il ſoit, eſt propre à luire dans le vuide.* II. 358. 362. 366
V. *Phoſphore.*
Mercurialis phoſphorus. V. *Phoſphorus mercurialis*
Mercurii natura. II. 335
— præparatio per lotiones. II. 350
Mercurius in barometro cur ſuſpenſus hæreat. I. 88
— lucet in vacuo. II. 319
— minus lucet impurus. II. 341
— ut luceat qualis eligendus. II. 350
Meridianus nullus aliis præferendus. IV. 498
Merſennus Cycloidem primus conſideravit juxta Gallos. I. 322
Meſure *des forces vives.* II. 39. 41. 49. 51. 53
Metaphyſica principia, qua cautione in mechanicis adhibenda. I. 88. IV. 272
Méthode *d'elever un Polynome à une puiſſance quelconque.* I. 461
— *des iſopérimetres.* II. 235
— *directe du Probléme de la plus vite deſcente.* I. 197 ſ. II. 267
— *inverſe des Tangentes, Probléme utile dans cette méthode.* I. 396
— *pour réſoudre une égalité donnée avec une portion donnée de courbe.* I. 67. 90
— *pour trouver la nature des courbes de la voile, du linge, d'une corde dilatée par la preſſion d'un fluide.* II. 91
—— *les tautochrones dans un milieu réſiſtant.* III. 173
Methodi Newtonianæ. IV. 136
Methodus determinandi radios oſculi. I. 381
— differentiandi de curva in curvam. II. 439
— directa ſolvendi Problemata hydraulica. IV. 432
— exhibendi ſummas progreſſionum per numerorum naturalium potentiam datam procedentium. IV. 16
— extrahendi radices Rolliana vitioſa. III. 529. 533
— fluxionum Newtoniana. IV. 129
— Hermanniana ſolvendi Problema catenarium ab errore repurgata. IV. 234
— incrementorum TAYLORI quid novi contineat. II. 485
— integralium. III. 385 ſ.
— integrandi ſine prævia ſeparatione indeterminatarum. III. 108 ſ. IV. 42 ſ. 408

Methodus inveniendi catenarias & velarias. I. 107. 108
—— centrum oſcillationis. I. 528. II. 168. III. 252. IV. 259
—— curvas quæ datum habeant numerum ſpatiorum quadrabilium. III. 406. ſ. II. 315 ſ.
—— evolutas & cauſticas datæ curvæ. I. 58
—— ſolidum minimæ reſiſtentiæ. I. 311
— parandi barometra lucentia. II. 353
—— phoſphorum mercurialem. II. 365. 371
— quadraturarum Craigiana inſufficiens. I. 136. 140. 144
— reducendi quadraturas ad longitudines curvarum. I. 150. II. 582
— tangentium inverſa. III. 413 ſ.
— univerſalis non debet temere dici. I. 136. IV. 140
— vulgaris de maximis & minimis non ſufficit omnibus hujuſmodi Problematibus ſolvendis I. 187
MICHELOTTI defenſio Demonſtrationis Principii hydraulici. II. 212
Milieu réſiſtant (*Force centrale dans un*). I. 502
—— (*Pendule compoſé dans un*). IV. 382
—— (*Tautochrone dans un*). III. 173
— *ſa réſiſtance*. V. Réſiſtance.
Minimum. I. 64. 185. 201. 202. 211. 225. 235. 255. 308. II. 214. ſ. 242. ſ. IV. 127. 271
Mobile perpetuum artificiale. I. 41. 90
MOIVRE (De) *Théoreme ſur les forces centrales*. I. 477
— *Théoreme pour élever une ſuite infinie à une puiſſance quelconque*. IV. 173
MOIVREUS dedit theorema pro lege virium centralium invenienda. I. 551
——— pro comparatione curvarum ſed non ſatis univerſalia. IV. 153 ſ.
——— theoremata pro extractione radicis ex ſerie infinita & pro infinitinomio ad poteſtatem indeterminatam elevando. IV. 152
— demonſtravit ſeriem Bernoullianam. II. 490
—— theorema Coteſianum. IV. 67
— in eum animadverſiones. IV. 146 ſ.
Moles corporis humani quanta fieret, ſi nihil de ſua ſubſtantia amitteret. I. 295
MONTMORT (*Lettre a Mr. de*) *ſur les jeux de hazard*. I. 453
— *extraits de ſes Lettres*. II. 494. ſ. 499. ſ. 507. 509. 512
Motus angularis. IV. 257. 262. 265
—— duplex in uno eodemque corpore. IV. 279
— annui & diurni Planetarum relatio. IV. 280 ſ.
— communicatio ope trianguli rectanguli. IV. 332
—— per vectem. IV. 262
— conſervatio non indiget principio motrice. III. 253
— corporum duorum per elaſtrum interpoſitum. III. 249

Digitized by Google

Motus corporum, gravium pendulorum & projectilium theoria. I. 514 ſ.
— curvilineus corporum in medio reſiſtente. I. 481. ſ. 532. ſ. 537. ſ. 543. ſ. IV. 347 ſ.
— ex colliſione corporum irregularium. IV. 273
— globi ferrei in medio reſiſtente. IV. 357. ſ. 365 ſ.
— liquoris in ſiphone, ſeu tubo inflexo. III. 125. IV. 474
— in tubo partim immerſo. IV. 419. 488
— liquorum per vaſa & canales. IV. 391 ſ.
— muſculorum. I. 93 ſ.
— omnis poteſt intelligi tanquam ab elaſtro productus. III. 242
— pendulorum. I. 514. II. 168. IV. 285. 302. 310. 313. 374
— — circularium. II. 187
— perpetuus artificialis. I. 41. 90
— projectilium. I. 481. ſ. 530. ſ. IV. 347 ſ.
— quantitas, non virium, augetur ac minuitur. III. 254
— reptorius. I. 408. ſ. 437. ſ. 450. 452
Moulins à vent (*Problême ſur les*). IV. 192
Mouvement *commun des Planétes d'Occident en Orient inexplicable dans le ſyſtême de* NEWTON. III. 307
— *de deux corps par un reſſort interpoſé.* III. 24 ſ.
— *de l'orbite de la Lune, ſa cauſe.* III. 165
— *des corps eſt le même ſur un plan en repos ou en mouvement.* III. 27
— *des figures curvilignes dans un fluide.* II. 55
— *diurne de Jupiter.* III. 320
— — *de Venus.* III. 322.
— — *des Planétes.* II. 313. ſ. 321 ſ.
— *loix de ſa communication.* III. 1. 7. 28. 55. 57
— *produit & détruit par la force d'un reſſort.* III. 15
— *régle générale de ſa communication.* III. 28 ſ.
— *ſa quantité ne ſubſiſte pas la même dans l'Univers.* III. 38
Multifilia pendula. IV. 313.
Multigibbæ curvæ I. 440
Multiplicatio anguli & arcus. I. 386. 511. II. 526. IV. 69
Multiplication *des lignes, comment elle doit être entendue.* IV. 164
Multiſectio anguli. I. 386. 511. IV. 69
MUSCHENBROEK, methodus parandi phoſphorum mercurialem. II. 371
Muſcularis veſiculæ figura circularis. I. 106. 108. 113
Muſculorum motus. I. 93 ſ.
— ſtructura. I. 97
Muſculus nulla vi tertia ſui parte poteſt contrahi. I. 113
Muſti fermentatio. I. 17
— — quomodo impediatur. I. 32
Mutatio ſucceſſiva corporis humani per calculum determinata. I. 288

Natura

N

Atura agit per vias ſimpliciſſimas. IV. 271
Navium pondus explorari poteſt per oſcillationes eorum. IV. 296
Negativa integralis quid deſignet. III. 399
Nervorum ſtructura. I. 100
NEWTONI cataracta confutata. IV. 483. 484
— de Cycloide inventa. I. 324
— determinatio curvæ minimæ reſiſtentiæ. I. 309
— errores quidam. I. 534. 535. 542. 548. ſ. 555. IV. 350
— explicatio refractionis ingenioſa magis quam vera. I. 372
— laudes.
— methodi. IV. 129. 136
— problema de motu corporum in medio reſiſtente generalius conceptum. IV. 347
— ſolutio problematis trajectoriarum orthogonalium. II. 273
— theorema de quiete aut motu uniformi centri gravitatis. IV. 34
— — de ſummis potentiarum radicum æquationis propoſitæ. IV. 22
NEWTONUS non habuit perſpectam theoriam virium vivarum. III. 253
NEWTON *la régle qu'il donne pour prendre les differences n'eſt bonne que pour le premier degré.* I. 509
— *ſa ſolution du Problème de la plus vite deſcente.* I. 196. 200
— *ſes mépriſes ſur la determination des forces centrales dans un milieu réſiſtant.* I. 505
— *ſes objections contre les Tourbillons réſolues.* III. 143 ſ.
— *ſon ſyſtème de Phyſique céleſte.* III. 137. 264
— — — *comparé à celui de* DESCARTES. III. 136
— — — *eſt géometrique.* III. 265
— — — *ne rend pas raiſon du mouvement commun des Planétes d'Occident en Orient.* III. 307
— — — — — — — *du mouvement d'Aphélie.* III. 164. 327
— — — *ſes inconvéniens.* III. 266. 267
— *ſuppoſe ſans démonſtration l'inverſe du Problème des forces centrales.* I. 480
Niceni Concilii decreta de Paſchate. IV. 496
NIEUWENTIITIUS calculi differentialis impugnator notatus. I. 145. 179 ſ.
Nœuds *des Orbites des Planètes leur mouvement.* III. 358
Notio vera virium vivarum. III. 239
Numeri dati Logarithmus per ſeriem exhibitus. I. 126 ſ.
Numerorum aureorum Cyclus abolitus. IV. 495
— figuratorum ſeries. III. 521. IV. 14
— primorum inveniendorum ratio. I. 89. 90

Digitized by Google

Numerus dati Logarithmi per ſeriem exhibitus. I. 127. III. 378.
Nutritio. I. 275 ſ.
Nutritionis finis. I. 286
— modus. I. 277. ſ. 282 ſ.
— ſpecies. I. 276. 283.

O

Objecta tria in eadem recta, ex quo puncto æqualia videantur. IV. 293
Obliquité *de l'axe de rotation des Planétes à leur Orbite, & ſa cauſe.* III. 324
Obrepere curvam curva quando dicatur. I. 412
Obſervationes occaſione Terræ motuum factæ. IV. 512 ſ.
— pendulorum prope æquatorem non ſatis accuratæ. I. 520.
OFFENBURGI Problema de deſcribendis in ſuperficie ſphærica curvis algebraicis rectificabilibus. III. 212. 226
Onde *de lumière, ſa courbure.* I. 197
Opticum Problema. IV. 293
Opus hydrodynamicum Dan. BERNOULLII. IV. 392
Or *frotté contre le verre donne de la lumière.* I. 436
Orbitæ Planetarum, cur ellipticæ. I. 555.
Orbite *de la Lune, mobile & pourquoi.* III. 165
— — — — *inclinée à l'équateur & pourquoi.* III. 359
— *du ſecond ſatellite de Jupiter, cauſe de ſon inclinaiſon.* III. 362
Orbites *des Cometes pourquoi diſpoſées irréguliérement.* III. 310
— — — *leur inclinaiſon diminue.* III. 313
— *des Planétes elliptique, & pourquoi.* III. 135. 136. 139. 157. 161. 309
— — — *leur inclinaiſon.* III. 330 ſ.
— — — *leur mouvement.* III. 135. 162. 164. 169. 327. 328
— — — *leurs nœuds.* III. 358
— — — *pourquoi renfermées dans le zodiaque.* III. 308 ſ.
— *des ſatellites de Saturne, leur inclinaiſon.* III. 361.
Orthogonalis Trajectoria. V. *Trajectoria orthogonalis.*
Oſcillantis catenæ figura. IV. 328
— chordæ muſicæ figura. III. 210
Oſcillation. V. Centre d'Oſcillation.
Oſcillationis centrum. V. *Centrum oſcillationis.*
Oſcillationes corporum aquæ inſidentium laterales. IV. 286. 291
— — — verticales. IV. 294
— — titubantium. IV. 296
— chordæ muſicæ. III. 125. 207
— — ponderibus onuſtæ. III. 126. 198
— liquoris in ſiphone ſeu tubo recurvo. III. 125. IV. 474
— — in tubo partim immerſo. IV. 488

Oſcillationes penduli in medio reſiſtente. IV. 374
— penduli luxati. IV. 302
— penduli multifilis. IV. 313
— pendulorum diverſis viribus agitatorum. I. 518. II. 170
— pendulorum ſympathicorum. IV. 310
Oſcillationibus minimis pendulum iſochronum determinare. IV. 281
— navis pondus ejus explorare. IV. 296
Oſculans planum. IV. 113
Oſculator circulus. V. *Circulus oſculator*.
Oſculi radius. V. *Radius oſculi*.

P

Panis fermentatio. I. 31
Pantogonia curva. II. 571. 581. 600 ſ.
PAPPI Regula de menſurandis ſpatiis genitis ex motu centri extenſionis genitricis, promota. I. 153. 158
Parabola ex evolutione parabolæ cubicalis ſecundæ deſcribitur. III. 443
— in quali medio a projectili gravi deſcribitur. I. 488
— omnis aut per ſe aut cum alia rectificabilis. I. 250
— ſpirali æqualis æquale ſpatium comprehendit. I. 47
— vulgaris cum cubico-biquadratica conjuncta rectificationem admittit. I. 251. IV. 95
Parabola cauſtica. III. 471. 477. 552
— evoluta. I. 58 ſ. III. 435. 438
— extenſio pendet a quadratura hyperbolæ. I. 242
— longitudo circuli arcubus comparata per approximationem. I. 444
— radius oſculi determinatus. I. 383. III. 435. 438
Parabola biquadratica clepſidris conficiendis idonea. IV. 481. 482
Parabola cubicalis prima arcus differentiam habentes rectificabilem. I. 252
— — — radius oſculi. III. 438
Parabola helicoides, vel *ſpiralis parabolica* parabolæ cubicali æqualis. I. 47
Parabola ſemicubica, vel *cubicalis ſecunda* evoluta eſt parabolæ vulgaris. I. 58 ſ. III. 435. 438.
— — iſochrona curva eſt. III. 485
— — proprietate gaudet analoga iſochroniſmo. IV. 250
— — quales curvas ſui evolutione generet. III. 443
— — rectificabilis. I. 252
— — trajectoria eſt reciproca ſimpliciſſima II. 566. 568. 572. 574. 576. 593
Parabolarum in alias curvas algebraicas transformatio. IV. 92
— quadratura I. 164
— radius oſculi. I. 380
— rectificatio quando poſſibilis. I. 250. IV. 142
— trajectoriæ. I. 260. 261. 267. 270. II. 309. 310. 312

Digitized by Google

Paraboles, *équation de la courbe qui en coupe une infinité à angles droits.* I. 396
Parabolici conoidis titubantis oſcillationes. IV. 301
Parabolicorum arcuum comparatio. I. 242
——— erronea Tſchirnhauſiana. I. 151. 159. 171. 177
—— differentia rectificabilis. I. 247
— ſpatiorum comparatio. I. 151
Paraboloides in quali medio a projectili gravi deſcribatur. I. 493
Parallelam lineam ducere lineæ datæ. I. 154. 158
Parallélisme *de l'axe des Planètes.* III. 326
Parallélogramme rectangle, *route, dérive & viteſſe d'un vaiſſeau de cette figure.* II. 15 ſ.
Paralyſis cauſa. I. 103
PARDIES demonſtratio tautochroniſmi cycloidis confuſum chaos. III. 491
PARENTII in HUGENIUM iniqua cenſura. II. 188
Partes omnes corporis humani tempore renovantur. I. 285
Particules ignées *peu vraiſemblables.* I. 364
PASCAL, *ſon Triangle arithmétique.* I. 460
PASCHALII de Cycloide inventa. I. 323
Paſchatis feſtum, quo die anni 1724 celebrandum. IV. 494 ſ.
Patiens. V. *Corpus patiens.*
Pellicula mercurii lumen ejus in vacuo impedit. II. 338
Pellicule, *qui envelope le mercure, ſes effets.* I. 341. 353
Pelotons *du torrent central.* III. 292. 295 ſ.
PEMBERTON demonſtratio theorematis Coteſiani. IV. 68
— ſolutio problematis trajectoriarum reciprocarum. II. 520. 521. 524. 548. 552. 557. 575. 601
Pendula, cur abbrevianda prope æquatorem. I. 520
— iſochrona ſunt quorum longitudines ſunt ut vires quibus agitantur. I. 518
— luxata. IV. 302
— multifilia. IV. 313
— ſympathica. IV. 310
— turbinantia. II. 190
—— ſunt iſochrona quæ deſcribunt ſuperficies conicas æque altas. II. 194
Pendule *compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382
— *qui imite le mouvement des planètes.* III. 169
Penduli oſcillationibus minimis iſochroni longitudo. IV. 285
— velocitas in medio reſiſtente. IV. 374
Pendulorum diverſis viribus agitatorum oſcillationes. I. 518
— motus. I. 514. ſ. II. 168. ſ. IV. 285. 302. 310. 313. 374

Pendu-

Digitized by Google

Pendulorum motus circularis. II. 187
— ope gravitas corporum ſpecifica exploratur. I. 524. 527
— oſcillantium in fluidis centrum oſcillationis. II. 182
— oſcillationes in fluidis. I. 522 ſ.
Penſées *ſur le ſyſtême de* DesCartes. III. 132 ſ.
Percurrens quantitas, quæ. I. 180
Percuſſionis vis infinite major maxima vi ponderis. I. 89
Percuſſion, *ſon centre eſt-il le même que celui d'oſcillation.* IV. 180
Perfectio regulæ pro inveniendo valore fractionis, cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. I. 401
Peripheriæ ad radium ratio per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Perpetuum mobile artificiale. I. 42. ſ. 90
Perreptanda & *perreptans curva.* I. 412
Peſanteur *des corps vers le Centre de la Terre.* III. 300
— — — *ne tendroit pas au centre dans le ſyſtême des Tourbillons.* III. 272
— *des Planètes vers le ſoleil.* III. 297. 298
Phenomena barometri lucentis. II. 327
Pharaon, *Problême ſur ce jeu.* I. 454
Philoſophiæ experimentalis vindicatio. I. 306
Phoſphore *de mercure.* I. 337 ſ. 349 ſ.
Phoſphorus mercurialis. II. 321
— — portatilis. II. 362
— — quomodo parandus. II. 365
— — ejus uſus varii. II. 389
Phyſique *céleſte.* III. 261
Picardi barometrum lucens. II. 324
Pilotage. II. 3
Piſces in aqua reſpirant. I. 20.
Planetarum motus annui & diurni ex eadem cauſa proficiſci potuerunt. IV. 280
— orbitæ ellipticæ. I. 555
Planétes, *leur axe.* V. Axe.
— *leur mouvement commun d'occident en orient, inexplicable dans le ſyſtême de* Newton. III. 307
— *leur mouvement diurne, ſa cauſe.* III. 313 ſ. 317
— *leur Orbites.* V. Orbites.
— *leur peſanteur vers le Soleil.* III. 297 ſ.
— *ne ſuivent pas exactement le courant du Tourbillon.* III. 282
— *raport de leurs tems périodiques & de leur diſtances* III. 155
— *ſe meuvent comme dans un vuide parfait.* III. 307
— *ſphériques, ſe mouvroient dans le plan de l'équateur du tourbillon.* III. 334

Planètes

Planétes ſphéroides ſe meuvent dans un plan incliné à l'équateur du tourbillon. III 335 ſ.
Planum oſculans lineam in ſuperficie curva deſcriptam. IV. 313
— turbinationis. II. 191
Plenilunii paſchalis anno 1724 momentum. IV. 495.
Pluvia mercurialis ignea. II. 390
POLENI experimenta de aquis fluentibus. IV. 439
— obſervatio de bullula aerea lucente in barometro luminoſo. II. 345
Polygone *infini-lateral.* IV. 162
Polygoni regularis in circulo inſcriptio per æquationem algebraicam. IV. 69
— — circulo inſcripti proprietas. IV. 71
Polynome, *elevé a une puiſſance indéfinie.* I. 461 ſ.
Ponderibus onuſtæ chordæ oſcillationes. II. 126. 198
Pondus a gravitate quid differat. II. 169
Pondus majus, cur non multo difficilius minori elevetur. I. 116
— navis ex oſcillationibus ejus explorare. IV. 296
— qua copia ſpirituum animalium elevetur. I. 113
Pons ſublicius in æquilibrio tenendus V. *Æquilibrationis curva.*
Poſitiones de propoſitionibus. I. 77
Potentia hydroſtatica. IV. 436
— indeterminata binomii. III. 522
— — — conſenſus ejus cum differentia rectanguli. II. 486
— — — terminus ejus maximus. IV. 25
Potentialis ſimilitudo curvarum. II. 450
Potentiarum compoſitio & reſolutio. IV. 253
— ſeries reciproca. IV. 12. 22
— vel radicum numerorum naturalium ſumma. IV. 16
Poudre à canon, *ſes effets dans les piéces d'artillerie.* III. 20
Præcipitatio chymica. I. 37. 39
Præcipitatum. I. 11
Préceſſion *des équinoxes.* III. 355
Preſſio, vis mortua. III. 241
— elaſtrorum in corpus. III. 247
— fluidi in fundum vaſis cylindrici dum effluit. IV. 423
— in fundos plurium tuborum, dum ex uno in alium fluit. IV. 430
— — in latera canalium per quos fluit. IV. 442 ſ. 448. 449. 450. 453
— — in tubam hyperbolicam. IV. 470
— ſtratorum fluidi in inferiora. IV. 395. 435. 465. 471
Preſſion *des couches de fluide qui compoſent un Tourbillon, les unes contre les autres.* III. 147. 155
— d'une corde contre le cylindre autour duquel elle eſt roulée. IV. 219. 220. 225

Preſſion *d'une ſuite de reſſorts contre un corps.* III. 41
Preſſoir, *ajouté au Cabeſtan pour le délivrer de ſes inconvéniens.* IV. 228
Primi numeri, quomodo quærendi. I. 89. 90
Principe de Méchanique (*Mémoire ſur un*). II. 97
— — — *attaqué.* II. 149
— — — *defendu.* II. 158. 160
— *d'uniformité, employé dans la ſolution du Problême des iſopérimetres.* II. 237. 239. 243. 247. 248
Principia calculi exponentialis. I. 179
— metaphyſica, qua cautione in mechanicis adhibenda. I. 88. IV. 272
Principii hydraulici demonſtratio. II. 208. 210. 212
Principium, non datur ſaltus in rerum natura fœcundiſſimum. I. 187. III. 9
— uniformitatis adhibitum in ſolutione Problematis iſoperimetrici. II. 481. 506
Prix de l'Académie, *Diſcours pour les mériter.* III. 1. 131. 261. IV. 205
Problema analyticum, de quadraturis reducendis ad quadraturam circuli & hyperbolæ. II. 402
— — — — — — — — — — — ſolutum. II. 407. IV. 52
— arcuum parabolicorum datam inter ſe rationem habentium. I. 243
— aſtronomicum vel gnomonicum de hyperbola æquilatera quam deſcribit extremitas umbræ bacilli. I. 91
— balliſticum, de aſcenſu & deſcenſu gravis in altum projecti, in medio reſiſtente. IV. 354 ſ.
— Beaunianum ſolutum & demonſtratum. I. 65. 128. 146. 148
— brachyſtochronæ propoſitum. I. 161. 165. 167
— — ſolutum. I. 190. II. 469 ſ.
— breviſſimæ lineæ in ſuperficie curva. I. 256. 265. IV. 108. 127
— calculi integralis. I. 175. II. 402. 442. III. 108. ſ. IV. 42. 49. 52. 77. 79. 381. 408
— catenarium. I. 48. II. 232. 251. III. 491. IV. 234
— cauſticarum. I. 52. ſ. III. 464 ſ.
— clepſydrarum. IV. 478 ſ.
— curvæ æquilibrationis. I. 129. 133. 140
— — algebraicæ quæ habeat determinatum numerum ſpatiorum rectificabilium. III. 407. II. 315
— — algebraicæ rectificabilis in ſuperficie ſphærica deſcribendæ. III 212
— — cujus perpendiculares ſint æquales tangentibus curvæ datæ. III. 431
— — cujus reſecta ſit ad tangentem in ratione data propoſitum. I. 66
— — per cujus arcus grave deſcendens a quiete ad imum impendat tempora altitudinum poteſtatibus proportionalia. IV. 246

— — preſſionis æquabilis propoſitum. I. 141
— — quæ cum arcu circuli vel parabolæ ſit rectificabilis. IV. 95. 96
— — quæ ſit ad ſuam tangentem in ratione data. III. 425
— — quam deſcribit corpus in tubo circulante. IV. 248
— — — — grave in medio reſiſtente projectum. II. 399. 513
— — — — radius ſolaris in atmoſphæra. III. 516
— — rectam per datum punctum actam, vel datæ poſitione parallelam ita ſecantis ut ſegmentorum rectangulum datum ſit. I. 156
— — — — — — — — — — — — — ut ſegmentorum ſumma vel differentia data ſit. I. 158. IV. 40
— — — — — — — — — — — — — ut ſegmentorum data poteſtas datam ſummam efficiat. I. 169. 170
— cycloidis, aut curvæ cujuſvis, quæ inter ſimiles talis ſit, ut per illam grave a dato puncto ad datam rectam citiſſime perveniat. I. 201. 254. 262
— de alea. IV. 28 ſ.
— de aſcenſu & deſcenſu corporis per arcus æquales in medio reſiſtente. IV. 378
— de centro rotationis ſpontaneo. IV. 265
— de chordarum vibrationibus. III. 126. 198
— de colliſione corporum irregularium. IV. 273
— de communicatione motus per triangulum rectangulum. IV. 332
— — — — per vectem. IV. 262
— de complenda æquatione differentiali. II. 442. IV. 77
— de deſcenſu gravis per planum inclinatum mobile. III. 395. IV. 337. 341
— — — — poſt ſe aliud aſcendens trahentis. III. 237. 256
— de evolutionibus curvarum. I. 60. III. 432 ſ.
— de lege virium qua fit ut tempora deſcenſus corporis ad centrum ſint ut poteſtates altitudinum ex quibus deſcenſum inchoant. IV. 243
— Deliacum ope circini & normæ ſolutum. III. 542
— de linea in ſuperficie curva, cujus planum oſculans, cum plano tangente datam inclinationem habeat. IV. 113
— de maximis & minimis. I. 254. 308. II. 214. III. 372. IV. 189
— — — — in numeris. IV. 25. 27
— de methodo tangentium directa. I. 138
— — — — inverſa. III. 413 ſ.
— de motu corporum in medio reſiſtente. I. 481 ſ. 502 ſ. II. 399. 513 IV. 347 ſ. 354 ſ. 374 ſ. 378 ſ. 382 ſ.
— de oſcillationibus corporum aquæ inſidentium. IV. 286 ſ.
— — — — titubantium. IV. 296.

— — — penduli in medio quod reſiſtit in ratione ſimplici velocitatum. IV. 374
— — — pendulorum luxatorum. IV. 302
— — — — multifilium. IV. 313
— — — — ſympathicorum. IV. 310
— de quadratura curvarum. III. 400 ſ. II. 402. IV. 52
— de quadraturis tranſcendentibus reducendis ad extenſiones curvarum. II. 585
— de rectificationibus curvarum. IV. 89. 92
— de transformationibus curvarum. I. 419. IV. 89
— de ſummis ſerierum. IV. 5 ſ. 20
— de viribus motricibus ad vectem applicatis. IV. 256
— dioptricum generale. IV. 195
— elaſticæ laminæ inflexæ. I. 122. IV. 242
— funicularium. V. *Problema catenarium.*
— geometricum. I. 66. 169. IV. 34. 36. 38
— gnomonicum. V. *Problema aſtronomicum.*
— hydraulicum IV. 419. 488
— inverſum virium centralium. I. 555
— iſochronæ. III. 482
— — paracentricæ. III. 486. I. 120
— iſoperimetricum. I. 201. II. 214. 219. 475. 481. 503
— lintcariæ. III. 512
— opticum. IV. 193
— pantogoniæ. II. 571. 581. 602 ſ.
— ſectionum angularium. I. 331. 386. 511. II. 526. IV. 69. 144
— ſolidi minimæ reſiſtentiæ. I. 308. 311. 316
— ſynchronæ. I. 192
— tautochronæ. III. 488
— trajectoriarum orthogonalium. I. 193. 259. 266. II. 270. 273. 275 281. 286. 290. 291. 295. 305. 314. 403. 435 ſ.
— trajectoriarum reciprocarum. II. 472. 520. 535. 537
— trajectoriæ reciprocæ ſimpliciſſimæ. II. 554. 575. 593
— trajectoriæ reciprocæ dati ordinis. II. 616
Problemata proponere utile eſt. II. 393
— phyſico-mechanica per Calculum integralium ſoluta. III. 482 ſ.
— ſoluta quotuplici ſenſu dici poſſint. II. 435
Problematum hydraulicorum ſolvendorum methodus directa & univerſalis. IV. 432
— ſolidorum & hyperſolidorum conſtructio geometrica. III. 539. 542
Probléme *de la brachyſtochrone, ou courbe de plus vite deſcente.* I. 194 ſ. IV. 190

——————— *ſa ſolution directe.* I. 198. II. 267 ſ.
——————— *d'une longueur donnée.* II. 254 ſ.
— *de la chainette.* I. 59. 430. II. 96. 251 ſ.
— *de la courbe de Mr.* DE BEAUNE. I. 62.
———— *entre les iſochrones qui renferme le plus grand ſegment.* II. 264.
————— *entre les iſopérimetres dont le centre deſcend le plus bas.* I. 227. 239.
— *de la courbure du linge chargé d'une liqueur.* I. 225. 432. II. 91. 95
———— *d'une voile enflée par le vent.* I. 59. II. 81 ſ. 94
— *de la cycloide, ou en general de la courbe entre les ſemblables, le long de laquelle un corps peſant parvient le plûtôt d'un point donné à une droite donnée.* I. 202. 211. 212. 218. 221
— *de la demi-ellipſe, entre toutes celles qui ont un même axe, qui eſt parcourue dans le moins de tems.* I. 220.
— *de la dérive d'un Vaiſſeau rectangulaire.* II. 15 ſ.
— *de la ligne la plus courte décrite ſur une ſurface courbe.* I. 204.
— *de la ſituation la plus avantageuſe de l'aîle d'un moulin à vent.* IV. 192.
— *de la ſituation la plus avantageuſe du gouvernail.* II. 40. IV. 192.
————————— *de la quille d'un Vaiſſeau.* II. 26. 35.
— *de la transformation des courbes.* I. 406.
— *de la Viteſſe d'un Vaiſſeau retenu par une corde infinie.* II. 142. 158.
— *de maximis & minimis.* I. 64. 202. 205. 208. 220. 424 ſ. II. 33. 40. 242 ſ. III. 21. 62. 64. 193. IV. 189.
— *de méchanique.* IV. 189.
— *des clepſydres.* IV. 186.
— *des courbes algébriques rectifiables décrites ſur une ſurface ſphérique.* III. 226. 230.
— *des iſopérimetres.* I. 202. 206. 214. 215. 220. 221. 222. 230. 231. 377. 424 ſ. II. 235 ſ.
— *des loix du choc des corps à reſſort.* III. 28. 59. 62. 64. 66.
— *des tautochrones dans un milieu réſiſtant.* III. 176 ſ.
— *du calcul intégral.* I. 393.
— *du pendule composé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382.
— *du plus petit crépuſcule.* I. 64.
— *du ſolide de moindre réſiſtance.* IV. 191
— *inverſe des forces centrales.* I. 469. 474. 478.
— *loxodromique.* IV. 185. 186.
— *propoſé aux Géometres ſur la conſtruction des égalités, avec une portion donnée de courbe, réſolu.* I. 66. ſ. 90
— *ſur les épicycloides ſphériques.* III. 216.
— *ſur les jeux de hazard.* I. 454 ſ.
Production *& deſtruction du mouvement par la force du reſſort.* III. 15
Programma, quo bina eruditis proponuntur Problemata. I. 166.

Projecti-

Projectilium motus. I. 481 ſ. 514 ſ. II. 399. 477. 513. IV. 354
Propoſitio, quid. I. 79
Propoſitionum variæ ſpecies. I. 83
Puiſſance *indéterminée d'un polynome.* I. 461
Pulveris pyrii vis, unde. I. 33. ſ. IV. 516 ſ.
Purificatio mercurii. II. 350
Purification *du mercure pour le rendre lumineux.* I. 361

Q

Quadrabiles curvæ quæ ſint, quæ non ſint. III. 395
Quadrabilia ſpatia numero determinata habentes curvæ. II. 315. III. 407
Quadraticæ radicis extractio per approximationem. IV. 15
Quadratorum ſeries reciproca. IV. 11. 22.
Quadratrice. IV. 177
— *propre pour la ſection des angles.* I. 199
Quadratricis DINOSTRATIS puncta facile determinantur. I. 447
Quadratura circuli & figurarum clauſarum impoſſibilis. I. 91. 150
— curvæ exponentialis. I. 185. III. 376
— curvarum. III. 394 ſ. 400 ſ.
— — reducibilis ad rectificationes. I. 137. 150. II. 582. ſ. IV. 144.
— — reductæ ad ſimpliciores. III. 396. II. 407. 419. IV. 52
— ſpatiorum cycloidalium. I. 322. 328. 330. 336. 389
— univerſalis per approximationem geometricam. I. 162
— — per ſeriem univerſalem. I. 125
Quadraturarum methodus Craigiana inſufficiens. I. 136. 140. 144
— tranſcendentium gradus. II. 591
Quæſtio chronologica, de feſto paſchatis anno 1724 celebrando. IV. 494
Quæſtiones numericæ de maximis & minimis. IV. 27
Quantitas motus, non virium, augetur ac minuitur. III. 254
Quantité de direction. III. 32
— — — *reſte la même avant & après le choc.* *ibid.*
— *de force vive ſubſiſte la même dans l'Univers.* III. 38
— *de mouvement ne ſubſiſte pas la même.* *ibid.*
Quille *de vaiſſeau, ſa ſituation la plus avantageuſe, pour gagner au vent ou le fuir.* II. 26. 35

R

R*Adicum* extractio commoda per approximationem. III. 537. IV. 15. 16.

Digitized by Google

— — — extractio per ſeries. III. 528
Radii lucis curvatura in diaphanis non uniformibus. I. 187
— — dum reflectuntur aut refringuntur compendioſiſſimam viam ſequuntur. I. 375
— ſolaris in atmoſphæra curvitas. III. 516
Radii reflexi in cauſtica longitudo. III. 465 ſ. 473 ſ.
— refracti in cauſtica longitudo. III. 549 ſ. 554 ſ.
Radius oſculi æqualis eſt evolutæ. III. 433
— — evolutam tangit & curvam evolutione deſcriptam ſecat ad angulos rectos. *ibid.*
— — expreſſus per differentiales. I. 382. III. 437
— — quomodo determinandus. I. 379. 380. 382. 384
— — — — variis in curvis determinatur. I. 380. III. 438 ſ.
Raion de lumiére, *ſa courbure dans un milieu inégalement denſe.* I. 197. 201
Raion oſculateur *des courbes qui ſatisfont au Probléme des iſopérimetres.* I. 210
Raions du Soleil, *leur origine.* III. 285
— — — *leurs effets.* III. 289
— — — *parvenus aux extrémités du Tourbillon, ce qu'ils deviennent.* I. 291
Ratio circumferentiæ ad radium per numeros celeriter appropinquantes. IV. 107. 108
Rationis uſus in Theologia. I. 196
Ratisbonenſe concluſum de feſto Paſchatis celebrando. IV. 495 ſ.
Reactio actioni æqualis & contraria. I. 372. IV. 484
Réaction *égale & contraire à l'action.* II. 14. III. 16
Rectificabiles per ſe curvæ. I. 372
Rectificatio cauſticarum. III. 466
— circuli cum algebraïca curva conjuncti. IV. 96. 97
— curvæ algebraïcæ præſtat rectificatione mechanicæ in conſtructionibus problematum. I. 121
— curvæ per additionem alterius. I. 249. IV. 95. 96
— curvarum haud vulgaris. IV. 89
— ope ſuæ evolutionis. IV. 444
— parabolarum aut per ſe, aut cum aliis conjunctæ. I. 250. IV. 142. 95
Rectificationibus curvarum aliæ quadrantur. I. 137. 150. II. 582. IV. 144
Reductio æquationis differentialis ſecundi gradus ad primum. IV. 79
— — — — ad parabolarum genus. IV. 88
— integralium ad quadraturam circuli & hyperbolæ. II. 402. 407
— perimetri ellipſeos ad peripheriam circuli per approximationem. I. 447

Re-

Reductio quadraturarum ad longitudines curvarum. I. 137. 150. II. 582. IV. 144
— quadraturarum ad ſimpliciores. II. 402. 407. 419. III. 396. IV. 52
— — — — per theoremata Moivreana non ſatis univerſalis. IV. 158
Reflexionis & *refractionis* natura explicata. I. 369
Reformatio Calendarii Gregoriana. IV. 495
Refractionis demonſtrationem veram dedit nemo. I. 371
— explicatio. I. 373
Refraction, *ſa loi.* IV. 184
Régle *générale de la détermination du mouvement.* III. 28
— *pour déterminer la direction moyenne de pluſieurs forces.* II. 82
Regula *Hugeniana* de centro oſcillationis demonſtrata. II. 175. 181. III. 252. IV. 261
— integrandi. III. 388
— pro determinanda tangente arcus multipli vel ſub-multipli, ex tangente ſimpli. I. 513
— pro determinandis radiis oſculi. I. 379. 384
— — — tangentibus curvarum. I. 381
— pro determinando valore fractionis cujus numerator & denominator certo caſu evaneſcunt. III. 421
Remarques *ſur le calcul intégral de Mr.* STONE. IV. 169
— *ſur le Commentaire ſur l'Analyſe des infiniment petits.* IV. 160
— *ſur les ſolutions qui ont été données des Problêmes iſopérimetres.* II. 235 257
RENAU (*Le Chevalier*) *a écrit le premier ſur la Manœuvre des Vaiſſeaux.* II. 4. 99
— *erreur de ſa théorie ſur l'angle de la dérive.* II. 19. 150
— — — — — *ſur la viteſſe des Vaiſſeaux.* II. 71
— *ſa diſpute avec M.* HUGUENS. II. 4. 99. 15. 129
— *ſon mémoire ſur un principe de méchanique.* II. 8. 97 ſ.
Reptoria curva. I. 413
— — æqualis ſummæ vel differentiæ curvarum perreptantis & perreptandæ. I. 414
— — algebraïca eſt ſi perreptans & perreptanda tales ſint. *ibid.*
— — ellipſis motu repente genita. I. 437 ſ.
Reptorius motus. I. 408. ſ. 437. ſ. 450. 452
Réſiſtance *de l'eau au mouvement d'un Vaiſſeau.* II. 104 ſ.
— — — — — — *égale à l'impreſſion du vent ſur la voile.* II. 105 ſ.
Réſiſtance *d'un milieu fluide, comment la concevoir.* II. 135
— — — — *déterminée par les loix du choc.* III. 71
— — — — *diminuë la viteſſe des corps.* III. 474
— — — — *ne change pas les loix du choc.* III 73
Reſiſ-

— — — *ne dépend pas de la ſubtilité des parties du fluide.* III. 277
— *la matiére céleſte n'en oppoſe aucune au mouvement des planètes.* ibid.
Réſiſtance moienne *d'une figure curviligne mué dans un fluide.* II. 55
— — *ſon axe.* II. 74. 77
— — *ſon centre.* II. 77
Reſiſtentia fluidi adverſus corpus ſolidum ejuſdem ſecum denſitatis. IV. 422
— globi duplo minor quam cylindri. IV. 368
— medii computata. I. 481. 528. 532. 544. 555. IV. 365
— — quæ ſit ejus cauſa. I. 529
— — quantum retardet projectilia. IV. 356. ſ. 369 ſ.
Reſolutio binomii $1 \pm x^n$ in ſuos factores reales duarum dimenſionum. IV. 58
— virium demonſtrata. IV. 253
Réſolution *des égalités avec une portion donnée de courbe.* I. 67. 74. 90
Reſſort (*force de*) *augmente en raiſon doublée de la chaleur.* III. 100 ſ.
— *comment on la peut concevoir.* III. 12
comment produit ou détruit le mouvement. III. 15
— *conjectures ſur ſa cauſe.* III. 83 ſ.
— *explication probable de ſa cauſe.* III. 81. 89. 91. 96
— *parfait ou imparfait pourquoi.* III. 98
Reſſorts (*ſuite de*) V. Suite de reſſorts.
Reſurrectio corporum non involvit contradictionem. I. 296
— — quomodo intelligenda. I. 297 ſ.
Retropreſſio vaſis per fluidum erumpens. IV. 484
— — — — invariabilis. IV. 488
Rhombe, *route & dérive d'un Vaiſſeau qui a cette figure.* II. 41. 45. 51
ROBERVALLII & TORICELLII de Cycloide contentiones. I. 322
— refractionis explicatio vitioſa. I. 371
Roboris gradus eſtimati. I. 117
Roideur, *élaſticité.* III. 13
ROLLE ejus methodus extrahendarum radicum. III. 529
— — — — vitioſa. III. 533 ſ.
— *ſes méthodes.* I. 66
Rotando deſcendentia corpora. III. 127 ſ.
Rotationis centrum ſpontaneum. IV. 265. 270
Route *d'un Vaiſſeau.* II. 113. 133. 146. 155
— — — *pouſſé par deux Vents.* II. 108. 133. 137. 146. 155. 165
— — — *qui a la figure d'un rectangle.* II. 18. ſ.
— — — — — — *d'un rhombe.* II. 41. 51
— — — *qui eſt terminé par deux arcs de cercle égaux.* II. 60 ſ.

Sanguiſe-

S

Sanguificatio I. 279
Sanguinis & Spirituum animalium efferveſcentia motuum muſcularium cauſa I. 101. 110
Sarbacanne, *qu'elle doit en être la longueur* III. 22
Satellites *de Jupiter & de Saturne, inclinaiſon de leurs Orbites* III. 361
Saturne, *inclinaiſon de l'Orbite de ſes Satellites* III. 361
Scientia infiniti, opus a LEIBNITIO meditatum I. 119
Secretio humorum I. 280
Section des Angles, *Quadratrice propre pour la réſolution de ce Problême* I. 199
Sections coniques, *ſont les ſeules courbes que puiſſe décrire un corps attiré vers un centre, avec une force réciproquement proportionelle au quarré de la diſtance* I. 469. 470. 475
Sectionum angularium problema I. 331. 386. 511. II. 526. IV. 69. 144
Sectionum conicarum latus rectum I. 45
——— menſura per quas lineas detur I. 150
Sectores cycloidici quadrabiles I. 326. 329
Sectoris elliptici in partes æquales diviſio I. 150. 159. 170. 177
Sector ſolidus cycloidicus, cujus centrum gravitatis poteſt algebraice determinari I. 333. 336. 391
Segmens de cercle *proportionels aux ordonnées exterieures de la cycloide* I. 198
Segmenta æqualia quomodo ex hyperbola abſcindenda III. 411
—— circuli arcubus curvæ algebraicæ proportionalia IV 94
—— quadrabilia cycloidis I. 325. 335
——— cycloidis ſociæ I. 334
Segmentum cycloidicum, cujus centrum gravitatis ſit algebraice determinabile I. 332
Semicirculus in medio reſiſtente deſcriptus I. 485. 532. ſ. IV. 349
Separatio indeterminatarum in æquationibus differentialibus I. 175. IV. 381. III. 421. ſ. IV. 49. 80. 375. II. 314
Séparation des indéterminées I. 478
Seriei cuborum reciprocæ termini impares omnes ſunt parium omnium ſeptupli IV. 11
—— figuratæ ſumma quam rationem habent ad ſummam totidem terminorum maximo æqualium III. 521. IV. 14
—— fractionum quarum numeratores & denominatores ſunt arithmetice progreſſionales terminus infiniteſimus IV. 5
—— harmonicæ ſumma infinita IV. 8. 11
—— quadratorum reciprocæ ſumma eſt ſub-ſextupla quadrati peripheriæ, cujus diameter unitas IV. 22

—— —— —— termini omnes impares parium omnium tripli IV. 11
Serierum convergentium uſus in calculo integrali III. 519. 524
—— —— in computando motu corporis datam curvam in medio reſiſtente deſcribentis I. 485. 535
—— —— in radicibus extrahendis III. 528 ſ. IV. 15. 16
—— methodus Leibnitiana laudata I. 125
—— variarum ſumma V. *Summa*
Series, *leur légitime uſage dans la Solution des Problêmes* IV. 170. 172. 174
Series abrumpentes D. GREGORII III. 520
—— exprimens logarithmum per numerum I. 126
—— —— numerum per logarithmum I. 127. III. 378
—— —— ſinum per arcum I. 127. IV. 20. 25
—— —— tangentem per arcum II. 533 IV. 24
—— quædam ſingularis naturæ III. 539 ſ. IV. 13
—— quarum ſummæ, licet incognitæ, datam habent inter ſe rationem IV. 10
—— univerſaliſſima pro integrationibus I. 125. III. 378. IV. 134. 155
—— —— ejus inveſtigatio quædam II. 488
—— —— hanc Taylorus uſurpavit II. 489. 584
Similitudo curvarum, quotuplex II. 450
Sinus arcus dati per ſeriem exhibitus I. 127. IV. 20. 25
Sinuum Tabulis condendis utile Theorema II. 525
—— verſorum. Curva V. *Trochoidis Socia*
Siphones liquorum in illis oſcillationes II. 125. IV. 474
SLUSE *ſa méthode de conſtruire les égalités* I. 73
SMITHIUS theorematis Coteſiani editor IV. 67
SNELLII theorema dioptricum I. 370
Solaris radii in atmoſphæra curvitas III. 516
Soleil, *ſa formation* III. 280
—— *ſa lumiére & ſa chaleur* III. 284. 285
—— *ſes raions* III. 285
—— —— —— *leur emiſſion ne diminue pas ſa maſſe* III. 286
—— *ſes taches* III. 283
—— *ſon atmoſphère* III. 281
—— *peſanteur des planétes vers cet Aſtre* III 297 ſ.
Solidarum partium in corpore humano compages I. 282
—— —— —— —— —— nutritio & incrementum I. 284
Solide *de la moindre réſiſtance* II. 34. IV. 191
Solidi minimæ reſiſtentiæ problema I. 308. 311 316
Soluta liquoribus corpora cur innatent I. 38. ſ.
— Problemata quotuplici ſenſu dici poſſunt II. 435
Solutio. V. *Æquatio. Problema*

Solu-

Solution. V. Equation, Problème
Sortes colluſorum IV. 28 ſ.
Sorts *des joueurs* I. 453 ſ.
Spatia curvilinea in partes infinite parvas diviſa concipiuntur, ut quadrentur III. 394
— Cycloidalia quadrabilia I. 322. 326. 328. 330. 336. 389. III. 460. 463
— hyperbolica æqualia quomodo aſſignanda I. 242. III. 417
— quadrabilia numero determinato habentes curvæ II 315. III. 407
Specifica gravitas, corporum ope pendulorum exploranda I. 524. 527
Sphæra ſegmenti titubantis oſcillationes IV. 300
Sphæricæ ſuperficiei portio quadrabilis III. 212
In *Sphærica ſuperficiei* curvam deſcribere rectificabilem III. 211 ſ.
Sphæroidearum ſuperficierum complanatio I. 160. 174
Sphæroiduus proprietas I. 174
Spirale *hyperbolique ou reciproque* I. 480. IV. 177
— *logarithmique, décrite dans un milieu réſiſtant* I. 506
— — *décrite par un corps attiré vers le centre avec une force réciproquement proportionelle au cube des diſtances* I. 480
Spiralis Archimedea æqualis parabolæ idem cum illa ſpatium comprehendit I. 47
— hyperbolica, qua vi deſcribi poſſit I. 552
— logarithmica evoluta eſt & cauſtica ſui ipſius I. 61. III. 459. 481
— — qua vi & in quali medio deſcribatur I. 495. 500. 547. IV. 350
— parabolica æqualis parabolæ cubicali I. 47
— quælibet curvæ cuidam algebraicæ æqualis I 47
Spiritus animales quid conducant ad motum muſculorum I. 100 ſ.
— — horum quantitas requiſita ad datum pondus ſuſtinendum I. 113. 114
Spiritus vini lucem barometricam mercurii extinguit II. 338 347
STENONIS hypotheſis de motu muſculorum I. 99
STONE, *Remarques ſur ſon Livre du calcul integral* IV. 164 ſ.
Strata liquoris fluentis ad ſitum lineæ ceotricæ perpendicularem ſe componunt IV. 396. 440
— — alia in alia agunt IV. 395. 435. 465. 471
Subrepere curvam curva quando dicatur I. 412
Subterraneæ cavitates IV. 516
Subtilité *des parties d'un fluide n'en change pas la réſiſtance* III. 277
Suite de reſſorts, *quelle preſſion elle exerce contre un corps, & quelle force elle lui communique* III. 42
Sulphuris & ferri fermentatio, Terræ motuum cauſa IV. 519. 520
Summæ ſerierum incognitæ, ſed datam habentes rationem inter ſe IV. 10
Summa progreſſionum per potentias vel radices numerorum rationalium procedentium IV. 16
— primorum mille numerorum ad decimam poteſtatem elevatorum IV. 19

Summa ſeriei cujuſdam ſingularis III. 540 ſ. IV 13
—— —— figuratæ, quam rationem habeat ad ſummam totidem terminorum maximo æqualium III 521. IV. 14
—— —— fractionum, quarum numeratores æquales, denominatores trigonales IV. 8
— — — — numeratores arithmetice, denominatores geometrice progrediuntur IV. 6
— — — — numeratores & denominatores ſunt geometrice progreſſionales ſed illi data quantitate aucti IV. 12
—— —— harmonicæ infinita IV. 8. 11
— — potentiarum parium quarum vis reciproca IV 20
—— —— quadratorum reciprocæ IV. 22
—— ſerierum variarum IV. 7. 8. 9. 10. 25. 149
Summandus terminus & *ſummator* iiſdem radicum ſignis conſtare debent I 144
In *Superficie curva* linea breviſſima I. 256. 265. IV. 108 ſ. 113 ſ. 127 V. *Linea*
Superficiei ſphærica portio quadrabilis III. 212
In *Superficie ſphærica* curvam deſcribere rectificabilem III 211
Superficierum conoidicarum & ſphæroidicarum complanatio I. 160. 174
Superficies conoidea cycloidis habens centrum gravitatis algebraice determinabile I. 333
Surface courbe, *Problême de la ligne la plus courte qu'on puiſſe y décrire* I. 204
Surface Sphérique, *Problême des courbes algébriques rectifiables à décrire ſur cette ſurface* III. 230ſ.
Syllogiſmorum reductio I. 83
Sympathica Pendula IV. 310
Synchrona curva I. 187. 192
—— —— eſt trajectoria orthogonalis cycloidum omnium ejuſdem initii I. 193. II. 279. 314
Synchrone, & *ſon uſage* I. 197. 203. 211. 218
Syſtème *de* COPERNIC, *véritable* III. 136
Syſtèmes *de* DESCARTES & *de* NEWTON *comparez* III. 136. 137. 264
— — — — — — *conciliez* III. 270
V. DESCARTES. NEWTON.

T

TAble *pour la manœuvre des Vaiſſeaux* II. 61
— — — — — — — *ſa conſtruction* II. 68
Tabula problematum iſoperimetricorum II. 214
Tabulis ſinuum & condendis utile theorema II. 526
Taches du Soleil, *leur formation* III. 283
Tangens arcus æqualis ſummæ vel differentiæ plurium arcuum II. 527 ſ.
—— arcus multipli vel ſubmultipli I. 512. II. 532

Tangens ex arcu per ſeriem exhibita II. 533. IV. 24
Tangentium methodi directæ Problema I. 138
— — methodus inverſa III. 413 ſ.
— tabulis condendis utile theorema II. 526
Tautochrona curva cyclois I. 52. 247. ſ. III. 488
— — *eadem quæ brachyſtochrona in hypotheſi Galilæi* I. 189. 192
Tautochrone *dans un milieu réſiſtant* III. 173. ſ.
— — — — — *ſa conſtruction* III. 180
Tautochroniſme *de la Cycloide, démonſtration erronée de Mr.* DE LA HIRE I. 210
TAYLOR, ſa ſolution du Probléme des Iſopérimetres II. 237. 473
TAYLORI Apologia II. 478. ſ.
— — ad eam reſponſio II. 483. ſ.
— objectiones adverſus ſolutionem Bernoullianam Problematis iſoperimetrici II. 473. 475
— — ad eas reſponſio II. 505
— obſcuritas in ſcribendo II. 494
— problema analyticum ſolutum II. 402
— ſolutio problematis trajectoriarum orthogonalium II. 281. 293. 424
TAYLORUS, an inventor novæ theoriæ centri oſcillationum II. 474. 476. 480 492. 516. 517.
— an plagii reus II. 480. 485. 489. 519.
Tempeſtatis ratio habenda eſt in conſtructione barometri luminoſi II. 361
Tempora deſcenſus gravis ad centrum IV. 243
Temporis ratio, qualis habenda ſit in æſtimatione virium III. 243
Tempus ab initio effluxus ad velocitatem æquabilem fluidi breviſſimum IV. 456. ſ.
— aſcenſus & deſcenſus corporis in altum projecti, in medio uniformiter denſo IV. 362. 364. 372. 374
Tenſio Fili actione fluidi dilatati I. 106
— funiculi corpus rotando deſcendens ſuſtinentis III. 128
— — cujus ope corpus deſcendens aliud aſcendens poſt ſe trahit III. 259
Termini impares omnes ad pares omnes, quam rationem habeant in ſeriebus reciprocis potentiarum IV 11. 12.
Terminus infiniteſimus ſeriei fractionum, quarum numeratores & denominatores ſunt in progreſſione arithmetica IV. 5
— — alterius ſeriei IV. 15
— maximus binomii ad datam poteſtatem elevati IV. 25
Terra motibus obnoxiæ regiones IV. 515
Terræ motus Carolo-Heſychii facti IV. 502. ſ.

Digitized by Google

Terræ motuum cauſæ IV. 515. ſ.
Terre *ſa figure* IV. 345
Teſſeræ quot jactibus quis ſuſcipere poſſit, datum datarum facierum numerum jacere IV. 30
Teſſerarum luſus IV. 31
V. Dez.
Teſtudo hemiſphærica quadrabilis III. 211. I. 160
Tetragoniſmus univerſalis per approximationem geometricam I. 162
— — per ſeriem appropinquantem I. 125
V. *Series*.
TEXTORIS ad BERNOULLIUM Epiſtolæ IV. 502. 522
Theorema Coteſianum IV. 67
— de Polygono regulari Circulo inſcripto IV. 71
— Dioptricum SUELLII I. 370
— hydraulicum de velocitate fluidi e vaſe effluentis IV. 401. 459
— inſigne, pro reducendo perimetro Ellipſeos ad peripheriam circuli I. 447
— Moivreanum pro elevando infinitinomio ad poteſtatem indefinitam IV. 157. 173
— — pro lege virium centralium determinanda I. 551
— Newtonianum de quiete vel motu uniformi centri gravitatis IV. 340
— — pro determinanda ſumma radicum æquationis, & Potentiarum earum IV. 22
— rectificationi curvarum inſerviens I. 249
— utile condendis Tabulis ſinuum Tangentium &c. II. 526
Theoremata analytica de reductione integralium II. 417
— — — — — demonſtrata II. 419. IV. 52
— Moivreana pro comparatione curvarum non ſatis univerſalia IV. 153
— pro conſervatione virium vivarum demonſtranda & experimentis confirmanda III. 124
Theorème *pour le calcul des forces centrales* IV. 477
Théorie *de la manœuvre des Vaiſſeaux* II. 1
Titubantium corporum oſcillationes IV. 296
Torrent central *dans le Tourbillon, ce que c'eſt & ſon origine* III. 293
— — *cauſe de la peſanteur* III. 298 300
— — — *du mouvement diurne des Planètes* III 317
TORICELLII & ROBERVALLII de cycloide contentiones I. 323
Tourbillons céleſtes *defendus contre les objections de* NEWTON III. 143
— — *les Planètes n'en ſuivent pas exactement le cours* III. 282
— — *leur formation & leur nature* III. 278
— — *leur équateur coincide avec celui de l'aſtre central* III. 332
Tour-

Tourbillons céleſtes *leur figure eſt Sphérique* III. 158
— — *leur mouvement produit par celui de l'Aſtre central* III. 133
— — *ſont compoſés de deux matiéres avec deux mouvemens principaux* III. 273
— *terminez par une eſpéce de Voile d'un tiſſu rare & poreux* III. 292
Tourbillons de DES CARTES III. 139. ſ. 264. ſ.
— — — *leurs inconvéniens* III. 267
Tractionis motus in Geometriam introductus a LEIBNITIO I. 415
Tractoire d'HUGUENS *eſt une Tautochrone dans un milieu réſiſtant* III. 180
Tractoria Hugeniana IV. 381
— — per ſe rectificabilis I. 66
Trajectoire *décrite par un corps attiré par une force centrale* I. 474
Trajectoria in medio reſiſtente deſcripta a corpore gravi I. 481 ſ.
Trajectoria orthogonalis circulorum II. 285
— — curvæ circa datum punctum in orbem converſæ I. 261. 271
— — curvarum motu angulari ex principali quadam genitarum II. 467
— — — motu parallelo latarum II. 308
— — — quæ ad brachyſtochronas reduci poſſunt II. 467. 469
— — — ſimilium II. 444. 451. 456. 462
— — cycloidum ejuſdem initii I. 193. II 279. 313
— — ellipſium ejuſdem centri & verticis II. 272. 311
— — hyperbolarum ejuſdem centri & verticis II. 270. 276. 311
— — logarithmicarum per idem punctum ductarum I. 193 260 ſ. 269 II. 277. 310
— — parabolarum I. 260. 261. 267. 270. 396. II. 309. 310. 312
Trajectoriarum orthogonalium Problematis hiſtoria II. 286
— — — propoſitio I 193. 259. 266. II. 270
— — — ſolutiones Bernoullianæ I. 267. 269. II. 290. 291. 436 ſ.
— — — ſolutio Jac. BERNOULLI I. 259 ſ.
— — — — Nic. BERNOULLI II. 295. 305
— — — — HERMANNI II. 275. 279 296. 297. 306. 427
— — — — NEWTONI II. 273. 275. 293
— — — — TAYLORI II. 281. 293. 424
Trajectoriarum reciprocarum Problema propoſitum II. 472
— — — ſolutum II. 520. 535 ſ. 557. ſ.
— — ſimpliciſſima II. 552. 566. 575 ſ. 593 ſ.
— — — poſt primam II. 613
Tranſcendentes quadraturæ II 591
Transformatio æquationis differentialis incompletæ in completam II. 442
— curvarum in alias æquales I. 152. 402. 409. 449. 451
— differentialium conſtantium in alias conſtantes IV. 77 ſ.
— hyperbolarum in alias curvas algebraicas IV. 93

Trans-

Transformatio lineæ circularis in algebraicam curvam I. 423
—— parabolarum in alias curvas algebraicas IV. 92
Transformation *des courbes algébriques en d'autres égales, Problème propoſé* I. 406
— *des differentielles* I. 399
Tranſlatio preſſionis fluidorum ad ſupremam eorum ſuperficiem, quomodo concipienda IV. 395
Treize (*Problème ſur le jeu du*) I 460
Triangle arithmétique *de* PASCAL *ibid.*
Trianguli rectanguli, cujus lateribus applicata ſunt tria corpora, unumque impellitur, motus III. 332
—— —— juxta cujus hypothenuſam rectam, vel curvam, grave deſcendit, motus III. 365. IV. 337. 341
Triangulorum proprietas IV. 33
Trinomialis quantitas, quibus in caſibus integrari poſſit, terminis finitis IV. 130
Trochoidis ſociæ proprietates I. 334
—— —— figura ea eſt quam oſcillando chorda muſica induit III. 210
TSCHIRNHAUSEN (*De*) *a cru que pluſieurs courbes ſont propres à reſoudre le Problême de la plus vite deſcente* I. 197
TSCHIRNHAUSIUS cauſticarum inventor III. 464
—— ejus de dimenſione curvarum inventa I. 149
—— ejus errores I. 52. 151. 171. 173. III. 406 ſ. 410. 464. 468
Tuba hyperbolica, liquoris in illa motus IV. 463
Tubi inflexi, vel recurvi, fluidorum in illis oſcillationes III. 125. IV. 474
Tubo circulanti incluſum corpus, qualem curvam deſcribat IV. 248
Tubus barometri amplior luci magis favet quam gracilior II. 329. 343. 349
—— —— inæqualis melior cylindrico II. 329. 349.
—— —— ſordidus nocet lumini II. 343
Tubus conicus, liquoris per illum fluentis velocitas & preſſio IV. 416. 455
Tubus partim immerſus, liquoris in illo motus IV. 419. 488
Tuiaux, *les plus larges ſont les meilleurs pour faire des barometres lumineux* I. 351
Turbinati, quid II. 190
—— in latus, in planum II. 191
Turbinationis centrum I. 187. 191. 195

V

V*Acuum* datur I. 87
Vaiſſeau, *où l'on doit y planter le mât* II. 71
—— *quelle impulſion il reçoit du vent* II. 103 ſ.

— *qui a la figure d'un rectangle.* II. 15 ſ.
— — — — — *d'un rhombe ou loſange.* II. 41. 45. 51
— *qui a une figure terminée par deux arcs de cercles égaux.* II. 55. 58 ſ.
— *ſa route & ſa viteſſe.* II. 113. 133. 146. 155
— — — — — — *quand il eſt pouſſé par deux vents.* II. 108. 133. 137 146. 155
Valor fractionis, cujus numerator & denominator, certo caſu evaneſcunt. I. 401
VARIGNONII Propoſitio mechanica. I. 106
Vas nihil novi liquoris accipiens, fluxus liquoris ex eo erumpentis. IV. 405 414. 475
— plenum ſemper remanens. IV. 401. 403. 410. 452
— qua vi retrourgeatur dum liquor ex eo erumpit. IV. 484. 488
Vectis communicando motui quomodo inſerviat. IV. 262
— viribus motricibus impulſi motus. IV. 256
Velaria curva. III. 510
— — eadem cum catenaria. III. 512
Velariarum & catenariarum inveniendarum methodus. I. 107 ſ.
Velocitas æquabilis liquoris e vaſe effluentis. II. 208 ſ. III. 124. IV. 401 404. 411. 437. 447. 452. 462
— — breviſſimo tempore acquiritur. IV. 456
— globi in medio uniformiter denſo quantum retardetur. IV. 357. 369
— gravis cycloidem deſcribentis in medio reſiſtente. IV. 44. 374
— — deſcendentis & aliud aſcendens poſt ſe trahentis. III. 125. 237. 256
— — deſcendentis rotando. III. 127
— — in medio reſiſtente aſcendentis & deſcendentis. IV. 361 ſ. 371 ſ.
— — — — — datam curvam deſcribentis. I. 481 ſ. 531 ſ. 537 ſ. 543 ſ. IV. 348 ſ.
— liquoris fluentis in diverſis tubis. IV. 398
— — — in tuba hyperbolica. IV. 465. 470
— — — per canalem ſeu tubum cylindricum. IV. 401 ſ.
— — — per canalem figuræ cujuslibet. IV. 437 ſ. 447
— — — per plures tubos. IV. 397. 410. 427
— — — per tubos ad horizontem obliquos. IV. 418
— — — per tubum conoidicum. IV. 416. 430. 455
— projectilium. I. 531. 537. 543
Velocitates corporum viribus uniformibus agitatorum ſunt in ratione ſubduplicata virium & ſpatiorum. I. 517
Venarum capillarium & arteriolarum anaſtomoſis. I. 281
Venæ aqueæ contractio, quando. IV. 448
Vent, *ſa viteſſe ſuppoſée finie ou infinie par rapport à celle du Vaiſſeau.* II. 89 103. 242
— *ſon impreſſion ſur la voile.* II. 83. 103

——— — — — — — *égale à la réſiſtance de l'eau au mouvement du Vaiſſeau.* II. 105
——————— *ſon axe d'équilibre.* II. 84
Venus, *ſon mouvement diurne calculé.* III. 322
Verre *frotté lumineux.* I. 435 ſ.
Vertex turbinationis. II 190
Vertu élaſtique. V. Reſſort.
Veſicula bubula inflata magna pondera elevantur. I. 111
Veſiculæ aëre plenæ in interſtitiis muſculorum conſpiciendæ. I. 103
—— muſcularis inflatæ figura circularis. I. 106. 113
Veterum facultates chimericæ videntur. I. 276
Via radiorum lucis reflexorum vel refractorum compendioſiſſima. I. 88 189. 375
— conoidis & globi in medio reſiſtente, priuſquam amittat datam velocitatis ſuæ partem. IV. 357. 369 ſ.
Vibrationes. V. *Oſcillationes.*
Vif argent. V. Mercure.
Villemot, *n'explique pas bien le mouvement diurne des planètes.* III. 314
——— — la peſanteur. III. 300
Vires centrales quomodo inveniendæ. I. 530. 551
— duæ in ſe invicem libere agentes ſponte ad æquilibrium ſeſe componunt. I. 372
— gravitatis in diverſis Terræ locis ope pendulorum explorantur. I. 519
— motrices ad vectem applicatæ. IV. 256
—— ſunt in ratione maſſarum & virium acceleratricium. IV. 393
— vivæ ſunt ut quadrata velocitatum. I. 321. III. 124. 248. ſ. 371. ſ. IV. 264. 459. 463. 490
— uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore emenſa. I. 517
Virium compoſitio & reſolutio demonſtrata. IV. 253
— muſcularium ſupputatio. I. 109 ſ.
— quantitas non mutatur in univerſo. III. 254
— vivarum æſtimatio. III. 245
—— conſervatio & menſura. I. 321. III. 124. 240. 248. 371. 374. 375. IV. 264. 459. 463. 490
—— theoria Newtono non perſpecta. III. 253
—— vera notio. III. 239 ſ.
Virtus agitativa. II. 173
Vis acceleratrix. IV. 393
— ad formandum gurgitem requiſita. IV. 400
— aëris, quos edat effectus. I. 34

Vis

Vis corporis quomodo poſſit in aliud tota transferri. IV. 263
— elaſtica corporum, unde. I. 25
— fermentationis, quanta. I. 33
— firmitatis requiſita ne filum actione fluidi dilatatum rumpatur. I. 107
— — reſiſtens inclinationi corporum aquæ inſidentium. IV. 295
— gravitatis normalis & tangentialis. I. 530
— hydroſtatica. IV. 436
— hydraulica. *ibid.*
— immaterialis. IV. 252. 333. 394. 442
— — aliter agit in corpora ſolida, aliter in fluida. IV. 443
— — eodem modo agit in corpus motum ac in quieſcens. IV. 394
— mortua. III. 240
— — eſt quid relativum. III. 241
— — quid differat a viva. *ibid.*
— motrix. IV. 393
— — eſt in ratione compoſita maſſarum & virium acceleratricium. *ibid.*
— — ejus intenſitas. IV. 394
— percuſſionis infinite major vi ponderis. I. 89
— pulveris pyrii unde. I. 33. IV. 516
— reſiſtentiæ fluidorum. IV. 446
— viva, agendi facultas. III. 239
— — a mortua quid differat. III. 241
— — conſervatur ſemper. III. 124. 240. 248. 371 ſ. IV. 459. 463. 490
— — corporis ex gravitate deſcendentis. III. 251
— — eſt quid reale & ſubſtantiale. III. 240
Viteſſe, *comment elle diminue par la réſiſtance d'un milieu.* III. 4. 7 ſ. 74
— *des Planétes primitivement imprimée.* III. 307
— *du mouvement diurne calculée.* III. 321
— — — *d'où elle dépend.* III. 329
— *d'un corps jetté en haut dans un milieu réſiſtant.* III. 77
— — *qui décrit une tautochrone dans un milieu réſiſtant.* III. 184
— *d'un pendule compoſé dans un milieu réſiſtant.* IV. 382
— *d'un Vaiſſeau de figure curviligne.* II. 59
— — — *de figure rectangulaire.* II. 20
— — — — *ſa courbe déterminatrice.* II. 23. 31
— — — *de figure rhomboique.* II. 45. 51
— — — *pouſſé par deux voiles.* II. 108 ſ. 133. 137. 146. 155
— — — *retenu par une corde infinie.* II. 122. 142
— *du Tourbillon autour du Soleil.* III. 304 ſ.
— — — *deux cent fois plus petite que celle des Planétes.* III. 306
— *virtuelle, ce que c'eſt.* III. 23

Vivens de ſua ſubſtantia indeſinenter amittit. I. 276
VIVIANI (*Vinc*). Ænigma florentinum Geometris propoſuit. III. 211
Unda luminis, ſynchrona. I. 193
Univerſalis tetragoniſmus. I. 125. 162
Univerſalitas methodi non temere affirmanda. IV. 139
Voile, *ſa courbure.* I. 59. II. 81. 94
—— —— *la même que celle d'une chaînette.* I. 60. II. 81
—— *ſa ſituation la plus avantageuſe pour gagner au vent, ou le fuir.* II. 26. 32
V. Vent.
Vuide du barometre, *n'a pas beſoin d'être parfait pour qu'il ſoit lumineux.* I. 369

W

WALLIS *a écrit ſur le mouvement.* III. 3
WALLISII calculus virium requiſitarum ad pondus elevandum per inflationem veſicæ. I. 111
—— de Cycloïde inventa. I. 323
—— ſolutio Ænigmatis florentini. III. 212
WEIDLERI explicatio phoſphori mercurialis. II. 386
WREN *a écrit ſur le mouvement.* III. 3
WRENNUS Cycloidis ſegmentum quadravit. I. 324

Z

Z*odiacale lumen.* I. 89
Zodiacale (*Lumiere*) III. 281
Zodiaque, *pourquoi les orbites des Planètes y ſont renfermées.* III. 309
Zonæ cycloidales quadrabiles. I. 327. 328. 330 ſ. 336. 389

FINIS.

C 10487

Digitized by Google

Digitized by Google

Google

Digitized by Google

Digitized by Google